

Решения школьного этапа ВсОШ по математике

Смоленская область | 2026/27 учебный год | 11 класс
II группа регионов

№	Краткий ответ
1	8
2	$1/298$
3	35
4	$8/3$
5	2 и 6
6	396
7	61 градус
8	1025

Ниже приведены подробные решения всех восьми заданий.

Задание 1

Условие. Найти наименьшее натуральное n , при котором $\sin(n^2+5n)^\circ \cdot \cos(n^2+5n)^\circ < 0$.

Решение. Пусть $\alpha = n^2 + 5n$. Произведение $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ отрицательно, когда синус и косинус имеют разные знаки. Для $n=1, 2, \dots, 7$ значения α равны $6^\circ, 14^\circ, 24^\circ, 36^\circ, 50^\circ, 66^\circ, 84^\circ$; все они лежат в первой четверти, поэтому произведение положительно. При $n=8$ получаем $\alpha = 64 + 40 = 104^\circ$. Этот угол лежит во второй четверти: $\sin 104^\circ > 0$, $\cos 104^\circ < 0$. Значит, произведение отрицательно впервые при $n=8$.

Ответ: 8

Задание 2

Условие. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n / (1 + 3a_n)$. Найти a_{100} .

Решение. Положим $b_n = 1/a_n$. Тогда $b_{n+1} = (1 + 3a_n)/a_n = b_n + 3$. Получилась арифметическая прогрессия с $b_1 = 1$, поэтому $b_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2$. Следовательно, $a_n = 1/(3n-2)$, и $a_{100} = 1/298$.

Ответ: 1/298

Задание 3

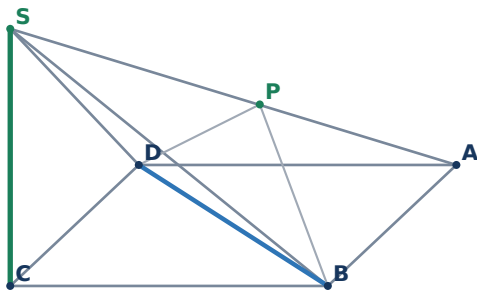
Условие. Пять различных натуральных чисел имеют среднее арифметическое 15, а медиана равна 18. Найти наибольшее возможное значение наибольшего числа.

Решение. Расположим числа по возрастанию: $a < b < 18 < d < e$. Их сумма равна $5 \cdot 15 = 75$. Чтобы e было как можно больше, сумма остальных четырёх чисел должна быть минимальной. Наименьшие возможные a и b равны 1 и 2, а наименьшее d , большее 18, равно 19. Тогда $e = 75 - (1 + 2 + 18 + 19) = 35$. Набор 1, 2, 18, 19, 35 состоит из различных натуральных чисел, имеет сумму 75 и медиану 18, поэтому максимум достигается.

Ответ: 35

Задание 4

Условие. Основание ABCD пирамиды SABCD - квадрат со стороной 4, $SC=2$ - высота. Точка P лежит на прямой AS. Найти наименьшую площадь треугольника BDP.



Координатная модель: $C=(0,0,0)$, $A=(4,4,0)$, $S=(0,0,2)$.

Решение. Введём координаты: $C=(0,0,0)$, $B=(4,0,0)$, $D=(0,4,0)$, $A=(4,4,0)$, $S=(0,0,2)$. Любая точка прямой AS имеет вид $P=(4-4t, 4-4t, 2t)$. Векторы $BD=(-4,4,0)$ и $BP=(-4t, 4-4t, 2t)$. Поэтому $4S^2 = |\mathbf{BD} \times \mathbf{BP}|^2 = 1152t^2 - 1024t + 256$, то есть $S^2 = 288t^2 - 256t + 64$. Этот квадратный трёхчлен достигает минимума при $t = 256 / (2 \cdot 288) = 4/9$. Минимальное значение S^2 равно $64/9$, следовательно, $S = 8/3$.

Ответ: 8/3

Задание 5

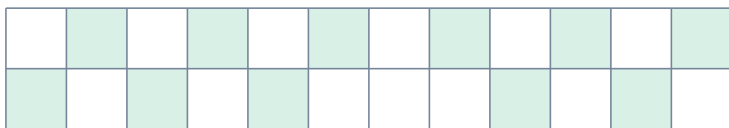
Условие. Для каких натуральных m уравнение $x^2 - (m+5)x + 3m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Решение. Пусть корни равны r и s . По теореме Виета $r+s=m+5$ и $rs=3m$. Тогда $(r-3)(s-3) = rs - 3(r+s) + 9 = 3m - 3(m+5) + 9 = -6$. Поскольку r, s натуральные, числа $r-3$ и $s-3$ не меньше -2 . Подходящие разложения -6 с этим ограничением: $(-2) \cdot 3$ и $(-1) \cdot 6$. Они дают пары корней $(1, 6)$ и $(2, 9)$. В первом случае $m = r+s-5 = 2$, во втором $m = 6$. Корни в обоих случаях натуральны и различны.

