

Решения школьного этапа ВсОШ по математике

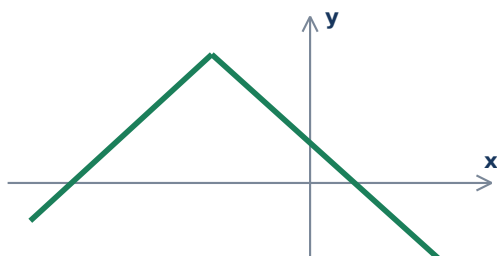
Смоленская область | 2026/27 учебный год | 10 класс
II группа регионов

№	Краткий ответ
1	1-е и 4-е утверждения
2	а) $b=8$; б) $a=4$ или 28
3	$4/19$
4	4 и 244
5	$1/7$
6	а) $1/3$; б) -588
7	35
8	$94/3$ градуса

Ниже приведены подробные решения всех восьми заданий.

Задание 1

Условие. По изображённому графику функции $y=a-|kx+b|$ выбрать возможные знаки параметров a , k , b .



Вершина: $(-b/k, a)$. На рисунке она выше оси Ox и левее оси Oy .

Решение. Максимум функции достигается в вершине перевернутой буквы V. Её координаты равны $(-b/k, a)$. Вершина находится выше оси Ox , поэтому $a > 0$. Она расположена левее оси Oy , значит, $-b/k < 0$, то есть $b/k > 0$. Следовательно, b и k имеют одинаковые знаки. Возможны ровно два сочетания: $k > 0, b > 0$ и $k < 0, b < 0$.

Ответ: $a > 0, k > 0, b > 0$; $a > 0, k < 0, b < 0$ (1-е и 4-е утверждения)

Задание 2

Условие. Числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию, числа b , c , 18 - геометрическую прогрессию, а $a+b+c=24$.

Решение. Для трёх последовательных членов арифметической прогрессии $a+c=2b$. Поэтому $a+b+c=3b=24$ и $b=8$. Для геометрической прогрессии квадрат среднего члена равен произведению крайних: $c^2=b \cdot 18=144$. Значит, $c=12$ или $c=-12$. Из $a=2b-c=16-c$ получаем соответственно $a=4$ или $a=28$. Оба набора действительно удовлетворяют условиям: $(4, 8, 12)$ и $(28, 8, -12)$.

Ответ: а) $b=8$; б) $a=4$ или $a=28$

Задание 3

Условие. На окружности отмечены 20 точек с номерами от 1 до 20. Найти вероятность того, что у случайно выбранного треугольника все вершины имеют номера одной чётности.

Решение. Всего можно выбрать $C(20,3)$ треугольников. Среди номеров есть 10 чётных и 10 нечётных. Подходят треугольники, составленные либо из трёх чётных, либо из трёх нечётных точек, поэтому их число равно $2C(10,3)$. Искомая вероятность равна $2C(10,3)/C(20,3)=2 \cdot 120/1140=4/19$.

Ответ: 4/19

Задание 4

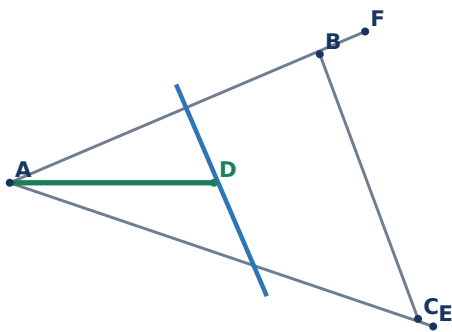
Условие. Найти все натуральные n , для которых $n+12$ и $n+45$ являются точными квадратами.

Решение. Пусть $n+12=x^2$, $n+45=y^2$, где $y>x>0$. Тогда $y^2-x^2=33$, то есть $(y-x)(y+x)=33$. Оба множителя положительны и одной чётности; поскольку 33 нечётно, рассматриваем пары (1,33) и (3,11). Первая даёт $y=17$, $x=16$ и $n=256-12=244$. Вторая даёт $y=7$, $x=4$ и $n=16-12=4$. Проверка: $4+12=16$, $4+45=49$; $244+12=256$, $244+45=289$.

Ответ: 4 и 244

Задание 5

Условие. В треугольнике ABC даны $AB=3$ и $AC=4$. Через точку D на биссектрисе AD проведена прямая, перпендикулярная AD; она пересекает прямые AB и AC в F и E. Найти $EC-FB$.



В координатах с осью AD лучи AB и AC симметричны.

Решение. Направим ось Ox по биссектрисе AD. Лучи AB и AC образуют с ней углы $+\varphi$ и $-\varphi$. По теореме о биссектрисе $BD:DC=AB:AC=3:4$, поэтому $D=(4B+3C)/7$. Если $B=3(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $C=4(\cos\varphi, -\sin\varphi)$, то $D=(24\cos\varphi/7, 0)$. Перпендикуляр к AD через D имеет уравнение $x=24\cos\varphi/7$. Он пересекает оба луча на расстоянии $24/7$ от A, то есть $AF=AE=24/7$. Поэтому $FB=24/7-3=3/7$, а $EC=4-24/7=4/7$. Следовательно, $EC-FB=1/7$.

