ЕГЭ по профильной математике 08.06.2026. Основная волна

Здесь можно скачать актуальную версию файла

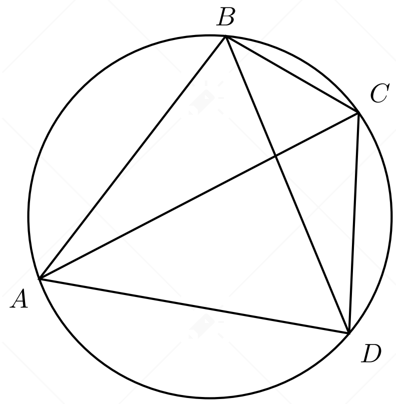
Содержание

Первая часть. Условия

Задачи №1. Условия

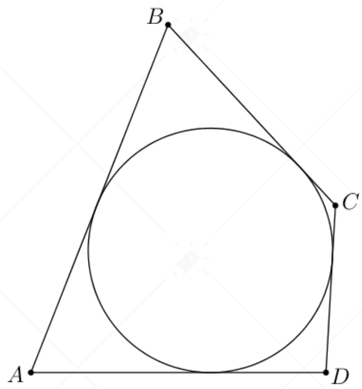
№1.1 (Дальний восток)

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $61°$, угол CAD равен $37°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



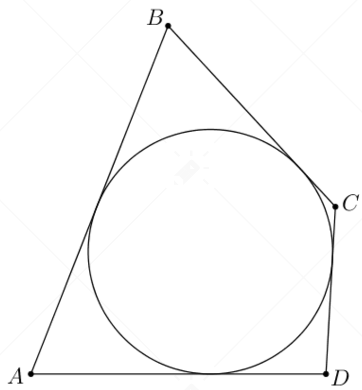
№1.2 (Дальний восток)

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 18$, $CD = 12$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



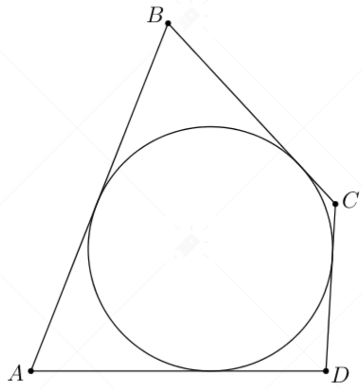
№1.3 (Сибирь)

В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 30, вписана окружность. Известно, что $AB = 9$. Найдите длину стороны CD.



№1.4 (Сибирь)

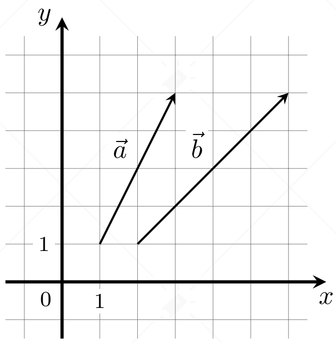
В четырехугольник $ABCD$, периметр которого равен 110, вписана окружность. Известно, что $AB = 36$. Найдите длину стороны CD.



Задачи №2. Условия

№2.1 (Дальний восток)

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№2.2 (Сибирь)

Даны векторы $\vec{a}(1; 5)$ и $\vec{b}(5; -1)$. Найдите длину вектора $5\vec{a} + \vec{b}$.

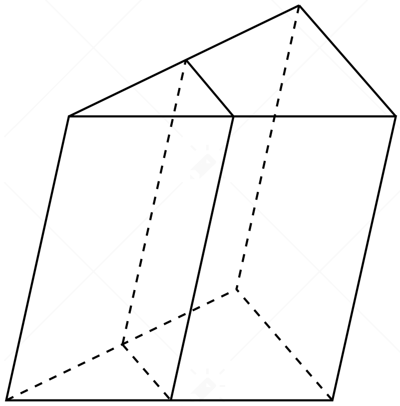
№2.3 (Сибирь)

Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$ и $\vec{b}(2; -1)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} + 2\vec{b}$.

Задачи №3. Условия

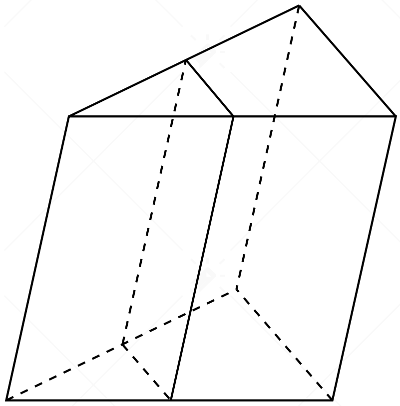
№3.1 (Дальний восток)

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 36. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



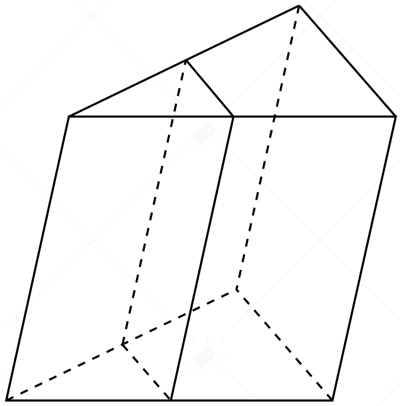
№3.2 (Дальний восток)

Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



№3.3 (Сибирь)

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 36. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Задачи №4. Условия

№4.1 (Дальний восток)

В сборнике билетов по математике всего 75 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Логарифмы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Логарифмы».

№4.2 (Сибирь)

В сборнике билетов по географии всего 50 билетов, в пятнадцати из них встречается вопрос по теме «Страны Африки». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Страны Африки».

№4.3 (Сибирь)

В сборнике билетов по физике всего 60 билетов, в 24 из них встречается вопрос по теме «Оптика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Оптика».

Задачи №5. Условия

№5.1 (Дальний восток)

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

№5.2 (Сибирь)

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,1. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,07. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Задачи №6. Условия

№6.1 (Дальний Восток)

Найдите корень уравнения $\log_5(20 - x) = 2$.

№6.2 (Сибирь)

Решите уравнение $5^{x-11} = \dfrac{1}{25}$.

№6.3 (Сибирь)

Решите уравнение $2^{x-17} = \dfrac{1}{64}$.

№6.4 (Сибирь)

Решите уравнение $3^{x-10} = \dfrac{1}{81}$.

Задачи №7. Условия

№7.1 (Дальний Восток)

Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 136^\circ}{\sin 68^\circ \cdot \sin 22^\circ}$.

№7.2 (Сибирь)

Найдите значение выражения

$$\frac{4\sin 41^\circ \cdot \cos 41^\circ}{\sin 82^\circ}.$$

№7.3 (Сибирь)

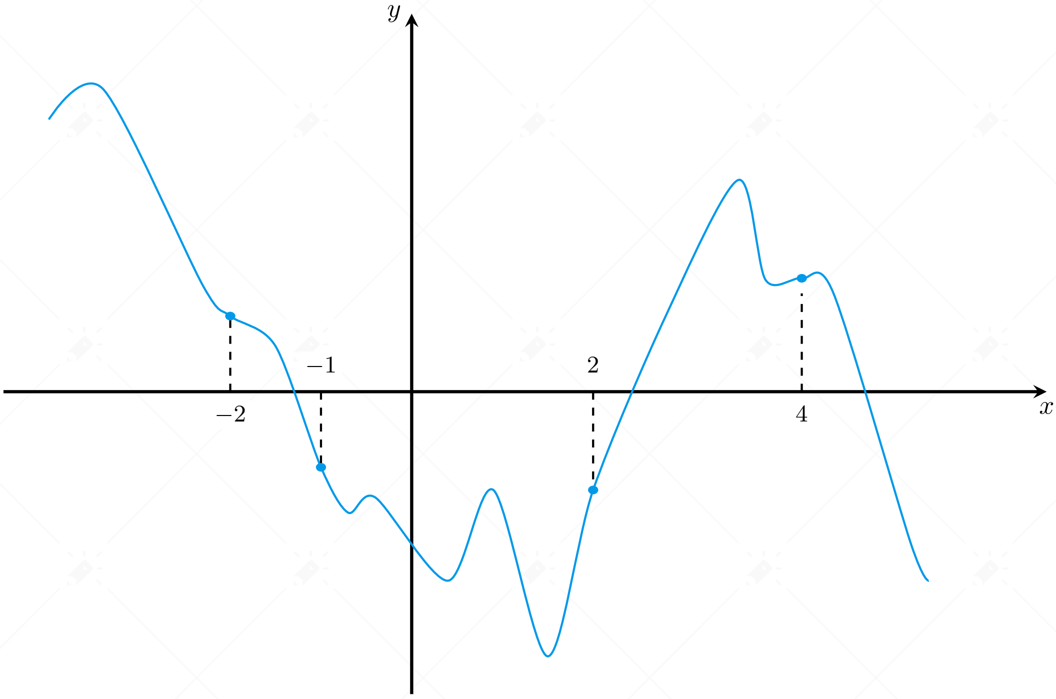
Найдите значение выражения

$$\frac{12\sin 67^\circ \cdot \cos 67^\circ}{\sin 134^\circ}.$$

Задачи №8. Условия

№8.1 (Дальний Восток)

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2,\ -1,\ 2,\ 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Задачи №9. Условия

№9.1 (Дальний Восток)

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 36$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}8$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 84 с. Ответ дайте в киловольтах.

№9.2 (Сибирь)

Водолазный колокол, содержащий $v = 3$ моль воздуха объёмом $V_1 = 16$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа (в Дж), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha v T \log_2 \dfrac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 9{,}9\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа 26730 Дж. Ответ дайте в литрах.

Задачи №10. Условия

№10.1 (Дальний восток)

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 72 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 3 км/ч большей прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько и на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

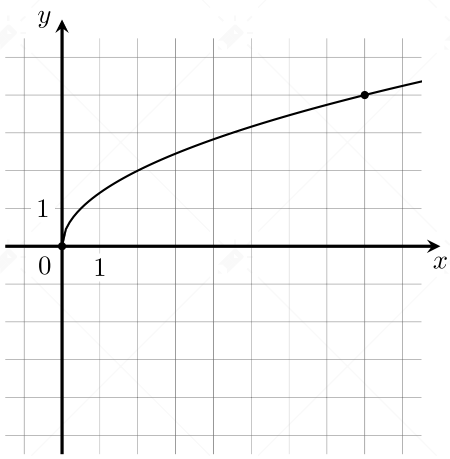
№10.2 (Сибирь)

Два велосипедиста одновременно отправились в 90-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1,5 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Задачи №11. Условия

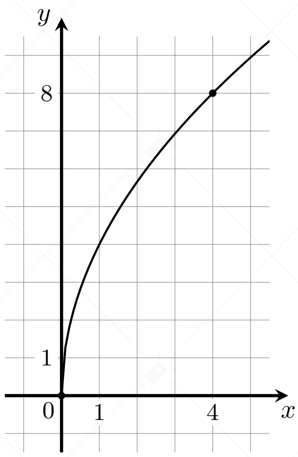
№11.1 (Дальний Восток)

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(32)$.



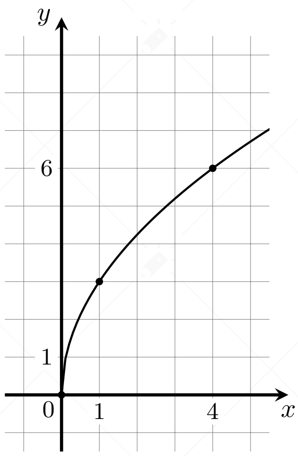
№11.2 (Сибирь)

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение $f(25)$.



№11.3 (Сибирь)

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение $f(49)$.



Задачи №12. Условия

№12.1 (Дальний восток)

Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 17$.

№12.2 (Дальний Восток)

Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 18x + 29$.

№12.3 (Дальний восток)

Найдите точку максимума функции $y = 1 + 12x - x^{\frac{3}{2}}$.

№12.4 (Сибирь)

Найдите точку максимума функции $y = 15 - 24x - x^{\frac{3}{2}}$.

Вторая часть. Условия

Задачи №13. Условия

№13.1 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№13.2 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№13.3 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

№13.4 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

№13.5 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin(\pi-x)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

№13.6 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin(\pi-x)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

№13.7 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin(\pi-x)=0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

№13.8 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sin(\pi+x)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

№13.9 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi+x)=0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№13.10 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Задачи №14. Условия

№14.1 (Дальний восток)

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M – середина SD, точка K – середина SA.
а) Докажите, что прямые BK и CM лежат в одной плоскости α.
б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды равен 60° и $AB = 6$.

№14.2 (Дальний Восток)

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M – середина SD, точка K – середина SA.
а) Докажите, что прямые BK и CM лежат в одной плоскости α.
б) Найдите объем пирамиды $MABF$, если угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды равен 60° и $AB = 8$.

Задачи №15. Условия

№15.1 (Дальний восток)
Решите неравенство
$$3^{\log_3\left(4+x^2\right)}+x^4-10\geqslant 0.$$

№15.2 (Дальний восток)
Решите неравенство
$$5^{\log_5\left(9-x^2\right)}+x^4-29\geqslant 0.$$

№15.3 (Дальний восток)
Решите неравенство
$$2^{\log_2\left(x^2-1\right)}+x^4-5\leqslant 0.$$

№15.4 (Дальний восток)
Решите неравенство
$$3^{\log_3(25-5^x)}+25^x-45\geqslant 0.$$

№15.5 (Сибирь)
Решите неравенство
$$3^{\log_3(2^x-2)}+4^x-18\leqslant 0.$$

№15.6 (Сибирь)
Решите неравенство
$$5^{\log_5\left(x^2-1\right)}+x^4-5\leqslant 0.$$

№15.7 (Сибирь)
Решите неравенство
$$2^{\log_2(3^x-1)}+9^x-11\leqslant 0.$$

№15.8 (Сибирь)
Решите неравенство
$$4^{x^2}-(1-x)^{\frac{x^2-1}{\log_2(1-x)}}\geqslant 0$$

№15.9 (Татарстан)
Решите неравенство
$$\frac{x^2+2x-3}{\log_3\left(8\cdot 2^x\right)}\leqslant 0.$$

№15.10 (Татарстан)
Решите неравенство
$$\frac{x^2+4x-5}{\log_3\left(0{,}2\cdot 5^x\right)}\geqslant 0.$$

Задачи №16. Условия

№16.1 (Дальний Восток)

15 января 2027 года планируется взять кредит в банке на 5 лет. Условия его возврата таковы:
– 1 января каждого года долг увеличивается на 12% по сравнению с концом предыдущего года;
– со 2 по 14 января каждого года необходимо внести один платеж;
– 15 января 2028, 2029, 2031 и 2032 годов долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму по сравнению с долгом на 15 января предыдущего года;
– 15 января 2030 года, то есть после третьего платежа, долг должен стать на 50% меньше, чем 15 января 2029 года;
– к 15 января 2032 года кредит должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма всех выплат составила 4,08 млн рублей. Найдите первоначальную сумму кредита.

№16.2 (Дальний Восток)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 40 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 25% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 61,875 млн рублей. Найдите r.

№16.3 (Сибирь)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 16 млн рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 30% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031 года долг должен быть полностью погашен
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 21,256 млн рублей. Найдите r.

