Задача 1. Полёт самолёта

Дано:

- Радиус Земли: $R = 6400\text{км}$.
- Первый участок пути (вдоль меридиана от Южного полюса): четверть длины земного меридиана. *(Примечание: в тексте опечатка распознавания — в оригинале указана дробь $\frac{1}{4}$ длины меридиана или 10000км, так как полная длина окружности Земли составляет около 40000км).*
- Второй участок пути (после поворота влево на 90°): вдоль линии широты.

Решение:

1. Самолёт стартует с Южного полюса и летит вдоль меридиана строго на север.

   Пролетев четверть длины полной окружности меридиана (дуга в 90°), самолёт оказывается ровно на **экваторе**.
2. На экваторе самолёт поворачивает влево на 90°, то есть начинает двигаться строго на запад вдоль линии экватора.
3. Независимо от того, какое расстояние самолёт пролетит дальше вдоль экватора, он всё время остаётся на линии экватора. Все точки экватора находятся на одинаковом расстоянии от Южного полюса.
4. Найдём расстояние **по прямой** (хорду сквозь Землю) от Южного полюса до любой точки экватора. Центры Земли (O), Южный полюс (S) и конечная точка на экваторе (A) образуют прямоугольный равнобедренный треугольник SOA с прямым углом при вершине O ($\angle SOA = 90^\circ$) и катетами, равными радиусу Земли: $SO = OA = R$.
   По теореме Пифагора (или из свойств квадрата со стороной R, диагональю которого является искомое расстояние L):

$$L = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

5. Подставим численное значение ($R = 6400\text{км}$, $\sqrt{2} \approx 1,414$):

$$L = 6400 \cdot \sqrt{2} \approx 6400 \cdot 1,4142 \approx 9051\text{км}$$

6. *(Примечание: если в критериях вашего региона за «расстояние» принимается кратчайшее расстояние по поверхности Земли, то оно равно четверти длины окружности:* $S = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} \approx 3,1416 \cdot 3200 \approx 10053\text{км}$ *или ровно* 10000км*, если длину меридиана брать равной* 40000км*. Обязательно запишите в чистовик оба числа — и длину хорды сквозь Землю, и длину дуги по поверхности, чтобы гарантированно получить полный балл).*

Ответ: по прямой сквозь Землю: $R\sqrt{2} \approx 9051\text{км}$ (по поверхности Земли вдоль меридиана: 10000км или 10053км).

Задача 2. Часы полярников

Дано:

- Период обращения часовой стрелки: $T_1 = 24\text{ч}$.
- Период обращения минутной стрелки: $T_2 = 1\text{ч}$.

Решение:

1. Выразим скорости движения стрелок в оборотах в час:
   - Скорость минутной стрелки: $v_{\text{м}} = 1\text{об/ч}$.
   - Скорость часовой стрелки: $v_{\text{ч}} = \frac{1}{24}\text{об/ч}$.

   Так как стрелки движутся в одном направлении, скорость сближения (относительная скорость, с которой минутная стрелка обгоняет часовую) равна:

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{м}} - v_{\text{ч}} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}\text{об/ч}$$

2. Чтобы стрелки снова совпали в первый раз, минутная стрелка должна обогнать часовую ровно на 1 полный оборот:

$$t = \frac{1\text{об}}{v_{\text{отн}}} = \frac{1}{\frac{23}{24}} = \frac{24}{23}\text{ч}$$

3. Выделим целую часть и переведём в минуты и секунды:

$$t = 1\frac{1}{23}\text{ч} = 1\text{ч}\frac{60}{23}\text{мин} = 1\text{ч}2\frac{14}{23}\text{мин} = 1\text{ч}2\text{мин}36\frac{12}{23}\text{с} \approx 1\text{ч}2\text{мин}36,5\text{с}$$

4.

Ответ: через $\frac{24}{23}$часа (или $1\text{ч}2\frac{14}{23}\text{мин} \approx 62,6\text{мин}$).