Ответ: 1/7

Задание 6

Условие. Последовательность задана условиями $a_1=2$, $a_{n+1}=(a_n-1)/(a_n+1)$. Найти a_{2026} и сумму первых 2026 членов.

Решение. Вычислим первые члены: $a_1=2$, $a_2=1/3$, $a_3=-1/2$, $a_4=-3$, $a_5=2$. Далее значения повторяются, значит, период равен 4. Так как $2026=4 \cdot 506+2$, получаем $a_{2026}=a_2=1/3$. Сумма одного периода равна $2+1/3-1/2-3=-7/6$. После 506 полных периодов остаются первые два члена. Поэтому $S_{2026}=506 \cdot (-7/6)+2+1/3=-588$.

Ответ: а) $1/3$; б) -588

Задание 7

Условие. Игроки по очереди выписывают различные делители N , каждый из которых взаимно прост со всеми ранее выписанными. Алиса ходит первой. Для скольких $N \leq 100$ у Маруси есть выигрышная стратегия?

Решение. Пусть N имеет r различных простых делителей. Ход числом больше 1 использует некоторый непустой набор ещё не использованных простых делителей; после этого все эти простые больше нельзя использовать. Число 1 можно выписать один раз независимо от остальных ходов. При $r=1$ у соперника всегда остаётся ровно ответный ход: если первый игрок пишет 1, второй пишет любую положительную степень единственного простого; если первый пишет степень простого, второй пишет 1. После этого ходов нет, поэтому начальная позиция проигрышна для Алисы. При $r \geq 2$ Алиса первым ходом пишет произведение любых $r-1$ различных простых делителей N . Остаются один неиспользованный простой и число 1 - только что рассмотренная проигрышная позиция для следующего игрока. При $r=0$, то есть $N=1$, Алиса сразу пишет 1 и выигрывает. Значит, подходят ровно числа с одним простым делителем, то есть степени одного простого. До 100 имеется 25 простых и ещё 10 составных простых степеней: 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81. Всего 35.

Ответ: 35

Задание 8

Условие. Точки A, B, C, D, E идут с равным шагом по дуге одной окружности. Точки E, F, G, H, I, A идут с равным шагом по дуге окружности с центром C. Известно, что $\angle ABD$ на 12 градусов больше $\angle AHG$. Найти $\angle BAG$.

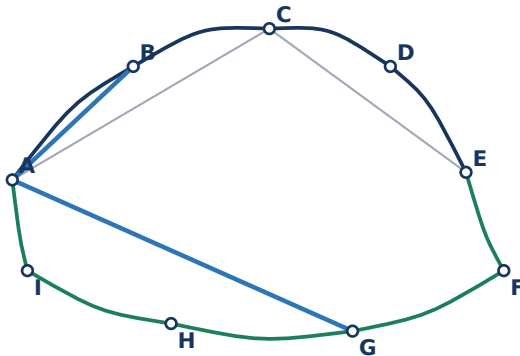


Схема. Шаги дуг обозначены α (A-B-C-D-E) и β (E-F-G-H-I-A).

Решение. Обозначим градусную меру каждого шага первой дуги через α , а второй - через β . Угол ABD опирается на дугу AD, не содержащую B, поэтому $\angle ABD = (360 - 3\alpha)/2 = 180 - 3\alpha/2$. Аналогично, дуга AG, не содержащая H, имеет меру $360 - 3\beta$, следовательно, $\angle AHG = 180 - 3\beta/2$. Из разности углов получаем $(3/2)(\beta - \alpha) = 12$, то есть $\beta - \alpha = 8$. Далее $\angle ACE$ - вписанный угол первой окружности: $\angle ACE = (360 - 4\alpha)/2 = 180 - 2\alpha$. В то же время C - центр второй окружности, а дуга E-F-G-H-I-A имеет меру 5β ; она является дугой EA, не соответствующей углу ACE. Поэтому $5\beta = 360 - \angle ACE = 180 + 2\alpha$. Подставляя $\beta = \alpha + 8$, находим $\alpha = 140/3$ и $\beta = 164/3$. Теперь $\angle BAC = \alpha/2$, а в равнобедренном треугольнике ACG центральный угол $\angle ACG = 3\beta$, поэтому $\angle CAG = (180 - 3\beta)/2$. Луч AC лежит внутри угла BAG, значит, $\angle BAG = \angle BAC + \angle CAG = \alpha/2 + (180 - 3\beta)/2 = 94/3$ градуса.

Ответ: 94/3 градуса (31 1/3 градуса)