№16.4 (Сибирь)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 5 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 50% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 6,125 млн рублей. Найдите r.

№16.5 (Сибирь)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 12 млн рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 10% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031 года долг должен быть полностью погашен
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 13,626 млн рублей. Найдите r.

№16.6 (Дальний Восток)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 10 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 20% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 12,952 млн рублей. Найдите r.

Задачи №17. Условия

№17.1 (Дальний восток)

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся катетов AC, BC и гипотенузы AB в точках M, E и K соответственно. EH – перпендикуляр из точки E на прямую MK.
а) Докажите, что $EK \parallel CH$.
б) Известно, что $AC = 15$, $BC = 8$. Найти отношение CH к EK.

Задачи №18. Условия

№18.1 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x-2)a^2-(x^3-x^2-4)a+x^4-4x^2=0$$

имеет ровно 2 решения.

№18.2 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)a^2+\left(x^3+x+2\right)a-x^4+x^3+2x^2=0$$

имеет ровно 2 решения.

№18.3 (Сибирь)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)a^2+\left(x^3+2x^2+x\right)a+x^4+2x^3-2x-1=0$$

имеет ровно 2 решения.

Задачи №19. Условия

№19.1 (Дальний восток)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -32. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных – на 8. Известно, что самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 40?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

№19.2 (Сибирь)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -36. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 3, а на всех красных – на 2. Известно, что самое большое число на красной карте равно удвоенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 50?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

№19.3 (Дальний Восток)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -30. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных – на 3. Известно, что самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 40?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

№19.4 (Дальний восток)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -80. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных – чётные числа. Известно, что самое большое число на красной карте равно удвоенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество красных карт быть равным 5?

б) Может ли количество красных карт быть равным 200?

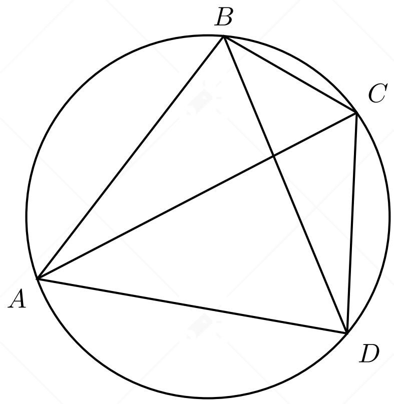
в) Какое наибольшее количество красных карт может быть на столе?

Первая часть. Решения

Задачи №1. Решения

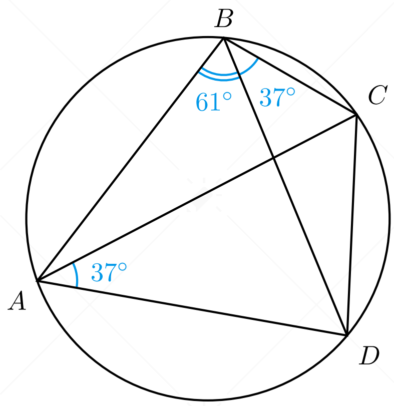
№1.1 (Дальний восток)

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $61°$, угол CAD равен $37°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 98.

Решение. Угол CAD — вписанный, так как его вершина A лежит на окружности. Он опирается на дугу CD. Угол CBD — вписанный, так как его вершина B лежит на окружности. Он опирается на ту же дугу CD.

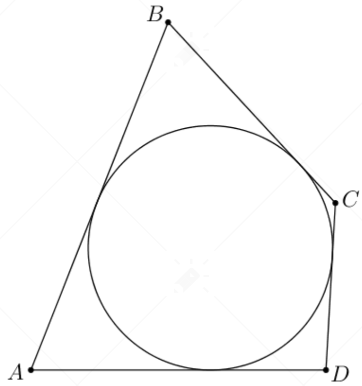


Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Углы CAD и CBD равны, так как опираются на одну дугу CD. Поэтому

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD =$$
$$= \angle ABD + \angle CAD = 61° + 37° = 98°.$$

№1.2 (Дальний восток)

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 18$, $CD = 12$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ: 60.

Решение. По свойству описанного четырехугольника имеем:

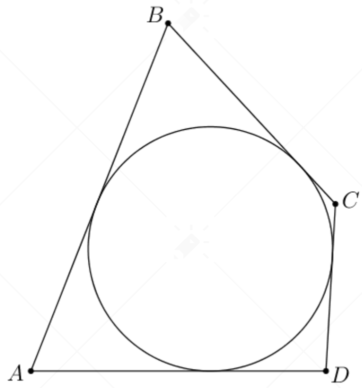
$$AD + BC = AB + CD$$
$$AD + BC = 30$$

Тогда периметр четырехугольника равен

$$P = AD + BC + AB + CD = 30 + 30 = 60$$

№1.3 (Сибирь)

В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 30, вписана окружность. Известно, что $AB = 9$. Найдите длину стороны CD.



Ответ: 6.

Решение. Если окружность вписана в четырехугольник, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.

Значит, для четырехугольника $ABCD$ справедливо равенство:

$$BC + AD = AB + CD.$$

При этом

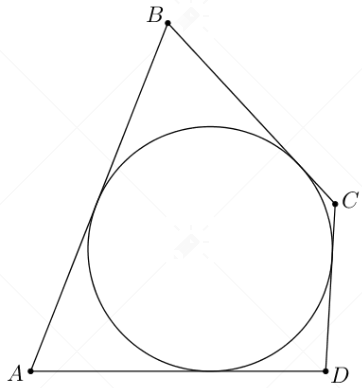
$$P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD =$$
$$= AB + CD + AB + CD = 2\,(AB + CD)\,.$$

Таким образом,

$$P_{ABCD} = 2\,(AB + CD)$$
$$30 = 2(AB + CD)$$
$$AB + CD = 15$$
$$9 + CD = 15$$
$$CD = 6$$

№1.4 (Сибирь)

В четырехугольник $ABCD$, периметр которого равен 110, вписана окружность. Известно, что $AB = 36$. Найдите длину стороны CD.



Ответ: 19.

Решение. Если окружность вписана в четырехугольник, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
Значит, для четырехугольника $ABCD$ справедливо равенство:

$$BC + AD = AB + CD.$$

При этом

$$P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD =$$
$$= AB + CD + AB + CD = 2\left(AB + CD\right).$$

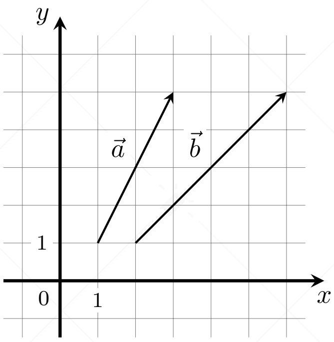
Таким образом,

$$P_{ABCD} = 2\left(AB + CD\right)$$
$$110 = 2(AB + CD)$$
$$AB + CD = 55$$
$$36 + CD = 55$$
$$CD = 19$$

Задачи №2. Решения

№2.1 (Дальний восток)

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$.



Ответ: 10.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \{3-1;\ 5-1\} = \{2;\ 4\};$$
$$\vec{b} = \{6-2;\ 5-1\} = \{4;\ 4\}.$$

Тогда

$$\vec{a}+\vec{b} = \{2+4;\ 4+4\} = \{6;\ 8\}.$$

Следовательно,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{6^2+8^2} = 10.$$

№2.2 (Сибирь)

Даны векторы $\vec{a}(1;5)$ и $\vec{b}(5;-1)$. Найдите длину вектора $5\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: 26.

Решение. Найдем координаты вектора $5\vec{a}+\vec{b}$:

$$5\vec{a}+\vec{b}=\{5\cdot 1+5; 5\cdot 5-1\}=\{10;24\}.$$

Значит, его длина равна

$$\left|5\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{10^2+24^2}=\sqrt{26^2}=26$$

№2.3 (Сибирь)

Даны векторы $\vec{a}(1;2)$ и $\vec{b}(2;-1)$. Найдите длину вектора $4\vec{a}+2\vec{b}$.

Ответ: 10.

Решение. Найдем координаты вектора $4\vec{a}+2\vec{b}$:

$$4\vec{a}+2\vec{b}=\{4\cdot 1+2\cdot 2;4\cdot 2-2\cdot 1\}=\{8;6\}.$$

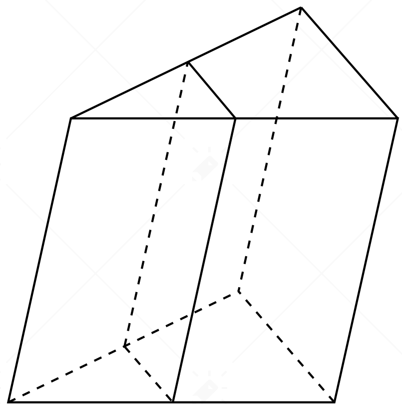
Значит, его длина равна

$$\left|4\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{10^2}=10$$

Задачи №3. Решения

№3.1 (Дальний восток)

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 36. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: 72.

Решение. Обозначим площадь боковой поверхности исходной призмы за $S_{\text{исх.}}$, площадь боковой поверхности отсеченной призмы за $S_{\text{отс.}}$.

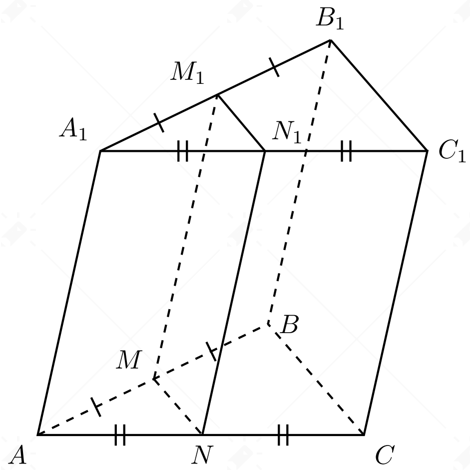
Пусть M, N, M_1 и N_1 — середины ребер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Площадь боковой поверхности исходной призмы равна:

$$S_{\text{исх.}} = S_{A_1B_1BA} + S_{B_1C_1CB} + S_{A_1C_1CA}.$$

Площадь боковой поверхности отсеченной призмы равна:

$$S_{\text{отс.}} = S_{A_1M_1MA} + S_{M_1N_1NM} + S_{A_1N_1NA}.$$



Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то

$$BC = 2MN$$

$$AB = 2AM = 2MB$$

$$AC = 2AN = 2NC.$$

Рассмотрим параллелограммы A_1M_1MA и A_1B_1BA. Их стороны AA_1, BB_1 и MM_1 равны и параллельны. Сторона AM в 2 раза меньше стороны AB и лежит с ней на одной прямой, сторона A_1M_1 в 2 раза меньше стороны A_1B_1 и лежит с ней на одной прямой. Это значит, что параллелограмм A_1B_1BA состоит из двух параллелограммов A_1M_1MA :

$$S_{A_1M_1MA} = \frac{1}{2} S_{A_1B_1BA}.$$

Аналогично параллелограмм A_1C_1CA состоит из двух параллелограммов A_1N_1NA :

$$S_{A_1N_1NA} = \frac{1}{2}S_{A_1C_1CA}.$$

Рассмотрим параллелограммы M_1N_1NM и B_1C_1CB. Их стороны BB_1, CC_1, MM_1 и NN_1 равны и параллельны. Сторона M_1N_1 в 2 раза меньше стороны B_1C_1 и параллельна ей, сторона MN в 2 раза меньше стороны BC и параллельна ей. Это значит, что параллелограмм B_1C_1CB состоит из двух параллелограммов M_1N_1NM :

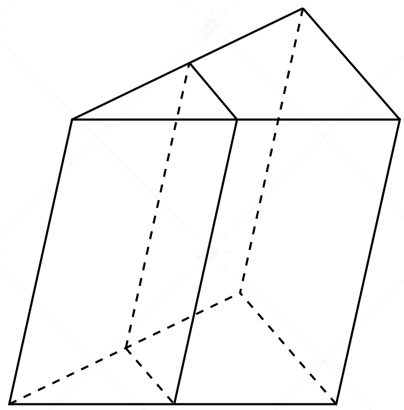
$$S_{M_1N_1NM} = \frac{1}{2}S_{B_1C_1CB}.$$

Найдем площадь боковой поверхности исходной призмы:

$$\begin{gathered} S_{\text{исх.}} = S_{A_1B_1BA} + S_{B_1C_1CB} + S_{A_1C_1CA} = \\ = 2S_{A_1M_1MA} + 2S_{M_1N_1NM} + 2S_{A_1N_1NA} = \\ = 2S_{\text{отс.}} = 2 \cdot 36 = 72. \end{gathered}$$

№3.2 (Дальний восток)

Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: 12.

Решение. Обозначим площадь боковой поверхности исходной призмы за $S_{\text{исх.}}$, площадь боковой поверхности отсеченной призмы за $S_{\text{отс.}}$

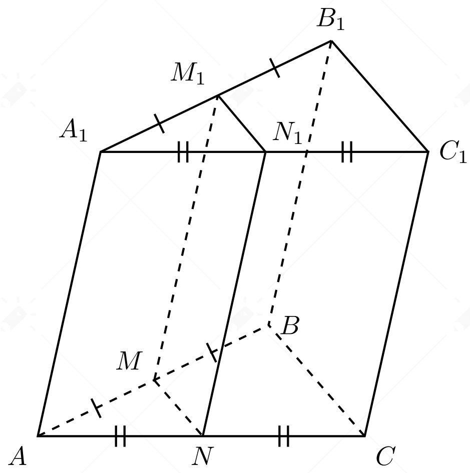
Пусть M, N, M_1 и N_1 — середины ребер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Площадь боковой поверхности исходной призмы равна:

$$S_{\text{исх.}} = S_{A_1B_1BA} + S_{B_1C_1CB} + S_{A_1C_1CA}.$$

Площадь боковой поверхности отсеченной призмы равна:

$$S_{\text{отс.}} = S_{A_1M_1MA} + S_{M_1N_1NM} + S_{A_1N_1NA}.$$



Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то

$$MN = \frac{1}{2}BC$$

$$AM = MB = \frac{1}{2}AB$$

$$AN = NC = \frac{1}{2}AC.$$

Рассмотрим параллелограммы A_1M_1MA и A_1B_1BA. Их стороны AA_1, BB_1 и MM_1 равны и параллельны. Сторона AM в 2 раза меньше стороны AB и лежит с ней на одной прямой, сторона A_1M_1 в 2 раза меньше стороны A_1B_1 и лежит с ней на одной прямой. Это значит, что параллелограмм A_1B_1BA состоит из двух параллелограммов A_1M_1MA :

$$S_{A_1M_1MA} = \frac{1}{2}S_{A_1B_1BA}.$$

Аналогично параллелограмм A_1C_1CA состоит из двух параллелограммов A_1N_1NA :

$$S_{A_1N_1NA} = \frac{1}{2}S_{A_1C_1CA}.$$

Рассмотрим параллелограммы M_1N_1NM и B_1C_1CB. Их стороны BB_1, CC_1, MM_1 и NN_1 равны и параллельны. Сторона M_1N_1 в 2 раза меньше стороны B_1C_1 и параллельна ей, сторона MN в 2 раза меньше стороны BC и параллельна ей. Это значит, что параллелограмм B_1C_1CB состоит из двух параллелограммов M_1N_1NM :

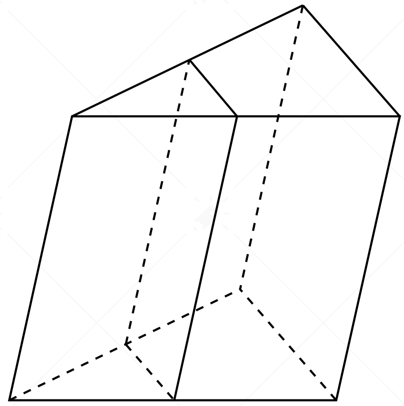
$$S_{M_1N_1NM} = \frac{1}{2}S_{B_1C_1CB}.$$

Найдем площадь боковой поверхности отсеченной призмы:

$$\begin{gathered} S_{\text{отс.}} = S_{A_1M_1MA} + S_{M_1N_1NM} + S_{A_1N_1NA} = \\ = \frac{1}{2}S_{A_1B_1BA} + \frac{1}{2}S_{B_1C_1CB} + \frac{1}{2}S_{A_1C_1CA} = \\ = \frac{1}{2}S_{\text{исх.}} = \frac{24}{2} = 12. \end{gathered}$$

№3.3 (Сибирь)

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 36. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: 72.