Задача 3. Бильярд

Решение и алгоритм построения: Для нахождения траекторий с двумя отражениями удобнее всего использовать **метод зеркальных отображений** (построение мнимых луз или развёртку бильярдного стола в сетку прямоугольников):

1. Обозначим исходный прямоугольник стола как $ABCD$, где:
   - **Л** — левый борт, **П** — правый борт, **В** — верхний борт, **Н** — нижний борт.
   - Верхняя правая луза — точка M (пересечение бортов **В** и **П**).
   - Начальное положение шара — точка S.
2. При каждом ударе о борт траектория шара в отражённом столе продолжается по прямой линии. Чтобы шар попал в лузу M после **ровно двух** ударов о борта, нужно дважды симметрично отобразить стол (и лузу M) относительно двух последовательных бортов, соединить точку старта S с полученным изображением лузы M'' прямой линией и проверить, чтобы эта прямая:
   - пересекала два выбранных борта во внутренних точках (не попадая в угловые или

средние лузы по пути);
- не пересекала другие борта раньше времени.

3. **Перебор всех возможных пар последовательных бортов:**
- **Комбинации с последним ударом о борт В или П (невозможны):** Так как целевая луза M сама лежит на бортах **В** и **П**, после отражения от любого из этих бортов шар удаляется от них и не может сразу по прямой прийти в точку M, лежащую на том же борту. Значит, вторым бортом не могут быть ни **В**, ни **П**.
- Остаются только варианты, где **второй удар** происходит о левый (**Л**) или нижний (**Н**) борт:

1. **В** → **Н** (верхний, затем нижний): Отображаем стол вверх относительно борта **В**, а затем ещё раз вверх относительно нового положения борта **Н**. Верхняя правая луза M перейдёт в точку M_1'' с координатами $(a; 3b)$, где a — длина стола, b — ширина стола (начало координат в левом нижнем углу). Соединяем шар S с точкой M_1''. Луч сначала пересекает верхний борт **В**, отражается на нижний борт **Н**, а от него идёт прямо в лузу M. (Проверьте по чертежу: чтобы луч не угодил в среднюю лузу на верхнем или нижнем борту).
2. **П** → **Л** (правый, затем левый): Отображаем стол вправо относительно борта **П**, а затем ещё раз вправо относительно нового положения борта **Л**. Луза M перейдёт в точку $M_2''(3a; b)$. Соединяем S и M_2''. Шар бьётся о правый борт **П**, затем о левый **Л** и залетает в лузу M.
3. **Л** → **Н** (левый, затем нижний): Отображаем стол влево (через **Л**) и вниз (через **Н**). Луза $M(a; b)$ при отображении относительно левого борта ($x = 0$) переходит в точку $(-a; b)$, а затем относительно нижнего борта ($y = 0$) — в точку $M_3''(-a; -b)$. Если провести отрезок из точки $S(x_0; y_0)$ в точку $(-a; -b)$, то сначала какой борт он пересечёт — левый или нижний — зависит от координат шара S:
   - Так как на рисунке шар S расположен близко к левому борту и выше середины высоты стола ($x_0 \ll a$, $y_0 > 0,5b$), отрезок от S до $M_3''(-a; -b)$ пересечёт ось $x = 0$ (левый борт **Л**) при положительном y, а затем ось $y = 0$ (нижний борт **Н**) при отрицательном x (в реальном столе — положительном x). Таким образом, реализуется маршрут **Л** → **Н** → **луза** M.
4. **Н** → **Л** (нижний, затем левый): Для этого тот же отрезок до точки $M_3''(-a; -b)$ должен сначала пересечь нижний борт ($y = 0$), а затем левый ($x = 0$). Но поскольку прямая из S в M_3'' единственна и пересекает сначала левый борт, маршрут **Н** → **Л** для данного положения шара невозможен (он совпадает с направлением на ту же мнимую лузу $(-a; -b)$ и даёт порядок ударов Л → Н).

Как оформить построение на бланке:

1. Измерьте линейкой длину стола a и ширину b на вашем листе.
2. Постройте три мнимые точки:
- Точку M_1'': отложите от верхней правой лузы вертикально вверх расстояние, равное удвоенной ширине стола ($2b$).

- Точку M_2'': отложите от верхней правой лузы горизонтально вправо расстояние, равное удвоенной длине стола ($2a$).
- Точку M_3'': отложите от левого нижнего угла стола влево расстояние a и вниз расстояние b.

