Задача 1. Заяц и черепаха

Дано:

- Дистанция: $S = 40\text{км}$
- Скорость черепахи: $v_1 = 1\text{км/ч}$
- Скорость бега зайца: $v_2 = 40\text{км/ч}$
- Длительность одной остановки: $T = 2\text{ч}$
- Разница во времени на финише: $\Delta t = 1\text{ч}$

Решение:

1. Средняя скорость зайца на всей дистанции Время, за которое черепаха преодолеет всю дистанцию без остановок:

$$t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{40\text{км}}{1\text{км/ч}} = 40\text{ч}$$

По условию заяц финиширует на $\Delta t = 1\text{ч}$ раньше черепахи, значит, общее время движения зайца (включая отдых) составляет:

$$t_2 = t_1 - \Delta t = 40\text{ч} - 1\text{ч} = 39\text{ч}$$

Средняя скорость зайца на всей дистанции равна отношению всего пути ко всему затраченному времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t_2} = \frac{40\text{км}}{39\text{ч}} = \frac{40}{39}\text{км/ч} \approx 1,03\text{км/ч}$$

2. Число остановок и длина каждого участка бега

Чистое время, которое заяц тратит непосредственно на бег:

$$t_{\text{бег}} = \frac{S}{v_2} = \frac{40\text{км}}{40\text{км/ч}} = 1\text{ч}$$

Тогда суммарное время, проведённое зайцем на остановках:

$$t_{\text{отд}} = t_2 - t_{\text{бег}} = 39\text{ч} - 1\text{ч} = 38\text{ч}$$

Поскольку каждая остановка длится $T = 2\text{ч}$, общее количество остановок n равно:

$$n = \frac{t_{\text{отд}}}{T} = \frac{38\text{ч}}{2\text{ч}} = 19$$

Так как заяц делает $n = 19$ остановок в пути (между стартом и финишем), вся дистанция делится остановками на $n + 1 = 20$ равных участков. Длина каждого участка бега ΔS:

$$\Delta S = \frac{S}{n+1} = \frac{40\text{км}}{19+1} = \frac{40}{20}\text{км} = 2\text{км}$$

Ответ:

1. Средняя скорость зайца: $\frac{40}{39}\text{км/ч} \approx 1,03\text{км/ч}$.
2. Число остановок $n = 19$, длина каждого участка бега 2км.

Задача 2. А снег идет...

Дано:

- Уровень выпавших за зиму осадков в пересчёте на воду: $h_1 = 450\text{мм} = 0,45\text{м}$
- Плотность воды: $\rho_{\text{в}} = 1000\text{кг/м}^3$

Решение:

1. Анализ графика и выводы По представленному графику зависимости плотности снега ρ от глубины h можно сформулировать следующие физические выводы:

- Плотность свежевыпавшего снега на поверхности ($h = 0\text{см}$) минимальна и составляет $\rho_0 = 100\text{кг/м}^3$.
- С увеличением глубины от $h = 0\text{см}$ до $h_0 = 60\text{см}$ $(0,6\text{м})$ плотность снега возрастает прямо пропорционально глубине (по линейному закону) от $\rho_0 = 100\text{кг/м}^3$ до максимального значения $\rho_{\text{макс}} = 350\text{кг/м}^3$ по формуле $\rho(h) = \rho_0 + \frac{\rho_{\text{макс}} - \rho_0}{h_0} h$. Это происходит из-за сжатия снежинок и уменьшения воздушных пор под давлением верхних слоёв снега.
- Начиная с глубины $h = 60\text{см}$ и глубже ($h \geq 60\text{см}$), плотность снега перестаёт меняться и остаётся постоянной, равной $\rho_{\text{макс}} = 350\text{кг/м}^3$ (достигается предел механического уплотнения снега в данных температурных условиях).