Решение. Обозначим площадь боковой поверхности исходной призмы за $S_{\text{исх.}}$, площадь боковой поверхности отсеченной призмы за $S_{\text{отс.}}$.

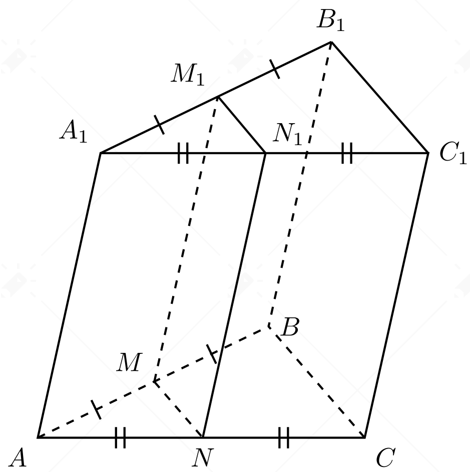
Пусть M, N, M_1 и N_1 — середины ребер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Площадь боковой поверхности исходной призмы равна:

$$S_{\text{исх.}} = S_{A_1B_1BA} + S_{B_1C_1CB} + S_{A_1C_1CA}.$$

Площадь боковой поверхности отсеченной призмы равна:

$$S_{\text{отс.}} = S_{A_1M_1MA} + S_{M_1N_1NM} + S_{A_1N_1NA}.$$



Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то

$$BC = 2MN$$

$$AB = 2AM = 2MB$$

$$AC = 2AN = 2NC.$$

Рассмотрим параллелограммы A_1M_1MA и A_1B_1BA. Их стороны AA_1, BB_1 и MM_1 равны и параллельны. Сторона AM в 2 раза меньше стороны AB и лежит с ней на одной прямой, сторона A_1M_1 в 2 раза меньше стороны A_1B_1 и лежит с ней на одной прямой. Это значит, что параллелограмм A_1B_1BA состоит из двух параллелограммов A_1M_1MA :

$$S_{A_1M_1MA} = \frac{1}{2}S_{A_1B_1BA}.$$

Аналогично параллелограмм A_1C_1CA состоит из двух параллелограммов A_1N_1NA :

$$S_{A_1N_1NA} = \frac{1}{2}S_{A_1C_1CA}.$$

Рассмотрим параллелограммы M_1N_1NM и B_1C_1CB. Их стороны BB_1, CC_1, MM_1 и NN_1 равны и параллельны. Сторона M_1N_1 в 2 раза меньше стороны B_1C_1 и параллельна ей, сторона MN в 2 раза меньше стороны BC и параллельна ей. Это значит, что параллелограмм B_1C_1CB состоит из двух параллелограммов M_1N_1NM :

$$S_{M_1N_1NM} = \frac{1}{2}S_{B_1C_1CB}.$$

Найдем площадь боковой поверхности исходной призмы:

$$\begin{gathered}S_{\text{исх.}} = S_{A_1B_1BA} + S_{B_1C_1CB} + S_{A_1C_1CA} = \\ = 2S_{A_1M_1MA} + 2S_{M_1N_1NM} + 2S_{A_1N_1NA} = \\ = 2S_{\text{отс.}} = 2\cdot 36 = 72.\end{gathered}$$

Задачи №4. Решения

№4.1 (Дальний восток)

В сборнике билетов по математике всего 75 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Логарифмы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Логарифмы».

Ответ: 0,84.

Решение. Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов.
Благоприятные исходы — те, в которых билет не содержит вопроса по теме «Логарифмы». Число таких исходов равно:

$$75 - 12 = 63.$$

Число всех исходов равно общему количеству билетов, то есть 75.
Тогда вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику НЕ достанется вопрос по теме «Логарифмы», равна:

$$p = \frac{63}{75} = \frac{21}{25} = 0{,}84.$$

№4.2 (Сибирь)

В сборнике билетов по географии всего 50 билетов, в пятнадцати из них встречается вопрос по теме «Страны Африки». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Страны Африки».

Ответ: 0,3.

Решение. Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов.
Благоприятные исходы — те, в которых школьнику достанется вопрос по теме «Страны Африки». Число таких исходов равно 15.
Число всех исходов равно общему количеству билетов, то есть 50.
Тогда вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Страны Африки», равна:

$$p = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

№4.3 (Сибирь)

В сборнике билетов по физике всего 60 билетов, в 24 из них встречается вопрос по теме «Оптика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Оптика».

Ответ: 0,4.

Решение. Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов.
Благоприятные исходы — те, в которых билет содержит вопрос по теме «Оптика». Число таких исходов равно 24. Число всех исходов равно общему количеству билетов, то есть 60.
Тогда вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Оптика», равна:

$$p = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Задачи №5. Решения

№5.1 (Дальний восток)

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,1024.

Решение. Вероятность попадания равна 0,8, тогда вероятность промаха равна $1-0{,}8=0{,}2$. Так как нас интересует исход, когда стрелок первые 3 раза попал, а последний раз промахнулся, то искомая вероятность будет равна

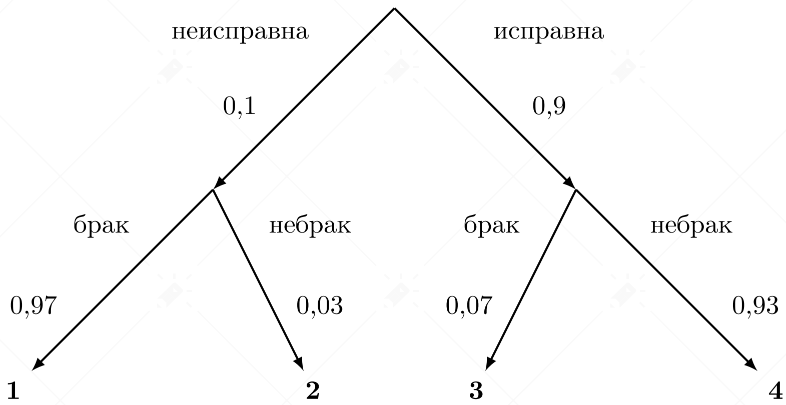
$$0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}1024$$

№5.2 (Сибирь)

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,1. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,07. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: 0,16.

Решение. Нарисуем дерево вероятностей:



Нас интересуют исходы 1 и 3, когда батарейка будет забракована.
Найдем вероятность исхода 1. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках по пути к исходу 1, то есть:

$$P(1) = 0{,}1 \cdot 0{,}97 = 0{,}097.$$

Найдем вероятность исхода 3. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках по пути к исходу 3, то есть:

$$P(3) = 0{,}9 \cdot 0{,}07 = 0{,}063.$$

Тогда вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована, равна сумме вероятностей исходов 1 и 3:

$$P(1 \cup 3) = P(1) + P(3) = 0{,}097 + 0{,}063 = 0{,}16.$$

Задачи №6. Решения

№6.1 (Дальний Восток)

Найдите корень уравнения $\log_5(20-x)=2$.

Ответ: -5.

Решение. Представим 2 как $\log_5 5^2$. Получим:

$$\log_5(20-x)=\log_5 5^2.$$

Перейдем к равенству подлогарифмических выражений, с учетом ограничений логарифма:

$$\begin{cases} 20-x=5^2 \\ 20-x>0 \end{cases}$$

$$20-x=25$$

$$x=20-25$$

$$x=-5.$$

№6.2 (Сибирь)

Решите уравнение $5^{x-11} = \dfrac{1}{25}$.

Ответ: 9.

Решение. По свойствам степени имеем:

$$5^{x-11} = \frac{1}{25}$$
$$5^{x-11} = 5^{-2}$$
$$x - 11 = -2$$
$$x = 9$$

№6.3 (Сибирь)

Решите уравнение $2^{x-17}=\dfrac{1}{64}$.

Ответ: 11.

Решение. По свойствам степени имеем:

$$2^{x-17}=\frac{1}{64}$$
$$2^{x-17}=2^{-6}$$
$$x-17=-6$$
$$x=11$$

№6.4 (Сибирь)

Решите уравнение $3^{x-10} = \frac{1}{81}$.

Ответ: 6.

Решение. По свойствам степени имеем:

$$3^{x-10} = \frac{1}{81}$$
$$3^{x-10} = 3^{-4}$$
$$x - 10 = -4$$
$$x = 6$$

Задачи №7. Решения

№7.1 (Дальний Восток)

Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 136^\circ}{\sin 68^\circ \cdot \sin 22^\circ}$.

Ответ: 4.

Решение. Формула синуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

По формуле приведения:

$$\sin 22^\circ = \sin(90^\circ - 68^\circ) = \cos 68^\circ.$$

Получаем:

$$\frac{2\sin 136^\circ}{\sin 68^\circ \cdot \sin 22^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 136^\circ}{\sin 68^\circ \cdot \cos 68^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 136^\circ}{\frac{1}{2}\sin 136^\circ} = 4.$$

№7.2 (Сибирь)

Найдите значение выражения

$$\frac{4\sin 41^\circ \cdot \cos 41^\circ}{\sin 82^\circ}.$$

Ответ: 2.

Решение. По формуле синуса двойного угла имеем:

$$\frac{4\sin 41^\circ \cdot \cos 41^\circ}{\sin 82^\circ} = \frac{4\sin 41^\circ \cdot \cos 41^\circ}{\sin(2\cdot 41^\circ)} =$$

$$= \frac{4\sin 41^\circ \cdot \cos 41^\circ}{2\sin 41^\circ \cdot \cos 41^\circ} = 2$$

№7.3 (Сибирь)

Найдите значение выражения

$$\frac{12\sin 67^\circ \cdot \cos 67^\circ}{\sin 134^\circ}.$$

Ответ: 6.

Решение. По формуле синуса двойного угла имеем:

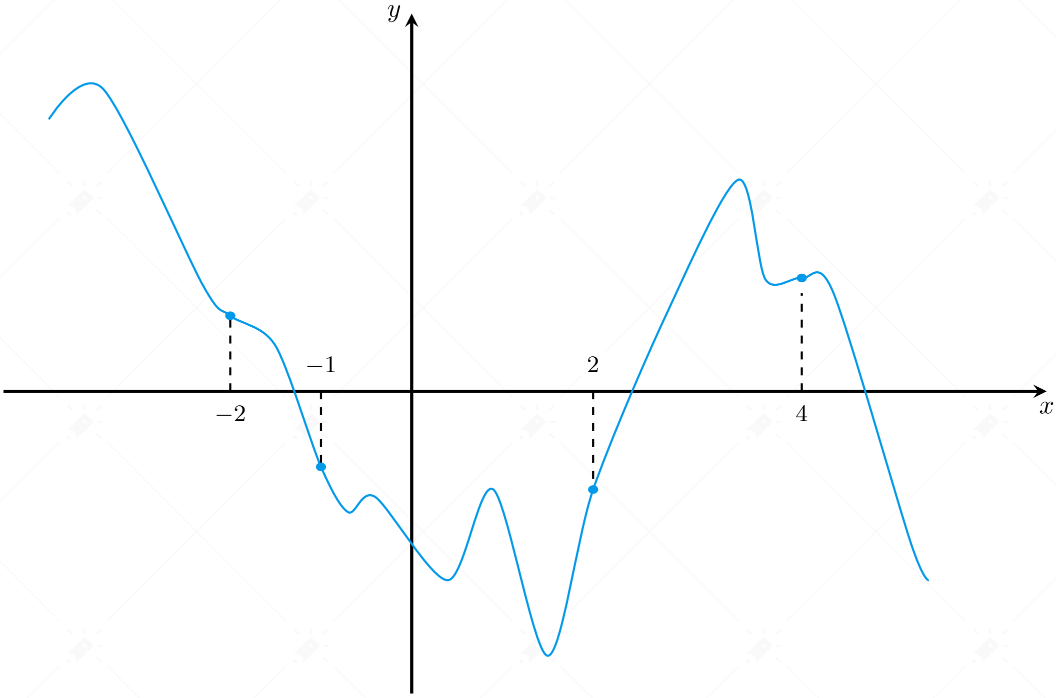
$$\frac{12\sin 67^\circ \cdot \cos 67^\circ}{\sin 134^\circ} = \frac{12\sin 67^\circ \cdot \cos 67^\circ}{\sin(2\cdot 67^\circ)} =$$

$$= \frac{12\sin 67^\circ \cdot \cos 67^\circ}{2\sin 67^\circ \cdot \cos 67^\circ} = 6$$

Задачи №8. Решения

№8.1 (Дальний Восток)

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2,\ -1,\ 2,\ 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: -1.

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Точки $x = 2$ и $x = 4$ принадлежат промежутку возрастания функции, следовательно, угловой коэффициент касательной положителен, то есть производная положительна.

Точки $x = -2$ и $x = -1$ принадлежат промежутку убывания функции, следовательно, угловой коэффициент касательной отрицателен, то есть производная отрицательна.

Заметим, что чем круче угол наклона касательной, тем больше производная по модулю. В точке $x = -1$ наклон круче, чем в точке $x = -2$, значит в этой точке производная по модулю больше.

Таким образом, понятно, что производная в точке $x = -1$ будет наименьшая.

Задачи №9. Решения

№9.1 (Дальний Восток)

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 36$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}8$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 84 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 4,5.

Решение. Подставим известные значения в формулу:

$$84 = 0{,}8 \cdot 7 \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \log_2 \frac{36}{U}$$

$$84 = 4 \cdot 7 \cdot \log_2 \frac{36}{U}$$

$$\log_2 \frac{36}{U} = \frac{84}{4 \cdot 7}$$

$$\log_2 \frac{36}{U} = 3$$

$$\log_2 \frac{36}{U} = \log_2 8$$

$$\frac{36}{U} = 8$$

$$U = 4{,}5.$$

№9.2 (Сибирь)

Водолазный колокол, содержащий $v = 3$ моль воздуха объёмом $V_1 = 16$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа (в Дж), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha v T \log_2 \dfrac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 9{,}9\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа 26730 Дж. Ответ дайте в литрах.