Ответ: 2 и 6

Задание 6

Условие. В прямоугольнике 2×100 закрасить ровно 99 клеток так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны. Сколько существует способов?



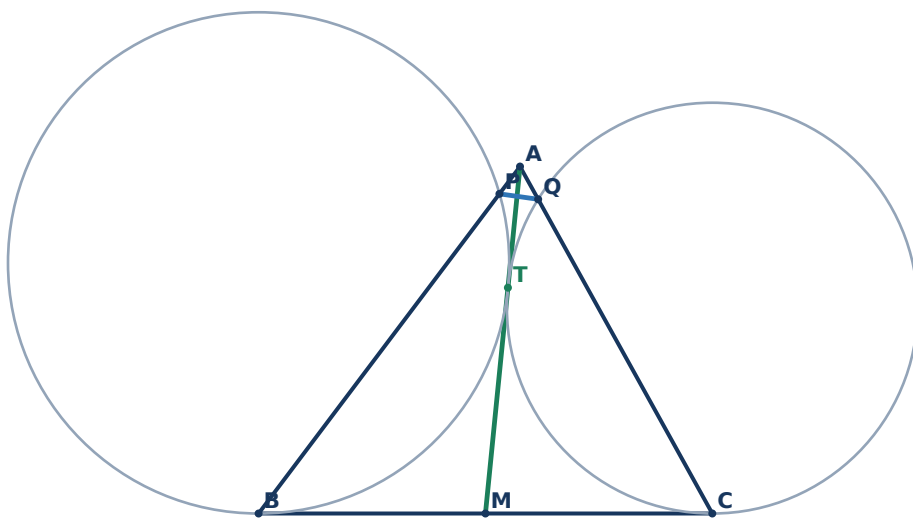
Фрагмент: единственный пустой столбец разделяет две чередующиеся цепочки.

Решение. В одном столбце нельзя закрасить обе клетки, поэтому при 99 закрашенных клетках ровно 99 столбцов содержат по одной закрашенной клетке, а один столбец пуст. В каждой непрерывной группе непустых столбцов клетки обязаны чередоваться: верхняя, нижняя, верхняя и так далее. Если пустой столбец крайний, остаётся одна группа и для неё есть 2 варианта; два края дают $2 \cdot 2 = 4$ способа. Если пустой столбец внутренний, возникают две независимые непустые группы, каждая с двумя вариантами начала: $2 \cdot 2 = 4$ способа. Внутренних положений 98. Итого $4 + 98 \cdot 4 = 396$.

Ответ: 396

Задание 7

Условие. В треугольнике ABC даны $\angle ABC = 53^\circ$, $\angle BAC = 66^\circ$, M - середина BC . Окружности касаются BC в B и C соответственно и отрезка AM , а затем пересекают AB и AC в точках P и Q . Найти $\angle APQ$.



Касательные из M равны: $MB = MT = MC$. Поэтому точка касания с AM общая.

Решение. Пусть первая окружность касается AM в T_1 , а вторая - в T_2 . Из одной точки M длины касательных к окружности равны, поэтому $MT_1 = MB$ и $MT_2 = MC$. Так как M - середина BC , $MB = MC$. Обе точки касания лежат на отрезке AM на одном расстоянии от M , значит, $T_1 = T_2 = T$. Теперь применим теорему о касательной и секущей из точки A . Для первой окружности $AT^2 = AP \cdot AB$, для второй $AT^2 = AQ \cdot AC$. Следовательно, $AP/AQ = AC/AB$. У треугольников APQ и ACB равны углы при A , а прилежащие к ним стороны пропорциональны, поэтому эти треугольники подобны. Значит, $\angle APQ = \angle ACB = 180^\circ - 66^\circ - 53^\circ = 61^\circ$.

Ответ: 61 градус

Задание 8

Условие. Приведённый многочлен четвёртой степени $P(x)$ удовлетворяет $P(2^n+1)=8^n+1$ при $n=1,2,3,4$. Найти $P(1)$.

Решение. Если $x=2^n+1$, то $8^n=(2^n)^3=(x-1)^3$. Поэтому в точках $x=3,5,9,17$ выполняется $P(x)=(x-1)^3+1$. Рассмотрим $Q(x)=P(x)-[(x-1)^3+1]$. Многочлен Q имеет степень 4, старший коэффициент 1 и четыре корня 3,5,9,17. Следовательно, $Q(x)=(x-3)(x-5)(x-9)(x-17)$. При $x=1$ получаем $P(1)=0^3+1+(1-3)(1-5)(1-9)(1-17)=1+(-2)(-4)(-8)(-16)=1+1024=1025$.

Ответ: 1025