2. Высота снежного покрова в конце зимы Так как снег не таял и не испарялся, масса снежного покрова m на некоторой площади горизонтального сечения S равна массе слоя талой воды высотой h_1 на той же площади:

$$m = \rho_в S h_1$$

Масса столба снега на единицу площади ($\frac{m}{S}$) численно равна площади под графиком зависимости $\rho(h)$:

$$\frac{m}{S} = \rho_в h_1 = 1000\text{кг/м}^3 \cdot 0,45\text{м} = 450\text{кг/м}^2$$

Найдём массу верхнего неоднородного слоя снега толщиной $h_0 = 60\text{см} = 0,6\text{м}$, приходящуюся на 1м^2 поверхности (площадь трапеции под графиком на участке от 0 до $0,6\text{м}$):

$$\frac{m_1}{S} = \frac{\rho_0 + \rho_{макс}}{2} \cdot h_0 = \frac{100+350}{2} \cdot 0,6 = 225 \cdot 0,6 = 135\text{кг/м}^2$$

Поскольку $135\text{кг/м}^2 < 450\text{кг/м}^2$, общая высота снежного покрова H превышает $0,6\text{м}$. Оставшаяся часть снега находится на глубине свыше $0,6\text{м}$, где плотность постоянна и равна $\rho_{макс} = 350\text{кг/м}^3$. Найдём массу этого нижнего слоя на единицу площади:

$$\frac{m_2}{S} = \frac{m}{S} - \frac{m_1}{S} = 450 - 135 = 315\text{кг/м}^2$$

Толщина нижнего слоя постоянной плотности ($H - h_0$):

$$H - h_0 = \frac{m_2/S}{\rho_{макс}} = \frac{315\text{кг/м}^2}{350\text{кг/м}^3} = 0,9\text{м} = 90\text{см}$$

Полная высота снежного покрова H:

$$H = h_0 + 0,9\text{м} = 0,6\text{м} + 0,9\text{м} = 1,5\text{м} = 150\text{см}$$

Ответ:

1. На поверхности плотность снега равна $100\text{кг}/\text{м}^3$, до глубины 60см она линейно растёт до $350\text{кг}/\text{м}^3$ под весом вышележащих слоёв, а на глубине более 60см остаётся постоянной ($350\text{кг}/\text{м}^3$).
2. Высота снежного покрова в конце зимы составляет $1,5\text{м}$ (150см).

Задача 3. Забеги в метрополитене

Дано:

- Число ступенек при беге вниз со скоростью v: $n_1 = 50$
- Число ступенек при беге вниз со скоростью $3v$: $n_2 = 75$

Решение:

1. Число ступенек неподвижного эскалатора Пусть N — количество видимых ступенек неподвижного эскалатора, а u — скорость движения самого эскалатора (выраженная в ступеньках в секунду). Скорость Антона v также будем измерять в ступеньках в секунду. При движении вниз по спускающемуся эскалатору скорости Антона и эскалатора складываются. В первом случае время спуска $t_1 = \frac{n_1}{v}$, за это время сам эскалатор проезжает ut_1 ступенек. Суммарное количество ступенек равно длине видимой части эскалатора N:

$$N = n_1 + ut_1 = n_1 + u\frac{n_1}{v} = n_1\left(1 + \frac{u}{v}\right)$$

Во втором случае Антон бежит со скоростью $3v$ относительно ступеней и затрачивает время $t_2 = \frac{n_2}{3v}$:

$$N = n_2 + ut_2 = n_2 + u\frac{n_2}{3v} = n_2\left(1 + \frac{u}{3v}\right)$$

Приравняем правые части обоих уравнений, подставив $n_1 = 50$ и $n_2 = 75$:

$$50\left(1 + \frac{u}{v}\right) = 75\left(1 + \frac{u}{3v}\right)$$

$$50 + 50\frac{u}{v} = 75 + 25\frac{u}{v}$$

$$25\frac{u}{v} = 25 \implies \frac{u}{v} = 1 \implies u = v$$

Таким образом, скорость эскалатора равна первоначальной скорости Антона v.

Подставим $\frac{u}{v} = 1$ в первое уравнение и найдём N:

$$N = 50 \cdot (1 + 1) = 100\text{ступенек}$$

2. Число ступенек при беге вверх со скоростью $3v$ Когда Антон бежит вверх со скоростью $3v$ относительно ступеней навстречу спускающемуся эскалатору, время его подъёма составляет $t_3 = \frac{n_3}{3v}$, где n_3 — количество ступенек, которые он насчитает. Так как эскалатор сносит его вниз со скоростью u, перемещение относительно земли равно разности пройденных ступенек:

$$N = n_3 - ut_3 = n_3\left(1 - \frac{u}{3v}\right)$$

Подставим известные значения $N = 100$ и $\frac{u}{v} = 1$:

$$100 = n_3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}n_3$$

$$n_3 = \frac{100 \cdot 3}{2} = 150\text{ступенек}$$

Ответ:

1. Неподвижный эскалатор имеет 100 ступенек.
2. При беге вверх Антон насчитает 150 ступенек.