Ответ: 2.

Решение. Подставим известные значения в формулу работы и найдём объём V_2, который будет занимать воздух в колоколе:

$$26730 = 9{,}9 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{16}{V_2}$$

$$26730 = 8910 \cdot \log_2 \frac{16}{V_2}$$

$$\log_2 \frac{16}{V_2} = \frac{26730}{8910}$$

$$\log_2 \frac{16}{V_2} = 3$$

$$\log_2 \frac{16}{V_2} = \log_2 8$$

Перейдём к равенству аргументов логарифмов:

$$\frac{16}{V_2} = 8$$

$$V_2 = 2$$

Таким образом, воздух в колоколе будет занимать объём 2 литра.

Задачи №10. Решения

№10.1 (Дальний восток)

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 72 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 3 км/ч большей прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько и на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12.

Решение. Пусть скорость велосипедиста на пути от города A до города B равна x км/ч, тогда на пути от города B до города A она равна $x + 3$ км/ч, при этом $x > 0$. Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч
От A до B	x	72	$\dfrac{72}{x}$
От B до A	$x+3$	72	$\dfrac{72}{x+3}$

На пути от B до A велосипедист сделал остановку на 2 часа, то есть время в пути от A до B на 2 часа больше времени в пути без остановок от B до A. Составим уравнение:

$$\frac{72}{x} - \frac{72}{x+3} = 2$$
$$\frac{72(x+3) - 72x}{x(x+3)} = 2$$
$$\frac{72x + 72\cdot 3 - 72x}{x(x+3)} = 2$$
$$\frac{72\cdot 3}{x(x+3)} = 2$$

Так как $x > 0$, можем домножить обе части уравнения на $x(x+3)$, получим:

$$72\cdot 3 = 2x(x+3)$$
$$36\cdot 3 = x(x+3)$$
$$108 = x^2 + 3x$$
$$x^2 + 3x - 108 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-108) = 9 + 432 =$$
$$= 441 = 21^2.$$

Тогда корни квадратного уравнения равны:

$$x_1 = \frac{-3+21}{2\cdot 1} = 9 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-3-21}{2\cdot 1} < 0.$$

Так как $x > 0$, то скорость велосипедиста на пути из B в A равна $9 + 3 = 12$ км/ч.

№10.2 (Сибирь)

Два велосипедиста одновременно отправились в 90-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1,5 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 20.

Решение. Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость второго равна $x-5$ км/ч, при этом $x>5$. Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч
Первый велосипедист	x	90	$\dfrac{90}{x}$
Второй велосипедист	$x-5$	90	$\dfrac{90}{x-5}$

Так как первый велосипедист прибыл к финишу на 1,5 часа раньше второго, то второй затратил на пробег на 1,5 часа больше. Составим уравнение:

$$\frac{90}{x-5}-\frac{90}{x}=1{,}5$$

$$\frac{90x-90(x-5)}{x(x-5)}=1{,}5$$

$$\frac{90x-90x+90\cdot 5}{x(x-5)}=1{,}5$$

$$\frac{450}{x(x-5)}=1{,}5$$

$$\frac{450}{x(x-5)}=\frac{3}{2}$$

Так как $x>5$, можем домножить обе части уравнения на $2x(x-5)>0$, получим:

$$900=3x(x-5)$$

$$300=x(x-5)$$

$$300=x^2-5x$$

$$x^2-5x-300=0$$

Найдем дискриминант:

$$D=5^2+4\cdot 300=25+1200=1225=35^2.$$

Тогда корни квадратного уравнения равны:

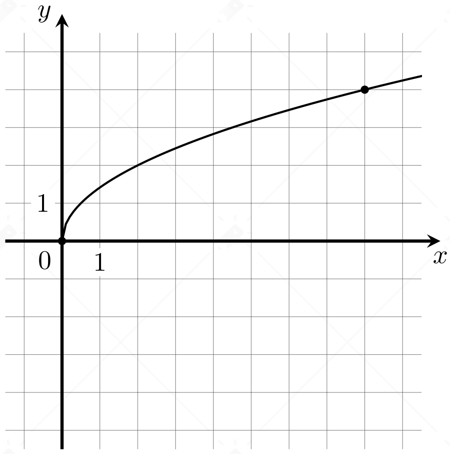
$$x_1=\frac{5+35}{2}=20\quad \text{и}\quad x_2=\frac{5-35}{2}<0.$$

Так как $x>5$, скорость велосипедиста, пришедшего первым, равна 20 км/ч.

Задачи №11. Решения

№11.1 (Дальний Восток)

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(32)$.



Ответ: 8.

Решение. Решим задачу методом подстановки. График функции $f(x) = k\sqrt{x}$ проходит через точку $(8; 4)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнению функции:

$$f(8) = 4.$$

Подставляя $x = 8$, получаем уравнение:

$$k\sqrt{8} = 4.$$

Решим его:

$$k \cdot 2\sqrt{2} = 4, \quad k = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Значит, функция имеет вид

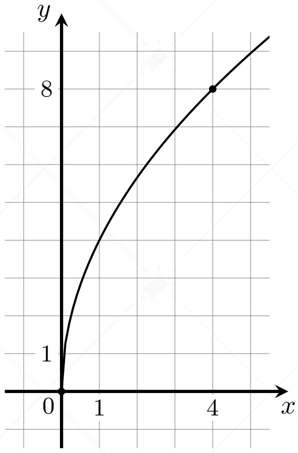
$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}.$$

Тогда

$$f(32) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8.$$

№11.2 (Сибирь)

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение $f(25)$.



Ответ: 20.

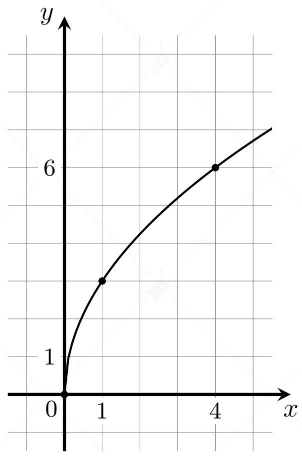
Решение. График функции $f(x)$ проходит через точку $(4; 8)$, следовательно,

$$8 = k\sqrt{4} \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$$

Значит, $f(x) = 4\sqrt{x}$.
Найдем значение $f(25) : f(25) = 4 \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$.

№11.3 (Сибирь)

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение $f(49)$.



Ответ: 21.

Решение. График функции $f(x)$ проходит через точку $(1; 3)$, следовательно,

$$3 = k\sqrt{1} \quad \Leftrightarrow \quad k = 3$$

Значит, $f(x) = 3\sqrt{x}$.
Найдем значение $f(49) : f(49) = 3 \cdot \sqrt{49} = 21$.

Задачи №12. Решения

№12.1 (Дальний восток)

Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 17$.

Ответ: 4.

Решение. Функция определена при всех $x \geqslant 0$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 17\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = 0.$$

Решим полученное уравнение:

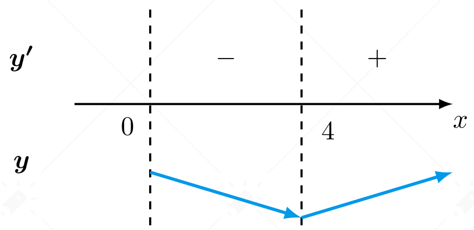
$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$$

$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4.$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков:



При $x \in (0;\ 4)$ производная отрицательна, то есть функция $y = y(x)$ убывает. При $x \in (4;\ +\infty)$ производная положительна, то есть функция возрастает. Следовательно, $x = 4$ является точкой минимума.

№12.2 (Дальний Восток)

Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 18x + 29$.

Ответ: 144.

Решение. Функция определена при всех $x > 0$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 18.$$

Найдем нули производной:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 18 = 0.$$

Решим полученное уравнение:

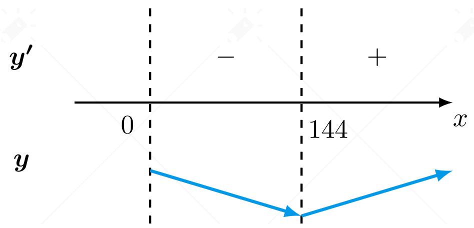
$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 18 = 0$$

$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 18$$

$$\sqrt{x} = 12$$

$$x = 144$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков:



При $x \in (0; 144)$ производная отрицательна, то есть функция $y = y(x)$ убывает. При $x \in (144; +\infty)$ производная положительна, то есть функция возрастает. Следовательно, $x = 144$ является точкой минимума.

№12.3 (Дальний восток)

Найдите точку максимума функции $y = 1 + 12x - x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ: 64.

Решение. Функция определена при всех $x \geqslant 0$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = \left(1 + 12x - x^{\frac{3}{2}}\right)' = 12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Найдем нули производной:

$$y' = 12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Решим полученное уравнение:

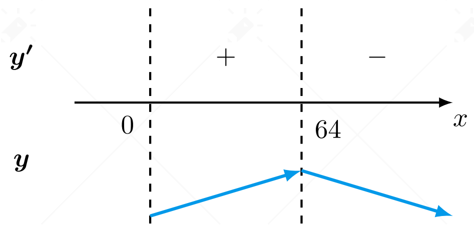
$$12 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 12$$

$$\sqrt{x} = 8$$

$$x = 64.$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков:



При $x \in (0;\ 64)$ производная положительна, то есть функция $y = y(x)$ возрастает. При $x \in (64;\ +\infty)$ производная отрицательна, то есть функция убывает. Следовательно, $x = 64$ является точкой максимума.

№12.4 (Сибирь)

Найдите точку максимума функции $y = 15 - 24x - x^{\frac{3}{2}}$.

Ответ: 0.

Решение. Функция определена при всех $x \geq 0$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = -24 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

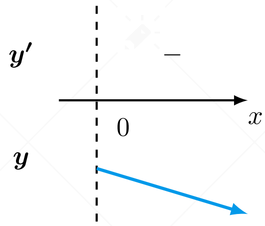
Заметим, что при всех $x \geq 0$

$$x^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \leq 0$$

$$y' = -24 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} < 0$$

Следовательно, на всей области определения функция убывает.



Значит, наибольшее значение функция принимает в левой граничной точке области определения, то есть при $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ является точкой максимума.

Вторая часть. Решения

Задачи №13. Решения

№13.1 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{11\pi}{6};-\dfrac{5\pi}{6}$.

Решение. а) По формуле приведения и формуле косинуса разности:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}.$$

Получаем:

$$2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)-2\cos x=0$$

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x-2\cos x=0$$

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$$

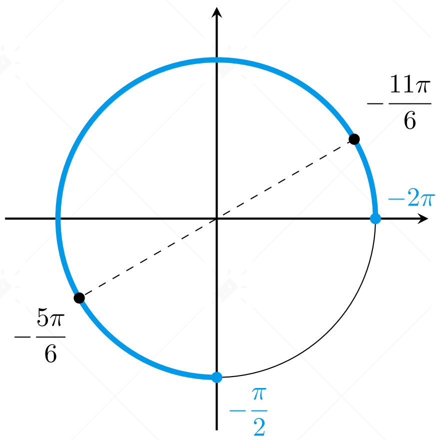
Заметим, что $\cos x\neq 0$, так как тогда $\sin x=0$. Тогда

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{11\pi}{6};-\dfrac{5\pi}{6}$.

№13.2 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой косинуса разности и формулой приведения:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x=0$$

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=0.$$

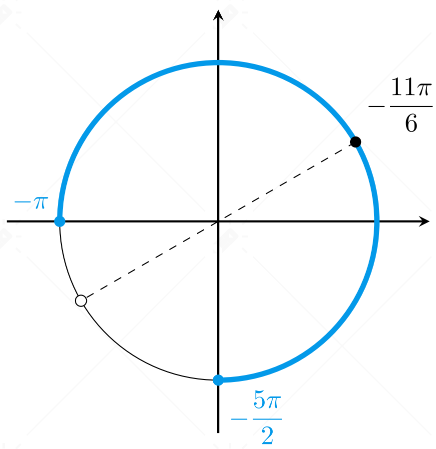
Заметим, что $\cos x\neq 0$, так как тогда $\sin x=0$. Тогда

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$ лежит точка $-\dfrac{11\pi}{6}$.

№13.3 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right].$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{5\pi}{4}.$

Решение. а) По формуле приведения и формуле косинуса разности:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Получаем:

$$2\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\cdot\cos x=0$$

$$2\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\sqrt{2}\cdot\cos x=0$$

$$-\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x=0$$

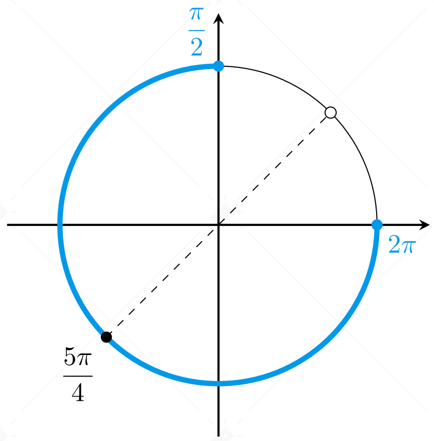
$$\sin x-\cos x=0$$

Заметим, что $\cos x\neq 0$, так как тогда $\sin x=0$. Тогда

$$\operatorname{tg}x=1$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, лежит точка $\dfrac{5\pi}{4}.$

№13.4 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0.$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{11\pi}{3}$.

Решение.

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos x=0$$

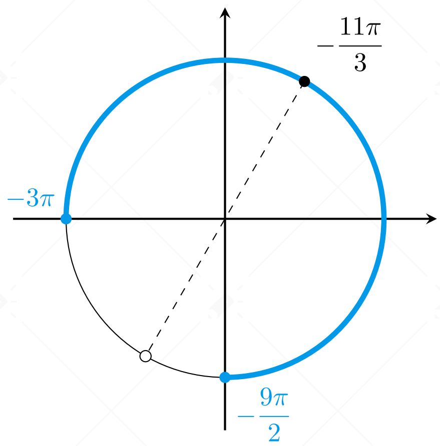
Распишем косинус разности:

$$\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos x=0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$$
$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$$
$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0\ \Big|:\cos x\neq 0$$
$$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$ лежит точка $-\dfrac{11\pi}{3}$.

№13.5 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin(\pi-x)=0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{13\pi}{4}$; $\dfrac{17\pi}{4}$.

Решение.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin(\pi-x)=0$$

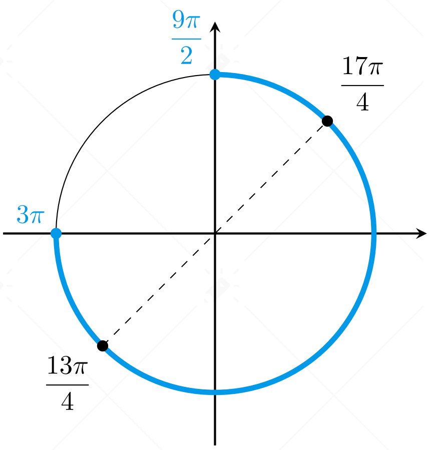
Распишем косинус суммы и применим формулу приведения:

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin x=0$$
$$2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\sqrt{2}\sin x=0$$
$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x=0\ |:\sqrt{2}$$
$$\cos x-\sin x=0\ |:\cos x\neq 0$$
$$1-\operatorname{tg}x=0$$
$$\operatorname{tg}x=1$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{13\pi}{4}$; $\dfrac{17\pi}{4}$.