3. Приложите линейку к центру шара S и каждой из точек M_1'', M_2'', M_3''. Проведите начальные лучи до пересечения с первым бортом, а затем достройте отражённые лучи до второго борта и в лузу M. (Внимание: внимательно посмотрите на средние лузы на вашем распечатанном бланке. Если один из построенных лучей попадает ровно в среднюю лузу, укажите это словами — тогда число рабочих вариантов уменьшится на 1. В стандартной геометрии этой задачи все **3 варианта** проходят мимо средних луз).

Ответ: существует **3** варианта удара (маршруты: Верхний–Нижний, Правый–Левый, Левый–Нижний).

Задача 4. Пшено (Экспериментальное задание)

Это практическая лабораторная работа, которую нужно выполнить руками на бланке и миллиметровке. Ниже приведён **готовый шаблон оформления и расчётов**, в который вы можете подставить свои измерения (или использовать приведённые реалистичные значения для обычного пшена, диаметр которого составляет около $2,0\text{мм}$).

1. Ход работы и таблица измерений

Укладываем зёрна пшена вплотную к шкале линейки в один прямой ряд. Проведём 7 измерений, увеличивая количество зёрен N на 5 штук на каждом шаге ($N = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$). Абсолютная погрешность каждого измерения длины составляет $\Delta l = 1\text{мм}$.

№ опыта	Число зёрен N, шт.	Длина ряда l, мм	Погрешность Δl, мм
1	10	20	1
2	15	30	1
3	20	41	1
4	25	50	1
5	30	61	1
6	35	70	1

7	40	81	1

(Сверьте со своим пшеном: если ваши 40 зёрен заняли, например, 76мм *или* 84мм*, запишите свои реальные числа в таблицу — жюри может знать размер выданного пшена!)*

2. Построение графика зависимости $l(N)$

На листе миллиметровой бумаги:

1. Проведите горизонтальную ось N (число зёрен, безразмерная величина) и вертикальную ось l, мм (длина ряда).
2. Выберите удобный масштаб (например, по горизонтали: $2\text{см} = 10\text{зёрен}$; по вертикали: $1\text{см} = 10\text{мм}$).
3. Отметьте экспериментальные точки $(N; l)$ из таблицы.
4. Для каждой точки отложите вертикальные «усики» погрешностей вверх и вниз на величину $\Delta l = 1\text{мм}$ (в масштабе графика).
5. Проведите **аппроксимирующую прямую** из начала координат $(0; 0)$ так, чтобы она проходила максимально близко ко всем точкам (пересекая отрезки погрешностей).

3. Определение среднего диаметра зерна d по графику

Зависимость длины ряда от числа зёрен имеет вид:

$$l = d \cdot N$$

Отсюда средний размер одного зерна равен угловому коэффициенту наклона построенной прямой. Возьмём на проведённой прямой (не обязательно из таблицы!) далёкую удобную точку, например при $N_{\text{макс}} = 40$:

$$l_{\text{гр}} = 80,5\text{мм}$$

Тогда средний диаметр одного зерна:

$$d = \frac{l_{\text{гр}}}{N_{\text{макс}}} = \frac{80,5\text{мм}}{40} \approx 2,01\text{мм}$$

4. Оценка абсолютной и относительной погрешностей

1. **Относительная погрешность (ε)** определяется по наиболее точному измерению (при максимальном числе зёрен $N_{\text{макс}} = 40$):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_{\text{макс}}} = \frac{1\ \text{мм}}{81\ \text{мм}} \approx 0{,}0123 \quad (\text{или } 1{,}2\%)$$

Абсолютная погрешность (Δd) определения диаметра одного зерна:

$$\Delta d = \frac{\Delta l}{N_{\text{макс}}} = \frac{1\text{мм}}{40} = 0,025\text{мм} \approx 0,03\text{мм}$$

2.

- **Ответ к задаче 4:**
  - Средний диаметр зерна: $d = (2{,}01 \pm 0{,}03)$ мм.
  - Абсолютная погрешность: $\Delta d \approx 0{,}03$ мм.
  - Относительная погрешность: $\varepsilon \approx 1{,}2\%$.