Задача 4. Пирамида кирпичей

Дано:

- Количество кирпичей в первой части: $N = 4$
- Длина каждого кирпича: L

Решение:

1. Максимальный вынос для четырёх кирпичей Для того чтобы система кирпичей находилась в равновесии, проекция общего центра тяжести любой группы верхних кирпичей не должна выходить за край нижележащего кирпича (или края стола). Максимальный вынос достигается при предельном равновесии, когда центр тяжести верхних кирпичей лежит строго над краем опоры:

Первый сверху кирпич (№1) может выступать за край второго сверху кирпича (№2) максимум на половину своей длины, так как его собственный центр тяжести находится посередине:

$$\Delta x_1 = \frac{L}{2}$$

1. **Два верхних кирпича (№1 и №2)** имеют общий центр тяжести посередине между их индивидуальными центрами тяжести — то есть на расстоянии $\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{4}$ от края кирпича №2. Значит, кирпич №2 можно выдвинуть за край кирпича №3 на:

$$\Delta x_2 = \frac{L}{4}$$

2. **Три верхних кирпича (№1, №2 и №3)**: центр масс системы из двух верхних кирпичей массы $2m$ находится над краем кирпича №3, а центр масс самого кирпича №3 массы m — на расстоянии $\frac{L}{2}$ от этого края. По правилу рычага (или формуле центра масс) общий центр тяжести трёх кирпичей смещён от края кирпича №3 на $\Delta x_3 = \frac{2m \cdot 0 + m \cdot (L/2)}{3m} = \frac{L}{6}$. Значит, кирпич №3 выступает за край кирпича №4 на:

$$\Delta x_3 = \frac{L}{6}$$

3. **Четыре кирпича (№1, №2, №3 и №4)**: аналогично, общий центр масс трёх верхних кирпичей массы $3m$ лежит над краем кирпича №4, а центр масс самого кирпича №4 массы m — на расстоянии $\frac{L}{2}$ от его края. Следовательно, кирпич №4 можно выдвинуть за край стола на:

$$\Delta x_4 = \frac{3m \cdot 0 + m \cdot (L/2)}{4m} = \frac{L}{8}$$

4. Суммарный максимальный вынос правого края самого верхнего кирпича относительно края стола равен сумме всех четырёх сдвигов:

$$X_{\text{макс}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} + \frac{L}{8} = \frac{12+6+4+3}{24} L = \frac{25}{24} L$$

Так как $\frac{25}{24} L > L$, то даже **левый край** самого верхнего кирпича находится за пределами стола на расстоянии $\frac{25}{24} L - L = \frac{1}{24} L$. Следовательно, расположить четыре кирпича так, чтобы самый верхний оказался полностью за пределами стола, **можно**.

2. Теоретический предел выноса при произвольном увеличении числа кирпичей

Для N одинаковых кирпичей каждый k-й сверху кирпич может быть сдвинут относительно нижележащего на величину:

$$\Delta x_k = \frac{L}{2k}$$

Общий вынос верхнего кирпича относительно края стола для N кирпичей определяется суммой:

$$X_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{L}{2k} = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}\right)$$

В скобках записана частичная сумма гармонического ряда. Из математики известно, что гармонический ряд расходится: при $N \to \infty$ его сумма неограниченно возрастает ($\lim_{N \to \infty} X_N = \infty$). Поэтому **конечного теоретического предела выноса не существует** — имея достаточное количество кирпичей, верхний кирпич можно вынести за край стола на сколь угодно большое расстояние.

Ответ:

1. Да, можно (максимальный вынос верхнего кирпича составляет $\frac{25}{24} L > L$).
2. Нет, конечного теоретического предела не существует (при увеличении числа кирпичей вынос может быть сколь угодно большим).