№13.6 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin(\pi-x)=0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin(\pi-x)=0$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin x=0$$

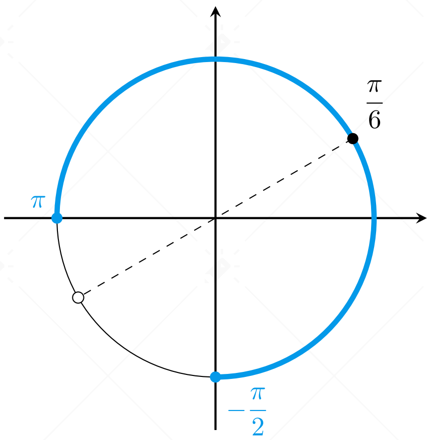
Распишем синус суммы:

$$\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sin x=0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$
$$\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$
$$\cos x-\sqrt{3}\sin x=0\quad\big|:\cos x\neq 0$$
$$1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x=0$$
$$\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ лежит точка $\dfrac{\pi}{6}$.

№13.7 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin(\pi-x)=0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{13\pi}{4};\ \dfrac{17\pi}{4}$.

Решение.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin(\pi-x)=0$$

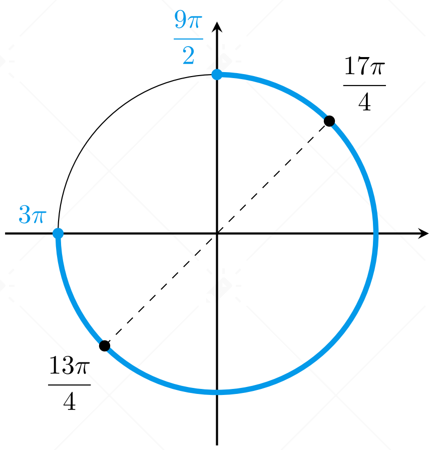
По формуле синуса суммы и по формулам приведения имеем:

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin x=0$$
$$2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\sqrt{2}\sin x=0$$
$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x=0\quad |:\sqrt{2}$$
$$\cos x-\sin x=0\quad |:\cos x\neq 0$$
$$1-\operatorname{tg}x=0$$
$$\operatorname{tg}x=1$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{13\pi}{4};\ \dfrac{17\pi}{4}$.

№13.8 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sin(\pi+x)=0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{15\pi}{4}$.

Решение.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin x=0$$

Распишем синус суммы:

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sin(\pi+x)=0$$

$$2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\sqrt{2}\sin x=0$$

$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x=0\ |:\sqrt{2}$$

$$\cos x-\sin x=0\ |:\cos x\neq 0$$

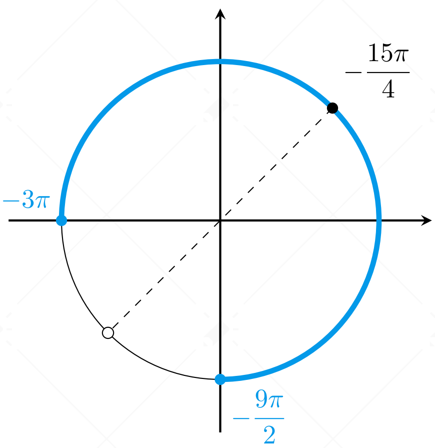
$$1-\operatorname{tg}x=0$$

$$\operatorname{tg}x=1$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$ лежит точка $-\dfrac{15\pi}{4}$

№13.9 (Сибирь)

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi+x)=0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{2}$.

Решение. а)

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi+x)=0$$

По формуле синуса суммы и по формулам приведения имеем:

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=0$$

$$2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sin x=0$$

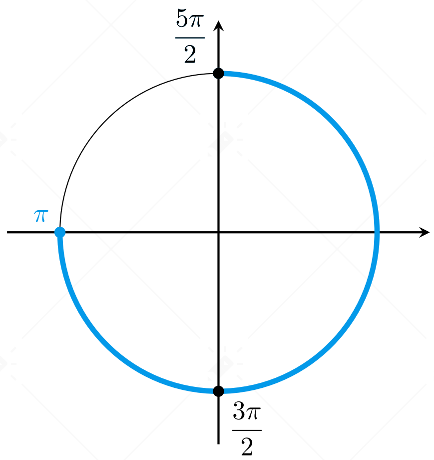
$$\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=0\ \mid :\sqrt{3}$$

$$\cos x=0$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $\dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{2}$.

№13.10 (Дальний Восток)

а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. а) По формуле синуса разности:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}.$$

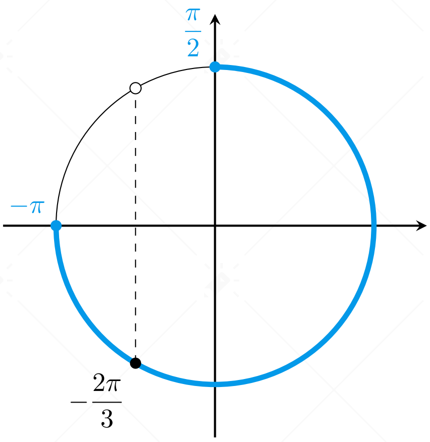
Получаем:

$$2\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$ лежит точка $-\dfrac{2\pi}{3}$

Задачи №14. Решения

№14.1 (Дальний восток)

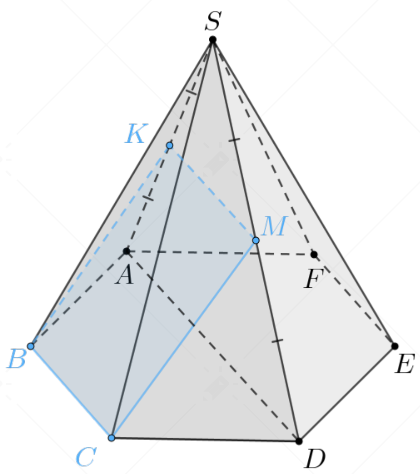
В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M – середина SD, точка K – середина SA.

а) Докажите, что прямые BK и CM лежат в одной плоскости α.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды равен 60° и $AB = 6$.

Ответ: б) 18.

Решение. а) Рассмотрим треугольник SAD. Так как M – середина SD, точка K – середина SA, то MK – средняя линия данного треугольника. Следовательно, $MK \parallel AD$ и $MK = \dfrac{1}{2}AD$.



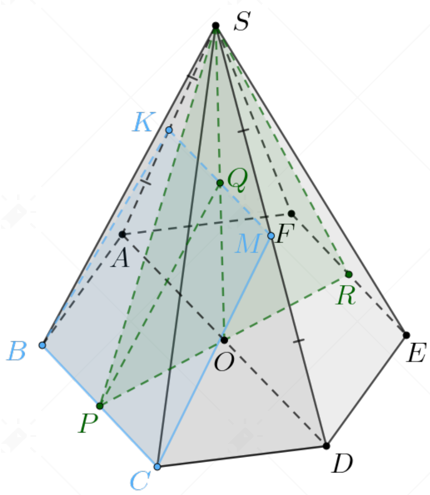
Так как пирамида правильная, $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, значит $AD \parallel CB$ и $CB = \dfrac{1}{2}AD$. Отсюда $MK \parallel CB$ и $MK = CB$, значит $MKBC$ – параллелограмм. Следовательно, $BK \parallel CM$ и лежат в одной плоскости.

б) Пусть P – середина BC, R – середина EF. Так как пирамида правильная, SBC – равнобедренный треугольник, следовательно медиана SP является и высотой: $SP \perp BC$.

Так как $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, то $PR \perp BC$.

Получили, что $BC \perp SP$ и $BC \perp PR$, значит $BC \perp (SPR)$.

При этом PR и AD пересекаются в центре O шестиугольника. Так как пирамида правильная, SO – высота пирамиды.



Высота SO лежит и в плоскости (SPR), и в плоскости (SAD). Пусть KM и SO пересекаются в точке Q. Тогда QP лежит в плоскости (SPR), а значит $QP \perp BC$. Тогда $\angle QPR$ – угол между плоскостями (KBC) и (ABC) по определению. Из условия $\angle QPR = 60^\circ$.

Рассмотрим равносторонний треугольник OBC. В нем OP – высота, значит $OP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = 3\sqrt{3}$.
Тогда в прямоугольном треугольнике QOP :

$$\operatorname{tg}\angle QPO = \frac{QO}{PO}$$

$$\frac{QO}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$QO = 9$$

При этом так как KM – средняя линия SAD, то $SQ = QO$. Значит $SO = 2QO = 18$.

№14.2 (Дальний Восток)

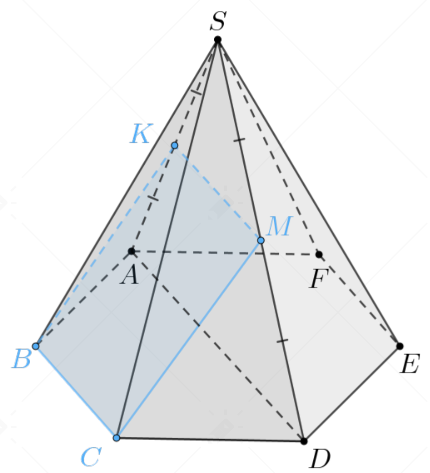
В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M – середина SD, точка K – середина SA.

а) Докажите, что прямые BK и CM лежат в одной плоскости α.

б) Найдите объем пирамиды $MABF$, если угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды равен $60°$ и $AB = 8$.

Ответ: б) $64\sqrt{3}$.

Решение. а) Рассмотрим треугольник SAD. Так как M – середина SD, точка K – середина SA, то MK – средняя линия данного треугольника. Следовательно, $MK \parallel AD$ и $MK = \frac{1}{2}AD$.



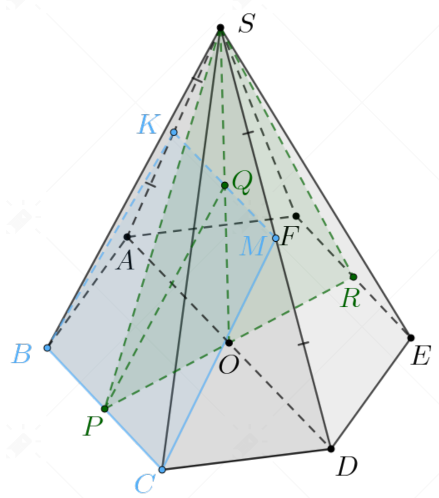
Так как пирамида правильная, то $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, значит, $AD \parallel CB$ и $CB = \frac{1}{2}AD$. Отсюда $MK \parallel CB$ и $MK = CB$, значит, $MKBC$ – параллелограмм. Следовательно, $BK \parallel CM$ и эти прямые лежат в одной плоскости.

б) Пусть P – середина BC, R – середина EF. Так как пирамида правильная, то SBC – равнобедренный треугольник, следовательно, медиана SP является и высотой: $SP \perp BC$.

Так как $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, то $PR \perp BC$.

Получили, что $BC \perp SP$ и $BC \perp PR$, значит, $BC \perp (SPR)$.

При этом PR и AD пересекаются в центре O шестиугольника. Так как пирамида правильная, то SO – высота пирамиды.



Высота SO лежит и в плоскости (SPR), и в плоскости (SAD). Пусть KM и SO пересекаются в точке Q. Тогда QP лежит в плоскости (SPR), а значит, $QP \perp BC$. Тогда $\angle QPR$ – угол между плоскостями (KBC) и (ABC) по определению. Из условия $\angle QPR = 60°$.

Рассмотрим равносторонний треугольник OBC. В нем OP – высота, значит, $OP = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 4\sqrt{3}$.
Тогда в прямоугольном треугольнике QOP :

$$\operatorname{tg}\angle QPO = \frac{QO}{PO}$$

$$\frac{QO}{4\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$QO = 12$$

При этом так как KM – средняя линия треугольника SAD, то $SQ = QO$. Значит, $SO = 2QO = 24$.
Найдем площадь треугольника ABF. Так как $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, то $\angle BAF = 120^\circ$. Тогда имеем:

$$S_{ABF} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AF\cdot \sin\angle BAF$$

$$S_{ABF} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Так как $KM \parallel AD$, то $KM \parallel (ABC)$, значит, высота из точки M на плоскость ABC равна QO.
Следовательно, объем пирамиды $MABF$ равен

$$V_{MABF} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABF}\cdot QO$$

$$V_{MABF} = \frac{1}{3}\cdot 16\sqrt{3}\cdot 12 = 64\sqrt{3}$$

Задачи №15. Решения

№15.1 (Дальний восток)

Решите неравенство

$$3^{\log_3(4+x^2)} + x^4 - 10 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$4 + x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

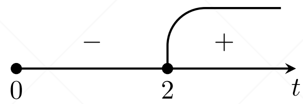
Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма $a^{\log_a b} = b$:

$$4 + x^2 + x^4 - 10 \geqslant 0$$
$$x^4 + x^2 - 6 \geqslant 0$$

Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geqslant 0$:

$$t^2 + t - 6 \geqslant 0$$
$$(t+3)(t-2) \geqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов с учетом того, что $t \geqslant 0$:



Получили $t \in [2; +\infty)$.

Сделаем обратную замену:

$$x^2 \geqslant 2$$
$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$$

№15.2 (Дальний восток)

Решите неравенство

$$5^{\log_5(9-x^2)} + x^4 - 29 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(-3; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; 3\right)$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$9 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-3; 3)$$

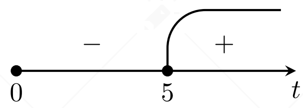
Преобразуем неравенство на ОДЗ, используя свойство логарифма $a^{\log_a b} = b$:

$$9 - x^2 + x^4 - 29 \geqslant 0$$
$$x^4 - x^2 - 20 \geqslant 0$$

Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geqslant 0$:

$$t^2 - t - 20 \geqslant 0$$
$$(t+4)(t-5) \geqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов с учетом того, что $t \geqslant 0$:

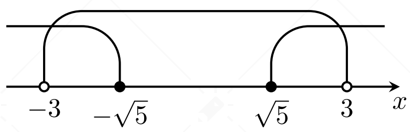


Получили $t \in [5; +\infty)$.

Сделаем обратную замену:

$$x^2 \geqslant 5$$
$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$$

Пересечем с ОДЗ:



Получаем в итоге:

$$x \in \left(-3; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; 3\right)$$

№15.3 (Дальний восток)

Решите неравенство

$$2^{\log_2\left(x^2-1\right)} + x^4 - 5 \leqslant 0.$$

Ответ: $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$x^2 - 1 > 0$$
$$(x-1)(x+1) > 0$$
$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

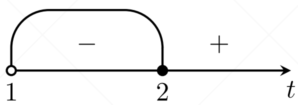
Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма $a^{\log_a b} = b$:

$$x^2 - 1 + x^4 - 5 \leqslant 0$$
$$x^4 + x^2 - 6 \leqslant 0$$

Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geqslant 0$:

$$t^2 + t - 6 \leqslant 0$$
$$(t+3)(t-2) \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов, учитывая, что так как $x^2 - 1 > 0$, то $t > 1$:



Получили $t \in (1; 2]$.

Сделаем обратную замену:

$$1 < x^2 \leqslant 2$$

Это двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \leqslant 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \end{cases}$$

Найдем пересечение полученных промежутков:

$$x \in \left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$$

Заметим, что все полученные x принадлежат ОДЗ.

№15.4 (Дальний восток)

Решите неравенство

$$3^{\log_3(25-5^x)} + 25^x - 45 \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in [1; 2)$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$25 - 5^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x < 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

Преобразуем неравенство на ОДЗ, используя свойство логарифма $a^{\log_a b} = b$:

$$25 - 5^x + 25^x - 45 \geqslant 0$$

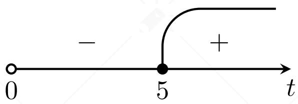
$$(5^x)^2 - 5^x - 20 \geqslant 0$$

Сделаем замену $5^x = t$, $t > 0$:

$$t^2 - t - 20 \geqslant 0$$

$$(t+4)(t-5) \geqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов с учетом того, что $t > 0$:



Получили $t \in [5; +\infty)$.

Сделаем обратную замену:

$$5^x \geqslant 5^1$$

$$x \geqslant 1$$

Пересекая с ОДЗ, получаем в итоге:

$$x \in [1; 2)$$

№15.5 (Сибирь)

Решите неравенство

$$3^{\log_3(2^x-2)}+4^x-18\leqslant 0.$$

Ответ: $(1;2]$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$2^x-2>0$$
$$2^x>2$$
$$x>1$$

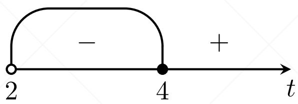
Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма $a^{\log_a b}=b$:

$$2^x-2+4^x-18\leqslant 0$$
$$4^x+2^x-20\leqslant 0$$

Сделаем замену $2^x=t,\ t>0$:

$$t^2+t-20\leqslant 0$$
$$(t+5)(t-4)\leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов с учетом $2^x-2>0$, то есть $t>2$:



Получили $t\in(2;4]$, то есть $2<t\leqslant 4$.
Это двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}2^x>2\\2^x\leqslant 4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x>1\\x\leqslant 2\end{cases}$$

С учетом ОДЗ получаем:

$$x\in(1;2]$$

№15.6 (Сибирь)

Решите неравенство
$$5^{\log_5\left(x^2-1\right)} + x^4 - 5 \leqslant 0.$$

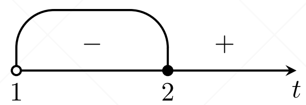
Ответ: $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$.

Решение. Запишем ОДЗ:
$$x^2 - 1 > 0$$
$$(x-1)(x+1) > 0$$
$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма $a^{\log_a b} = b$:
$$x^2 - 1 + x^4 - 5 \leqslant 0$$
$$x^4 + x^2 - 6 \leqslant 0$$

Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geqslant 0$:
$$t^2 + t - 6 \leqslant 0$$
$$(t+3)(t-2) \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов, учитывая, что так как $x^2 - 1 > 0$, то $t > 1$:



Получили $t \in (1; 2]$.

Сделаем обратную замену:
$$1 < x^2 \leqslant 2$$

Это двойное неравенство равносильно системе:
$$\begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \end{cases}$$

Найдем пересечение полученных промежутков:
$$x \in \left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$$

Заметим, что все полученные x принадлежат ОДЗ.

№15.7 (Сибирь)

Решите неравенство

$$2^{\log_2(3^x-1)} + 9^x - 11 \leqslant 0.$$

Ответ: $(0; 1]$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$3^x - 1 > 0$$
$$3^x > 1$$
$$x > 0$$

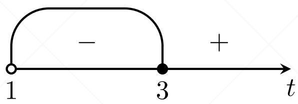
Преобразуем неравенство, используя свойство логарифма $a^{\log_a b} = b$:

$$3^x - 1 + 9^x - 11 \leqslant 0$$
$$9^x + 3^x - 12 \leqslant 0$$

Сделаем замену $3^x = t$, $t > 0$:

$$t^2 + t - 12 \leqslant 0$$
$$(t+4)(t-3) \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов, так как $3^x - 1 > 0$, то $t > 1$:



Получили $t \in (1; 3]$, то есть $1 < t \leqslant 3$.
Это двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 3^x > 1 \\ 3^x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получим:

$$x \in (0; 1]$$

№15.8 (Сибирь)

Решите неравенство

$$4^{x^2}-(1-x)^{\frac{x^2-1}{\log_2(1-x)}}\geqslant 0$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;1)$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases}1-x>0\\ \log_2(1-x)\neq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x<1\\ 1-x\neq 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x<1\\ x\neq 0\end{cases}$$

Преобразуем неравенство на ОДЗ. Так как

$$1-x=2^{\log_2(1-x)},$$

то получаем:

$$4^{x^2}-(1-x)^{\frac{x^2-1}{\log_2(1-x)}}\geqslant 0$$

$$4^{x^2}-\left(2^{\log_2(1-x)}\right)^{\frac{x^2-1}{\log_2(1-x)}}\geqslant 0$$

$$4^{x^2}-2^{x^2-1}\geqslant 0$$

Так как $4^{x^2}=2^{2x^2}$, то получаем:

$$2^{2x^2}-2^{x^2-1}\geqslant 0$$

$$2^{x^2-1}\left(2^{x^2+1}-1\right)\geqslant 0$$

Заметим, что

$$2^{x^2-1}>0$$

$$2^{x^2+1}-1>0,$$

так как $x^2+1>0$.

Значит, неравенство выполняется при всех x из ОДЗ.

С учетом ОДЗ получаем:

$$x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$$

№15.9 (Татарстан)

Решите неравенство

$$\frac{x^2+2x-3}{\log_3(8\cdot 2^x)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;1]$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 8\cdot 2^x > 0, \\ \log_3(8\cdot 2^x) \neq 0 \end{cases}$$

Первое условие выполняется при всех x. Второе равносильно:

$$8\cdot 2^x \neq 1$$
$$2^{x+3} \neq 1$$
$$x \neq -3$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

Преобразуем знаменатель:

$$\log_3(8\cdot 2^x)=\log_3 2^{x+3}=(x+3)\log_3 2$$

Тогда исходное неравенство равносильно

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)\log_3 2} \leqslant 0$$
$$\frac{x-1}{\log_3 2} \leqslant 0$$

при $x \neq -3$.

Так как $\log_3 2 > 0$, получаем

$$x-1 \leqslant 0$$
$$x \leqslant 1$$
$$x \in (-\infty;1]$$

С учетом ОДЗ получим:

$$x \in (-\infty;-3)\cup(-3;1]$$

№15.10 (Татарстан)

Решите неравенство

$$\frac{x^2+4x-5}{\log_3(0{,}2\cdot 5^x)}\geqslant 0.$$

Ответ: $[-5;1)\cup(1;+\infty)$.

Решение. Запишем ОДЗ:

$$0{,}2\cdot 5^x>0,$$
$$\log_3(0{,}2\cdot 5^x)\neq 0$$

Первое условие выполняется при всех x. Второе равносильно:

$$0{,}2\cdot 5^x\neq 1$$
$$\frac{1}{5}\cdot 5^x\neq 1$$
$$5^{x-1}\neq 1$$
$$x\neq 1$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$$

Преобразуем знаменатель:

$$\log_3(0{,}2\cdot 5^x)=\log_3 5^{x-1}=(x-1)\log_3 5$$

Тогда исходное неравенство равносильно

$$\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)\log_3 5}\geqslant 0$$
$$\frac{x+5}{\log_3 5}\geqslant 0$$

при $x\neq 1$.

Так как $\log_3 5>0$, получаем

$$x+5\geqslant 0$$
$$x\geqslant -5$$
$$x\in[-5;+\infty)$$

С учетом ОДЗ получим:

$$x\in[-5;1)\cup(1;+\infty)$$

Задачи №16. Решения

№16.1 (Дальний Восток)

15 января 2027 года планируется взять кредит в банке на 5 лет. Условия его возврата таковы:
– 1 января каждого года долг увеличивается на 12% по сравнению с концом предыдущего года;
– со 2 по 14 января каждого года необходимо внести один платеж;
– 15 января 2028, 2029, 2031 и 2032 годов долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму по сравнению с долгом на 15 января предыдущего года;
– 15 января 2030 года, то есть после третьего платежа, долг должен стать на 50% меньше, чем 15 января 2029 года;
– к 15 января 2032 года кредит должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма всех выплат составила 4,08 млн рублей. Найдите первоначальную сумму кредита.

Ответ: 3 млн рублей.

Решение. Пусть первоначальная сумма кредита равна S млн рублей, а во все годы, за исключением 2030, сумма долга уменьшалась на x млн рублей. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2028	S	$1{,}12S$	$S-x$	$0{,}12S+x$
2029	$S-x$	$1{,}12(S-x)$	$S-2x$	$0{,}12S+0{,}88x$
2030	$S-2x$	$1{,}12(S-2x)$	$0{,}5(S-2x)$	$0{,}62S-1{,}24x$
2031	$0{,}5(S-2x)$	$1{,}12\cdot 0{,}5(S-2x)$	$0{,}5(S-2x)-x$	$0{,}06S+0{,}88x$
2032	$0{,}5(S-2x)-x$	$1{,}12\cdot(0{,}5(S-2x)-x)$	$0{,}5(S-2x)-2x=0$	$0{,}56S-2{,}24x$

Из условия, что к 2032 году долг был выплачен полностью, получаем следующее:

$$0{,}5(S-2x)-2x=0$$
$$S=6x$$

Далее приравняем общую сумму выплат к 4,08 млн и подставим S :

$$(0{,}12S+x)+(0{,}12S+0{,}88x)+(0{,}62S-1{,}24x)+(0{,}06S+0{,}88x)+(0{,}56S-2{,}24x)=4{,}08$$
$$1{,}48S-0{,}72x=4{,}08$$
$$1{,}48\cdot 6x-0{,}72x=4{,}08$$
$$8{,}16x=4{,}08$$
$$x=0{,}5$$

Значит, первоначальная сумма кредита равна $S=6\cdot 0{,}5=3$ млн рублей.

№16.2 (Дальний Восток)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 40 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 25% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 61,875 млн рублей. Найдите r.

Ответ: 20.

Решение. По условию первоначальная сумма кредита равна 40 млн рублей. Так как в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 25% меньше долга на июль предыдущего года, то каждый раз после выплаты долг составляет 75% от долга на июль предыдущего года. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2029	40	$40\left(1+\frac{r}{100}\right)$	30	$10+\frac{r}{100}\cdot 40$
2030	30	$30\left(1+\frac{r}{100}\right)$	22,5	$7{,}5+\frac{r}{100}\cdot 30$
2031	22,5	$22{,}5\left(1+\frac{r}{100}\right)$	16,875	$5{,}625+\frac{r}{100}\cdot 22{,}5$
2032	16,875	$16{,}875\left(1+\frac{r}{100}\right)$	0	$16{,}875+\frac{r}{100}\cdot 16{,}875$

Приравняем сумму выплат (сумма по столбцу «Выплата») к 61,875 млн рублей и найдем r :

$$(10+7{,}5+5{,}625+16{,}875)+\frac{r}{100}(40+30+22{,}5+16{,}875)=61{,}875$$

$$40+\frac{109{,}375r}{100}=61{,}875$$

$$109{,}375r=2187{,}5$$

$$r=20$$

№16.3 (Сибирь)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 16 млн рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 30% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031 года долг должен быть полностью погашен
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 21,256 млн рублей. Найдите r.

Ответ: 15.

Решение. По условию первоначальная сумма кредита равна 16 млн рублей. Так как в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 30% меньше долга на июль предыдущего года, то каждый раз после выплаты долг составляет 70% от долга на июль предыдущего года. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2029	16	$16\left(1+\frac{r}{100}\right)$	11,2	$4{,}8+\frac{r}{100}\cdot 16$
2030	11,2	$11{,}2\left(1+\frac{r}{100}\right)$	7,84	$3{,}36+\frac{r}{100}\cdot 11{,}2$
2031	7,84	$7{,}84\left(1+\frac{r}{100}\right)$	0	$7{,}84+\frac{r}{100}\cdot 7{,}84$

Приравняем сумму выплат (сумма по столбцу «Выплата») к 21,256 млн рублей и найдем r:

$$(4{,}8+3{,}36+7{,}84)+\frac{r}{100}(16+11{,}2+7{,}84)=21{,}256$$

$$16+\frac{35{,}04\,r}{100}=21{,}256$$

$$35{,}04\,r=525{,}6$$

$$r=15$$

№16.4 (Сибирь)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 5 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 50% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 6,125 млн рублей. Найдите r.

Ответ: 12.

Решение. По условию первоначальная сумма кредита равна 5 млн рублей. Так как в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 50% меньше долга на июль предыдущего года, то каждый раз после выплаты долг составляет 50% от долга на июль предыдущего года. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2029	5	$5\left(1+\frac{r}{100}\right)$	2,5	$2{,}5+\frac{r}{100}\cdot 5$
2030	2,5	$2{,}5\left(1+\frac{r}{100}\right)$	1,25	$1{,}25+\frac{r}{100}\cdot 2{,}5$
2031	1,25	$1{,}25\left(1+\frac{r}{100}\right)$	0,625	$0{,}625+\frac{r}{100}\cdot 1{,}25$
2032	0,625	$0{,}625\left(1+\frac{r}{100}\right)$	0	$0{,}625+\frac{r}{100}\cdot 0{,}625$

Приравняем сумму выплат (сумма по столбцу «Выплата») к 6,125 млн рублей и найдем r:

$$(2{,}5+1{,}25+0{,}625+0{,}625)+\frac{r}{100}(5+2{,}5+1{,}25+0{,}625)=6{,}125$$

$$5+\frac{9{,}375\,r}{100}=6{,}125$$

$$9{,}375\,r=112{,}5$$

$$r=12$$

№16.5 (Сибирь)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 12 млн рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 10% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2031 года долг должен быть полностью погашен
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 13,626 млн рублей. Найдите r.

Ответ: 5.

Решение. По условию первоначальная сумма кредита равна 12 млн рублей. Так как в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 10% меньше долга на июль предыдущего года, то каждый раз после выплаты долг составляет 90% от долга на июль предыдущего года. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2029	12	$12\left(1+\frac{r}{100}\right)$	10,8	$1{,}2+\frac{r}{100}\cdot 12$
2030	10,8	$10{,}8\left(1+\frac{r}{100}\right)$	9,72	$1{,}08+\frac{r}{100}\cdot 10{,}8$
2031	9,72	$9{,}72\left(1+\frac{r}{100}\right)$	0	$9{,}72+\frac{r}{100}\cdot 9{,}72$

Приравняем сумму выплат (сумма по столбцу «Выплата») к 13,626 млн рублей и найдем r:

$$(1{,}2+1{,}08+9{,}72)+\frac{r}{100}(12+10{,}8+9{,}72)=13{,}626$$

$$12+\frac{32{,}52\,r}{100}=13{,}626$$

$$32{,}52\,r=162{,}6$$

$$r=5$$

№16.6 (Дальний Восток)

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на 10 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 20% меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен.
Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 12,952 млн рублей. Найдите r.