Задача 5. Взвешиваем потери

Дано:

- Площадь сечения сосуда: $S = 0,50 \text{м}^2$
- Площадь сечения тела: $S_{\text{т}} = \frac{S}{2} = 0,25 \text{м}^2$
- Начальная толщина нижнего слоя жидкости: $h_1 = 50 \text{см} = 0,50 \text{м}$
- Ускорение свободного падения: $g = 10 \text{м/с}^2$
- Объемный расход жидкости: $Q = const$

Решение:

Поскольку объёмный расход Q постоянен, масса вытекающей в единицу времени жидкости равна ρQ, а значит, вес сосуда $P(t)$ убывает со временем линейно со скоростью $|\frac{\Delta P}{\Delta t}| = \rho g Q$. На графике (и в таблице) зависимость $P(t)$ состоит из трёх линейных участков:

1. **Вытекание нижней жидкости** ($0 \le t \le t_1$): вес быстро убывает со скоростью $k_1 = \rho_1 g Q$.
2. **Вытекание верхней жидкости** ($t_1 \le t \le t_2$): вес убывает медленнее со скоростью $k_2 = \rho_2 g Q$.
3. **Обе жидкости вытекли** ($t \ge t_2$): вес сосуда перестаёт меняться и равен весу закреплённого тела $P_т = 0,60\text{кН} = 600\text{Н}$ (видно по точкам $t = 390\text{с}$ и $t = 410\text{с}$).

Проанализируем экспериментальные данные таблицы для нахождения моментов смены режимов t_1 и t_2:

На первом участке (t от 0 до 200с) за каждые 100с вес уменьшается примерно на $2,52\text{кН}$ (при $t = 0\text{с}$ вес $P_0 = 7,40\text{кН}$; при $t = 100\text{с}$ вес $4,85\text{кН}$; при $t = 200\text{с}$ вес $2,36\text{кН}$). Средний наклон прямой на участке $0–200\text{с}$ составляет:

$$k_1 = \frac{7,40-2,36}{200}\text{кН/с} = 0,0252\text{кН/с} = 25,2\text{Н/с}$$

- (С учётом округления экспериментальных точек значение лежит в пределах $25,0–25,2\text{Н/с}$).
- Начиная с $t = 200\text{с}$, скорость падения веса резко снижается (за 10с от 200 до 210с вес падает всего на $0,06\text{кН}$). Это означает, что момент полного вытекания нижней жидкости составляет $t_1 = 200\text{с}$, а вес сосуда в этот момент равен $P(t_1) = 2,36\text{кН} \approx 2,40\text{кН}$.
- На втором участке (t от 200с до 390с) вытекает верхняя жидкость, и к моменту $t_2 = 390\text{с}$ вес достигает постоянного значения $P_т = 0,60\text{кН}$. Проверим линейность на участке $200–390\text{с}$: изменение веса составляет $\Delta P_2 = 2,36 - 0,60 = 1,76\text{кН}$ за время $\Delta t_2 = 390 - 200 = 190\text{с}$ (скорость убывания веса $k_2 = \frac{1,76}{190} \approx 0,0093\text{кН/с} = 9,3\text{Н/с}$; к примеру, при $t = 300\text{с}$ расчёт даёт $2,36 - 0,93 = 1,43\text{кН}$, а в таблице $1,41\text{кН}$ — отличное совпадение).

Теперь ответим последовательно на вопросы задачи.

1. Плотность нижней жидкости ρ_1

За время $t_1 = 200\text{с}$ полностью вытек нижний слой жидкости объёмом:

$$V_1 = Sh_1 = 0,50\text{м}^2 \cdot 0,50\text{м} = 0,25\text{м}^3$$

Уменьшение веса сосуда за это время равно весу нижней жидкости $\Delta P_1 = P(0) - P(200) = 7,40\text{кН} - 2,36\text{кН} = 5,04\text{кН} = 5040\text{Н}$ (при сглаживании прямой по всем точкам $\Delta P_1 \approx 5,00\text{кН} = 5000\text{Н}$). Отсюда плотность нижней жидкости:

$$\rho_1 = \frac{\Delta P_1}{gV_1} = \frac{5040\text{Н}}{10\text{м/с}^2 \cdot 0,25\text{м}^3} = 2016\text{кг/м}^3 \approx 2000\text{кг/м}^3$$

2. Первоначальная толщина верхнего слоя жидкости h_2

Найдем постоянный объёмный расход жидкости Q:

$$Q = \frac{V_1}{t_1} = \frac{0,25\text{м}^3}{200\text{с}} = 0,00125\text{м}^3/\text{с} = 1,25\text{л/с}$$