Ответ: 10.

Решение. По условию первоначальная сумма кредита равна 10 млн рублей. Так как в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 20% меньше долга на июль предыдущего года, то каждый раз после выплаты долг составляет 80% от долга на июль предыдущего года. Составим таблицу:

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2029	10	$10\left(1+\frac{r}{100}\right)$	8	$2+\frac{r}{100}\cdot 10$
2030	8	$8\left(1+\frac{r}{100}\right)$	6,4	$1{,}6+\frac{r}{100}\cdot 8$
2031	6,4	$6{,}4\left(1+\frac{r}{100}\right)$	5,12	$1{,}28+\frac{r}{100}\cdot 6{,}4$
2032	5,12	$5{,}12\left(1+\frac{r}{100}\right)$	0	$5{,}12+\frac{r}{100}\cdot 5{,}12$

Приравняем сумму выплат (сумма по столбцу «Выплата») к 12,952 млн рублей и найдем r :

$$(2+1{,}6+1{,}28+5{,}12)+\frac{r}{100}(10+8+6{,}4+5{,}12)=12{,}952$$

$$10+\frac{29{,}52r}{100}=12{,}952$$

$$29{,}52r=295{,}2$$

$$r=10$$

Задачи №17. Решения

№17.1 (Дальний восток)

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся катетов AC, BC и гипотенузы AB в точках M, E и K соответственно. EH – перпендикуляр из точки E на прямую MK.

а) Докажите, что $EK \parallel CH$.

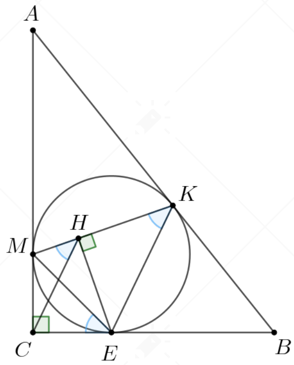
б) Известно, что $AC = 15$, $BC = 8$. Найти отношение CH к EK.

Ответ: б) $\frac{4}{5}$.

Решение. а) Четырехугольник $MCEH$ – вписанный, так как $\angle C + \angle H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Следовательно, $\angle MHC = \angle MEC$.

С другой стороны, $\angle MEC = \angle MKE$ как угол между хордой и касательной и вписанный угол. Получаем, что $\angle MHC = \angle MKC$, а значит, $CH \parallel EK$.



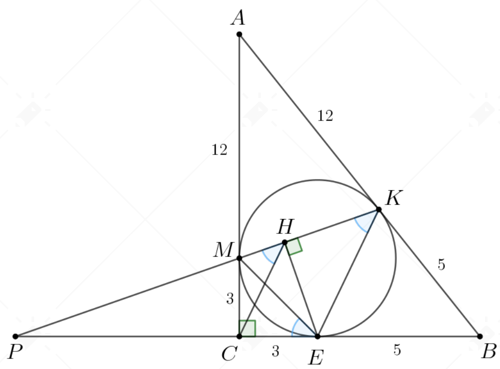
б) По теореме Пифагора гипотенуза $AB = 17$.

Продлим MK и BC до пересечения в точке P. Заметим, что $MC = CE = r$, где r – радиус вписанной окружности. Тогда

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Тогда $EB = KB = 5, MA = AK = 12$.

Рассмотрим теорему Менелая для $\triangle ABC$ и прямой MK :



$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

$$\frac{12}{5} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{12} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{5}{3}$$

Тогда если $PC = 3x$, то $BC = 2x = 8$, откуда $x = 4$ и $PC = 3 \cdot 4 = 12$.

Треугольники $\triangle PCH$ и $\triangle PEK$ подобны по двум углам ($\angle P$ — общий, $\angle PCH = \angle PEK$ из параллельности, доказанной в пункте а)). Тогда

$$\frac{CH}{EK} = \frac{PC}{PE} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Задачи №18. Решения

№18.1 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x-2)a^2-(x^3-x^2-4)a+x^4-4x^2=0$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ: $(-\infty;0)\cup\{4\}$.

Решение.

Разложим на множители:

$$x^3-x^2-4=(x-2)(x^2+x+2),$$
$$x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x-2)(x+2)$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x-2)a^2-(x-2)(x^2+x+2)a+x^2(x-2)(x+2)=0,$$
$$(x-2)\left(a^2-(x^2+x+2)a+x^2(x+2)\right)=0$$

Рассмотрим квадратный относительно a трехчлен

$$a^2-(x^2+x+2)a+x^2(x+2).$$

По теореме Виета его корни a_1, a_2, если они существуют, должны удовлетворять условиям

$$a_1+a_2=x^2+x+2,$$
$$a_1\cdot a_2=x^2(x+2)$$

Заметим, что числа x^2 и $x+2$ как раз имеют такую сумму и такое произведение:

$$x^2+(x+2)=x^2+x+2,$$
$$x^2(x+2)=x^2(x+2)$$

Следовательно, по теореме Виета

$$a_1=x^2,$$
$$a_2=x+2$$

Значит,

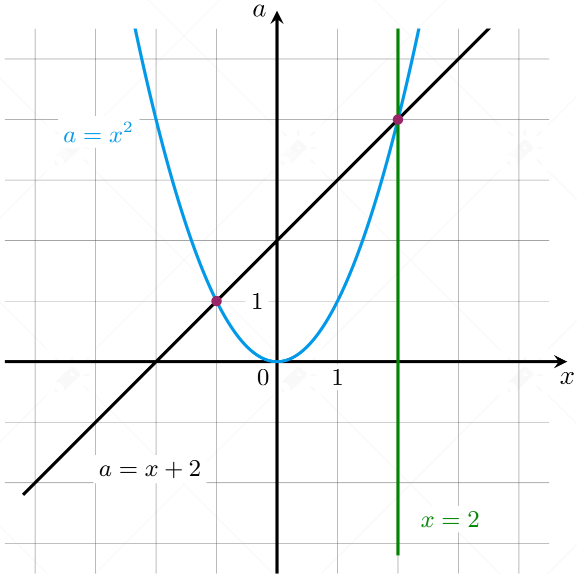
$$a^2-(x^2+x+2)a+x^2(x+2)=(a-x^2)(a-x-2).$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x-2)(a-x^2)(a-x-2)=0.$$

Построим в плоскости xOa графики

$$x=2,\quad a=x^2,\quad a=x+2.$$



Заметим, что все три графика $x = 2$, $a = x^2$, $a = x + 2$ пересекаются в точке $(2; 4)$.
Из рисунка видно, что ровно два различных корня получаются при $a < 0$ и при $a = 4$.
Следовательно,

$$a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}.$$

№18.2 (Дальний Восток)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)a^2+\left(x^3+x+2\right)a-x^4+x^3+2x^2=0$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ: $\{-1\}\cup(0;+\infty)$.

Решение.

Разложим на множители:

$$x^3+x+2=(x+1)\left(x^2-x+2\right),$$
$$-x^4+x^3+2x^2=-x^2\left(x^2-x-2\right)=-x^2(x+1)(x-2)$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x+1)a^2+(x+1)\left(x^2-x+2\right)a-x^2(x+1)(x-2)=0,$$
$$(x+1)\left(a^2+(x^2-x+2)a-x^2(x-2)\right)=0$$

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$a^2+\left(x^2-x+2\right)a-x^2(x-2).$$

По теореме Виета его корни a_1, a_2, если они есть, должны удовлетворять условиям

$$a_1+a_2=-\left(x^2-x+2\right),$$
$$a_1\cdot a_2=-x^2(x-2)$$

Заметим, что числа $-x^2$ и $x-2$ как раз имеют такую сумму и такое произведение:

$$-x^2+(x-2)=-\left(x^2-x+2\right),$$
$$-x^2(x-2)=-x^2(x-2)$$

Следовательно, по теореме Виета

$$a_1=-x^2,$$
$$a_2=x-2$$

Значит,

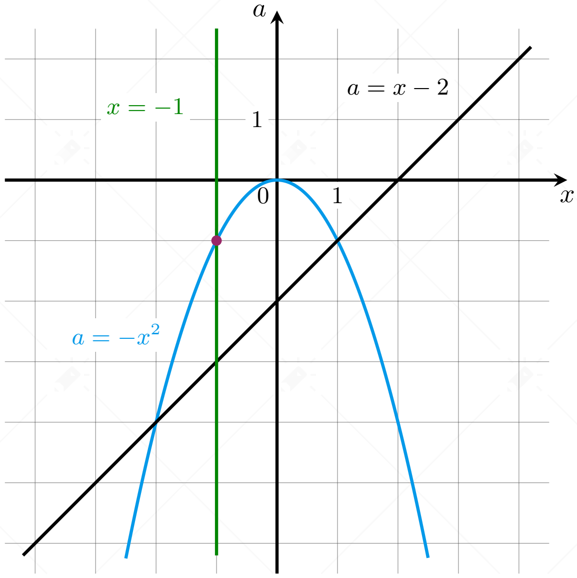
$$a^2+\left(x^2-x+2\right)a-x^2(x-2)=\left(a+x^2\right)(a-x+2).$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x+1)\left(a+x^2\right)(a-x+2)=0.$$

Построим в плоскости xOa графики

$$x=-1,\quad a=-x^2,\quad a=x-2.$$



Из рисунка видно, что ровно два различных корня получаются при $a > 0$ и при $a = -1$.
Следовательно,

$$a \in \{-1\} \cup (0; +\infty).$$

№18.3 (Сибирь)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)a^2+\left(x^3+2x^2+x\right)a+x^4+2x^3-2x-1=0$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ: $\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Решение.

Разложим на множители:

$$x^3+2x^2+x=x(x+1)^2,$$
$$x^4+2x^3-2x-1=(x+1)^3(x-1)$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x+1)a^2+x(x+1)^2a+(x+1)^3(x-1)=0,$$
$$(x+1)\left(a^2+x(x+1)a+(x+1)^2(x-1)\right)=0$$

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$a^2+x(x+1)a+(x+1)^2(x-1).$$

По теореме Виета его корни a_1, a_2 должны удовлетворять условиям

$$a_1+a_2=-x(x+1),$$
$$a_1\cdot a_2=(x+1)^2(x-1)$$

Заметим, что числа $1-x^2$ и $-x-1$ как раз имеют такую сумму и такое произведение:

$$\left(1-x^2\right)+(-x-1)=-x(x+1),$$
$$\left(1-x^2\right)(-x-1)=(x+1)^2(x-1)$$

Следовательно, по теореме Виета

$$a_1=1-x^2,$$
$$a_2=-x-1$$

Значит,

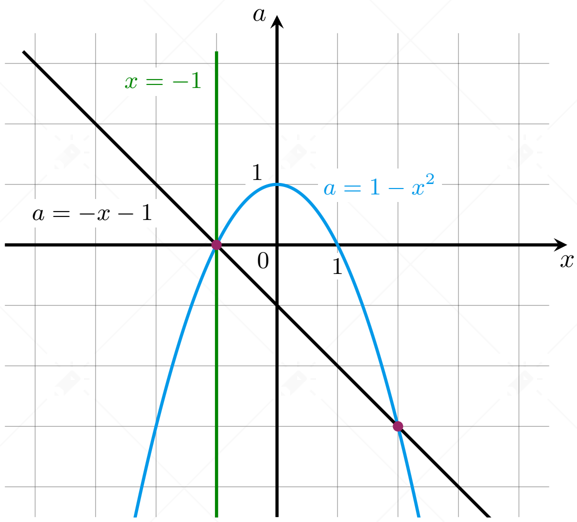
$$a^2+x(x+1)a+(x+1)^2(x-1)=(a+x+1)\left(a+x^2-1\right).$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x+1)(a+x+1)\left(a+x^2-1\right)=0.$$

Построим в плоскости xOa графики

$$x=-1,\quad a=1-x^2,\quad a=-x-1.$$



Из рисунка видно, что ровно два различных корня получаются при $a = 0$ и при $a > 1$.
Следовательно,

$$a \in \{0\} \cup (1; +\infty).$$

Задачи №19. Решения

№19.1 (Дальний восток)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -32. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных – на 8. Известно, что самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 40?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

Ответ: а) Нет

б) Нет

в) 8.

Решение. а) Предположим, что количество синих карт равно 1. Тогда самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, то есть $3 \cdot 1 = 3$.

Но по условию все числа на красных картах делятся на 8. Число 3 не делится на 8. Противоречие. Значит, количество синих карт не может быть равным 1.

б) Пусть синих карт 40, а красных карт r.

Самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, то есть $3 \cdot 40 = 120$. Заметим, что $120 : 8 = 15$, то есть 120 делится на 8, что соответствует условию для красных карт.

Самое большое число на синей карте равно количеству красных карт, то есть r. По условию оно должно делиться на 5, значит, r кратно 5.

Числа на картах одного цвета различны и больше -32.

Синие карты. Имеется 40 синих карт с различными числами, кратными 5, большими -32 и с наибольшим числом r. Наименьшее кратное 5 число, большее -32, — это -30. Чтобы такой набор существовал, количество различных чисел, кратных 5, в промежутке от -30 до r должно быть не меньше 40:

$$\frac{r-(-30)}{5}+1 \geqslant 40$$

$$\frac{r+30}{5}+1 \geqslant 40$$

$$\frac{r+30}{5} \geqslant 39$$

$$r+30 \geqslant 195$$

$$r \geqslant 165.$$

Красные карты. Имеется r красных карт с различными числами, кратными 8, большими -32 и с наибольшим числом 120. Наименьшее кратное 8 число, большее -32, — это -24. Количество различных чисел, кратных 8, в промежутке от -24 до 120:

$$\frac{120-(-24)}{8}+1 = \frac{144}{8}+1 = 18+1 = 19.$$

Значит, красных карт не может быть больше 19. Но из условия для синих карт мы получили $r \geqslant 165$. Противоречие. Следовательно, 40 синих карт быть не может.

в) Пусть s – количество синих карт, r – количество красных карт. Общее количество карт не задано.

Самое большое число на красной карте равно $3s$ и оно должно делиться на 8. Самое большое число на синей карте равно r и оно должно делиться на 5. Числа на картах одного цвета различны и больше -32.

Числа на красных картах кратны 8, различны, больше -32, наибольшее равно $3s$. Наименьшее кратное 8 число, большее -32, – это -24. Количество различных чисел, кратных 8, в промежутке от -24 до $3s$ не может быть меньше r. Всего таких чисел:

$$\frac{3s-(-24)}{8}+1 = \frac{3s+24}{8}+1 = \frac{3s+32}{8}.$$

Так как всего красных карт r, то имеем:

$$r \leqslant \frac{3s+32}{8}.$$

Числа на синих картах кратны 5, различны, больше -32, наибольшее равно r. Наименьшее кратное 5 число, большее -32, – это -30. Количество различных чисел, кратных 5, в промежутке от -30 до r не может быть меньше s. Всего таких чисел:

$$\frac{r-(-30)}{5}+1=\frac{r+30}{5}+1=\frac{r+35}{5}.$$

Так как всего синих карт s, то имеем:

$$s \leqslant \frac{r+35}{5}$$
$$r \geqslant 5s-35.$$

Из двух ограничений получаем:

$$5s-35 \leqslant r \leqslant \frac{3s+32}{8}$$
$$5s-35 \leqslant \frac{3s+32}{8}$$
$$40s-280 \leqslant 3s+32$$
$$37s \leqslant 312$$
$$s \leqslant \frac{312}{37}=8\frac{16}{37}.$$

Так как s – целое, то получаем $s \leqslant 8$.
Пусть $s=8$. Тогда наибольшее число на красной карте равно $3\cdot 8=24$. Заметим, что $24:8=3$, то есть 24 делится на 8, что соответствует условию.
Из неравенства $5s-35 \leqslant r \leqslant \dfrac{3s+32}{8}$ при $s=8$ получаем:

$$5\cdot 8-35 \leqslant r \leqslant \frac{3\cdot 8+32}{8}$$
$$5 \leqslant r \leqslant 7.$$

Кроме того, r должно быть кратно 5. В промежутке от 5 до 7 единственное кратное 5 число – это 5. Значит, $r=5$. Составим подходящий набор карт.

- **Синие карты (8 штук).** Числа кратны 5, различны, больше -32, наибольшее равно 5.

  Это в точности набор $-30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5$.

- **Красные карты (5 штук).** Числа кратны 8, различны, больше -32, наибольшее равно 24. Это в точности набор $24, 16, 8, 0, -8$.

Таким образом, $s=8$ возможно. Следовательно, наибольшее количество синих карт равно 8.

№19.2 (Сибирь)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -36. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 3, а на всех красных – на 2. Известно, что самое большое число на красной карте равно удвоенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 50?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

Ответ: а) Да, может

б) Нет, не может

в) 27.

Решение. а) Пусть на столе лежат 3 красные карточки с числами $-2, 0, 2$ и одна синяя с числом 3.
Тогда все числа на красных карточках чётные, а число, написанное на синей карточке, делится на 3.
Наибольшее число, написанное на красной карточке, равно 2. Этому же значению равно удвоенное количество синих карточек. Наибольшее число, написанное на синей карточке, равно 3. Этому же значению равно количество красных карточек. Таким образом, все условия выполнены.

б) Пусть синих карт 50, а красных карт k.

Самое большое число на красной карте равно удвоенному количеству синих карт, то есть $2 \cdot 50 = 100$. Заметим, что 100 – чётное число, что соответствует условию для красных карт.

Самое большое число на синей карте равно количеству красных карт, то есть k. По условию оно должно делиться на 3, значит, k кратно 3.

Синие карты. Имеется 50 синих карт с различными числами, кратными 3, большими -36, и с наибольшим числом k. Наименьшее кратное 3 число, большее -36, – это -33. Чтобы такой набор существовал, количество различных чисел, кратных 3, в промежутке от -33 до k должно быть не меньше 50:

$$\frac{k-(-33)}{3}+1 \geqslant 50$$

$$\frac{k+33}{3}+1 \geqslant 50$$

$$\frac{k+33}{3} \geqslant 49$$

$$k+33 \geqslant 147$$

$$k \geqslant 114.$$

Красные карты. Имеется k красных карт с различными чётными числами, большими -36, и с наибольшим числом 100. Наименьшее чётное число, большее -36, – это -34. Количество различных чисел, кратных 2, в промежутке от -34 до 100:

$$\frac{100-(-34)}{2}+1 = \frac{134}{2}+1 = 67+1 = 68.$$

Значит, красных карт не может быть больше 68. Но из условия для синих карт мы получили $k \geqslant 114$. Противоречие. Следовательно, 50 синих карт быть не может.

в) Пусть s – количество синих карт, k – количество красных карт.

Самое большое число на красной карте равно $2s$, и оно должно быть чётным. Самое большое число на синей карте равно k, и оно должно делиться на 3. Числа на картах одного цвета различны и больше -36.

Числа на красных картах чётные, различны, больше -36, наибольшее равно $2s$. Наименьшее кратное 2 число, больше -36, – это -34. Количество различных чисел, кратных 2, в промежутке от -34 до $2s$ не может быть меньше k. Всего таких чисел:

$$\frac{2s-(-34)}{2}+1 = \frac{2s+34}{2}+1 = s+18.$$

Так как всего красных карт k, то

$$k \leqslant s+18.$$

Числа на синих картах кратны 3, различны, больше -36, наибольшее равно k. Наименьшее кратное 3 число, больше -36, – это -33. Количество различных чисел, кратных 3, в промежутке от -33 до k не может быть меньше

s. Всего таких чисел:

$$\frac{k-(-33)}{3}+1=\frac{k+33}{3}+1=\frac{k+36}{3}.$$

Так как всего синих карт s, то

$$s \leqslant \frac{k+36}{3}$$
$$k \geqslant 3s-36.$$

Из двух ограничений получаем:

$$3s-36 \leqslant k \leqslant s+18$$
$$3s-36 \leqslant s+18$$
$$2s \leqslant 54$$
$$s \leqslant 27.$$

Пусть $s=27$. Тогда наибольшее число на красной карте равно $2\cdot 27=54$. Заметим, что 54 – чётное число, что соответствует условию.
Из неравенства $3s-36 \leqslant k \leqslant s+18$ при $s=27$ получаем:

$$3\cdot 27-36 \leqslant k \leqslant 27+18$$
$$45 \leqslant k \leqslant 45.$$

Значит, $k=45$.
Составим набор карт:

- **Синие карты (27 штук).** Числа кратны 3, различны, больше -36, наибольшее равно 45. Количество чисел, кратных 3, в промежутке от -33 до 45:

  $$\frac{45-(-33)}{3}+1=\frac{78}{3}+1=26+1=27.$$

  Это в точности набор $-33,-30,-27,\ldots,42,45$.

- **Красные карты (45 штук).** Числа кратны 2, различны, больше -36, наибольшее равно 54. Это в точности набор $-34,-32,-30,\ldots,52,54$.

Таким образом, $s=27$ возможно. Следовательно, наибольшее количество синих карт равно 27.

№19.3 (Дальний Восток)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -30. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных – на 3. Известно, что самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 40?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

Ответ: а) Да, может

б) Нет, не может

в) 10.

Решение. а) Пусть на столе лежат 5 красных карточек с числами $-9, -6, -3, 0, 3$ и одна синяя с числом 5. Тогда все числа на красных карточках делятся на 3, а число, написанное на синей карточке, делится на 5. Наибольшее число, написанное на красной карточке, равно 3. Этому же значению равно утроенное количество синих карточек. Наибольшее число, написанное на синей карточке, равно 5. Этому же значению равно количество красных карточек. Таким образом, все условия выполнены.

б) Пусть синих карт 40, а красных карт r.

Самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, то есть $3 \cdot 40 = 120$. Заметим, что $120 : 3 = 40$, то есть 120 делится на 3, что соответствует условию для красных карт.

Самое большое число на синей карте равно количеству красных карт, то есть r. По условию оно должно делиться на 5, значит, r кратно 5.

Синие карты. Имеется 40 синих карт с различными числами, кратными 5, большими -30 и с наибольшим числом r. Наименьшее кратное 5 число, большее -30, — это -25. Чтобы такой набор существовал, количество различных чисел, кратных 5, в промежутке от -25 до r должно быть не меньше 40:

$$\frac{r-(-25)}{5}+1 \geqslant 40$$
$$\frac{r+25}{5}+1 \geqslant 40$$
$$\frac{r+25}{5} \geqslant 39$$
$$r+25 \geqslant 195$$
$$r \geqslant 170.$$

Красные карты. Имеется r красных карт с различными числами, кратными 3, большими -30, и с наибольшим числом 120. Наименьшее кратное 3 число, большее -30, — это -27. Количество различных чисел, кратных 3, в промежутке от -27 до 120:

$$\frac{120-(-27)}{3}+1 = \frac{147}{3}+1 = 49+1 = 50.$$

Значит, красных карт не может быть больше 50. Но из условия для синих карт мы получили $r \geqslant 170$. Противоречие. Следовательно, 40 синих карт быть не может.

в) Пусть s – количество синих карт, r – количество красных карт.

Самое большое число на красной карте равно $3s$, и оно должно делиться на 3. Самое большое число на синей карте равно r, и оно должно делиться на 5.

Числа на красных картах кратны 3, различны, больше -30, наибольшее равно $3s$. Наименьшее кратное 3 число, большее -30, – это -27. Количество различных чисел, кратных 3, в промежутке от -27 до $3s$ не может быть меньше r. Всего таких чисел:

$$\frac{3s-(-27)}{3}+1 = \frac{3s+27}{3}+1 = s+10.$$

Так как всего красных карт r, то имеем:

$$r \leqslant s+10.$$

Числа на синих картах кратны 5, различны, больше -30, наибольшее равно r. Наименьшее кратное 5 число, большее -30, – это -25. Количество различных чисел, кратных 5, в промежутке от -25 до r не может быть меньше s. Всего таких чисел:

$$\frac{r-(-25)}{5}+1=\frac{r+25}{5}+1=\frac{r+30}{5}.$$

Так как всего синих карт s, то имеем:

$$s \leqslant \frac{r+30}{5}$$
$$r \geqslant 5s-30.$$

Из двух ограничений получаем:

$$5s-30 \leqslant r \leqslant s+10$$
$$5s-30 \leqslant s+10$$
$$4s \leqslant 40$$
$$s \leqslant 10.$$

Пусть $s=10$. Тогда наибольшее число на красной карте равно $3\cdot 10=30$. Заметим, что 30 делится на 3, что соответствует условию.
Из неравенства $5s-30 \leqslant r \leqslant s+10$ при $s=10$ получаем:

$$5\cdot 10-30 \leqslant r \leqslant 10+10$$
$$20 \leqslant r \leqslant 20.$$

Значит, $r=20$.
Составим подходящий набор карт.

- **Синие карты (10 штук).** Числа кратны 5, различны, больше -30, наибольшее равно 20.

  Это в точности набор $-25,-20,-15,-10,-5,0,5,10,15,20$.

- **Красные карты (20 штук).** Числа кратны 3, различны, больше -30, наибольшее равно 30. Количество чисел, кратных 3, в промежутке от -27 до 30:

  $$\frac{30-(-27)}{3}+1=\frac{57}{3}+1=19+1=20.$$

  Это в точности набор $-27,-24,-21,\ldots,24,27,30$.

Таким образом, $s=10$ возможно. Следовательно, наибольшее количество синих карт равно 10.

№19.4 (Дальний восток)

На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее -80. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных – чётные числа. Известно, что самое большое число на красной карте равно удвоенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество красных карт быть равным 5?

б) Может ли количество красных карт быть равным 200?

в) Какое наибольшее количество красных карт может быть на столе?

Ответ: а) Да

б) Нет

в) 70.

Решение. а) Пусть на столе лежат 5 красных карточек с числами $2, 0, -2, -4, -6$ и одна синяя с числом 5. Тогда все числа на красных карточках чётные, а число, написанное на синей карточке, делится на 5. Наибольшее число, написанное на красной карточке, равно 2. Этому же значению равно удвоенное количество синих карточек. Наибольшее число, написанное на синей карточке, равно 5. Этому же значению равно количество красных карточек. Таким образом, все условия выполнены.

б) Пусть красных карточек 200. Тогда наибольшее число на синей карточке равно 200. Заметим, что 200 делится на 5, что соответствует условию.

Пусть синих карточек s. Тогда наибольшее красное число равно $2s$, и оно действительно является чётным.

Числа на картах одного цвета различны и больше -80.

Красные карты. Имеется 200 красных карт с различными чётными числами, большими -80, и с наибольшим числом $2s$. Наименьшее кратное 2 число, большее -80, – это -78. Чтобы такой набор существовал, количество различных чисел, кратных 2, в промежутке от -78 до $2s$ должно быть не меньше 200:

$$\frac{2s-(-78)}{2}+1\geqslant 200$$

$$\frac{2s+78}{2}+1\geqslant 200$$

$$\frac{2s+78}{2}\geqslant 199$$

$$2s+78\geqslant 398$$

$$2s\geqslant 320$$

$$s\geqslant 160.$$

Синие карты. Имеется s синих карт с различными числами, кратными 5, большими -80, и с наибольшим числом 200. Наименьшее кратное 5 число, большее -80, — это -75. Количество различных чисел, кратных 5, в промежутке от -75 до 200:

$$\frac{200-(-75)}{5}+1=\frac{275}{5}+1=55+1=56.$$

Значит, синих карт не может быть больше 56. Но из условия для красных карт мы получили $s\geqslant 160$. Противоречие. Следовательно, 200 красных карт быть не может.

в) Пусть s – количество синих карт, k – количество красных карт.

Самое большое число на красной карте равно $2s$. Самое большое число на синей карте равно k.

Числа на красных картах кратны 2, различны, больше -80, наибольшее равно $2s$. Наименьшее кратное 2 число, большее -80, — это -78. Количество различных чисел, кратных 2, в промежутке от -78 до $2s$ не может быть меньше k. Всего таких чисел:

$$\frac{2s-(-78)}{2}+1=\frac{2s+78}{2}+1=s+40.$$

Так как всего красных карт k, то

$$k\leqslant s+40.$$

Числа на синих картах кратны 5, различны, больше -80, наибольшее равно k. Наименьшее кратное 5 число, большее -80, — это -75. Количество различных чисел, кратных 5, в промежутке от -75 до k не может быть меньше s. Всего таких чисел:

$$\frac{k-(-75)}{5}+1=\frac{k+75}{5}+1=\frac{k+80}{5}.$$

Так как всего синих карт s, то

$$s \leqslant \frac{k+80}{5}$$

$$k \geqslant 5s-80.$$

Из двух ограничений получаем:

$$5s-80 \leqslant k \leqslant s+40$$

$$5s-80 \leqslant s+40$$

$$4s \leqslant 120$$

$$s \leqslant \frac{120}{4}=30.$$

Пусть $s=30$. Тогда наибольшее число на красной карте равно $2\cdot 30=60$.
Из неравенства $5s-80 \leqslant k \leqslant s+40$ при $s=30$ получаем:

$$5\cdot 30-80 \leqslant k \leqslant 30+40$$

$$70 \leqslant k \leqslant 70.$$

Значит, $k=70$.
Составим набор карт:

- **Синие карты (30 штук).** Числа кратны 5, различны, больше -80, наибольшее равно 70. Наименьшее кратное 5 число, большее -80, – это -75. Количество чисел, кратных 5, в промежутке от -75 до 70:

  $$\frac{70-(-75)}{5}+1=\frac{145}{5}+1=29+1=30.$$

  Это в точности набор $-75, -70, -65, \ldots, 65, 70$.

- **Красные карты (70 штук).** Числа чётные, различны, больше -80, наибольшее равно 60. Количество чётных чисел в промежутке от -78 до 60:

  $$\frac{60-(-78)}{2}+1=\frac{138}{2}+1=69+1=70.$$

  Это в точности набор $-78, -76, -74, \ldots, 58, 60$.

Таким образом, $k=70$ возможно. Следовательно, наибольшее количество красных карт равно 70.