Верхняя жидкость вытекала в течение времени $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 390\text{с} - 200\text{с} = 190\text{с}$ (с учётом погрешности округления экспериментальных точек граница выхода на плато $0,60\text{кН}$ может лежать вблизи $t_2 = 385–390\text{с}$). Объём вытекшей верхней жидкости V_2:

$$V_2 = Q \cdot \Delta t_2 = 0,00125\text{м}^3/\text{с} \cdot 190\text{с} = 0,2375\text{м}^3 \approx 0,24\text{м}^3$$

Так как в верхнем слое находится тело с площадью сечения $S_\text{т} = \frac{S}{2}$ на всю высоту слоя h_2, площадь свободного сечения, занимаемая самой верхней жидкостью, равна $S - S_\text{т} = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2} = 0,25\text{м}^2$. Следовательно, первоначальная толщина верхнего слоя h_2:

$$h_2 = \frac{V_2}{S/2} = \frac{0,2375\text{м}^3}{0,25\text{м}^2} = 0,95\text{м} = 95\text{см}$$

(Примечание: так как $S - S_\text{т} = \frac{S}{2}$, можно сразу записать отношение времён вытекания: $\frac{\Delta t_2}{t_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{(S/2)h_2}{Sh_1} = \frac{h_2}{2h_1}$*, откуда* $h_2 = 2h_1\frac{\Delta t_2}{t_1} = 2 \cdot 0,50\text{м} \cdot \frac{190}{200} = 0,95\text{м}$*. При аппроксимации* $t_2 \approx 384\text{с}$ *получаем* $h_2 \approx 0,92\text{м}$*).*

3. Плотность верхней жидкости ρ_2 Вес верхней жидкости равен изменению показаний весов на втором участке (от $t_1 = 200\text{с}$ до $t_2 = 390\text{с}$):

$$\Delta P_2 = P(t_1) - P_\text{т} = 2,36\text{кН} - 0,60\text{кН} = 1,76\text{кН} = 1760\text{Н}$$

Плотность верхней жидкости ρ_2:

$$\rho_2 = \frac{\Delta P_2}{g V_2} = \frac{1760\text{Н}}{10\text{м/с}^2 \cdot 0,2375\text{м}^3} \approx 741\text{кг/м}^3 \approx 750\text{кг/м}^3$$

(Если считать через отношение наклонов графиков k_2 и k_1:
$\rho_2 = \rho_1 \frac{k_2}{k_1} = 2000 \cdot \frac{9,3}{25,0} \approx 744\text{–}750\text{кг/м}^3$*).*

4. Общая масса тела и оставшихся в сосуде жидкостей в момент $t = 120\text{с}$ Поскольку сосуд невесом, а динамическим давлением струи можно пренебречь, общая масса содержимого сосуда в любой момент времени t равна $M(t) = \frac{P(t)}{g}$. Момент $t = 120\text{с}$ лежит на первом линейном участке, точно посередине между табличными точками $t = 100\text{с}$ ($P = 4,85\text{кН}$) и $t = 140\text{с}$ ($P = 3,89\text{кН}$). Найдём вес сосуда в момент $t = 120\text{с}$ методом линейной интерполяции:

$$P(120) = \frac{P(100) + P(140)}{2} = \frac{4,85 + 3,89}{2} = 4,37\text{кН} = 4370\text{Н}$$

(При расчёте от начальной точки:
$P(120) = P_0 - k_1 t = 7,40\text{кН} - 0,0252\text{кН/с} \cdot 120\text{с} = 4,376\text{кН} \approx 4,38\text{кН}$*).*
Тогда общая масса тела и жидкостей в сосуде при $t = 120\text{с}$ равна:

$$M(120) = \frac{P(120)}{g} = \frac{4370\text{Н}}{10\text{м/с}^2} = 437\text{кг} \approx 440\text{кг}$$

Ответ:

1. Плотность нижней жидкости: $\rho_1 \approx 2000\text{кг/м}^3$ (допустимый диапазон с учётом погрешности точек: $2000\text{–}2020\text{кг/м}^3$).
2. Первоначальная толщина верхнего слоя: $h_2 \approx 0,95\text{м}$ (95см, допустимый диапазон:

$90–96$см).

3. Плотность верхней жидкости: $\rho_2 \approx 750$кг/м^3 (допустимый диапазон: $740–760$кг/м^3).
4. Общая масса тела и жидкостей в момент $t = 120$с: $M \approx 437$кг (допустимый диапазон: $435–440$кг).