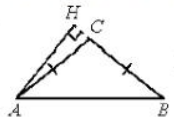
1 В треугольнике ABC AC=BC, AB=20, AH – высота, AH = 8. Найдите синус угла BAC.

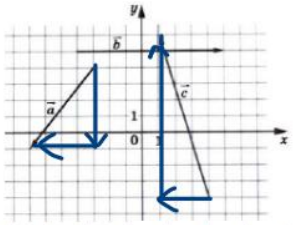


Ответ: 0,4.

$\angle A = \angle B \Rightarrow \sin A = \sin B$

$\sin B = \frac{8}{20} = 0,4$

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$



Ответ: 17.

$+ \vec{a}\{-4; -5\}$

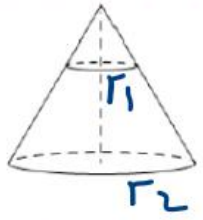
$+ \vec{b}\{9; 0\}$

$- \vec{c}\{-3; 10\}$

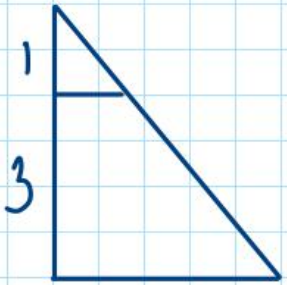
$\{8; -15\}$

$\sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

3 Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 3, считая от вершины. Найдите площадь основания конуса, если площадь сечения конуса этой плоскостью равна 2.



Ответ: 32.



$k = \frac{4}{1}$

$\frac{r_2}{r_1} = k^2$

$\frac{r_2}{2} = \frac{16}{1}$

$r_2 = 32$

4 Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Труд» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Труд» выиграет жребий только один раз

Ответ: 0,5

В В В

В В Р

В Р В

В Р Р ✓

Р Р В ✓

Р В Р ✓

Р Р В ✓

Р Р Р

$\frac{4}{8} = 0,5$

Составитель: Фролов Святослав Николаевич, ссылка на канал: https://vk.com/frolovmath https://t.me/egefrolov

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: 0,0009.

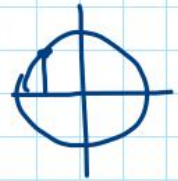
П и Пр и Пр и Пр

$0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,0009$

7 Найдите значение выражения $12\sqrt{2}\cos(-225^\circ)$.

Ответ: −12.

$12\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -12$



6 Найдите корень уравнения $(x+1)^5 = 32$.

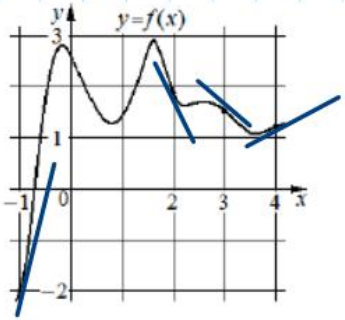
Ответ: 1

$x+1=2$

$x=1$

8 На рисунке изображен график функции y = f(x). На оси абсцисс отмечены точки −1; 2; 3 ; 4. В какой из этих точек значение производной функции f (x) наибольшее? В ответе укажите эту точку

Ответ: −1.



Составитель: Фролов Святослав Николаевич, ссылка на канал: https://vk.com/frolovmath https://t.me/egefrolov

9 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа (Дж), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 18{,}3 \frac{Дж}{моль \cdot K}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм.) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 21960 Дж.

Ответ: 4

$18{,}3 \cdot 2 \cdot 300 \log_2 p_2 = 21960$

$10980 \log_2 p_2 = 21960$

$\log_2 p_2 = 2$

$p_2 = 2^2$

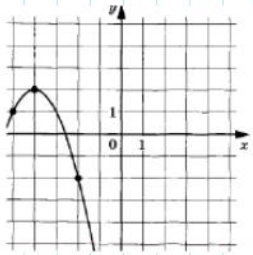
$p_2 = 4$

10 Один мастер может выполнить заказ за 6 часов, а другой за 12 часов. За сколько часов выполняет заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: 4

	v	t	A
I	$\frac{1}{6}$	6	1
II	$\frac{1}{12}$	12	1
I + II	$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$	4	1

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-9)$



Ответ: −23

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$(-2; 2)$, $(-4; 2)$, $(-5; 1)$

$\begin{cases} 4a - 2b + c = 2 \\ 16a - 4b + c = 2 \\ 25a - 5b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ 9a - b = -1 \end{cases}$ | : 3

$-\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 9a - b = -1 \end{cases}$

$-2a = 2$

$a = -1$

$-9 - b = -1$

$b = -8$

$-4 + 16 + c = -2$

$c = -14$

$f(x) = -x^2 - 8x - 14$

$f(-9) = -81 + 72 - 14 = -23$

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 6x - 5$$

на отрезке $[9; 36]$.

Ответ: −77

$y = \frac{2}{3} x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x - 5$

$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 6x - 5$

$y' = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6$

$\sqrt{x} - 6 = 0$

$x = 36$

$y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 - 54 - 5 = -41$

$y(36) = \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 6 - 216 - 5 = -77$

13 а) Решить уравнение

$$2\sin 2x + 2\sin(-x) - 2\cos(-x) + 1 = 0.$$

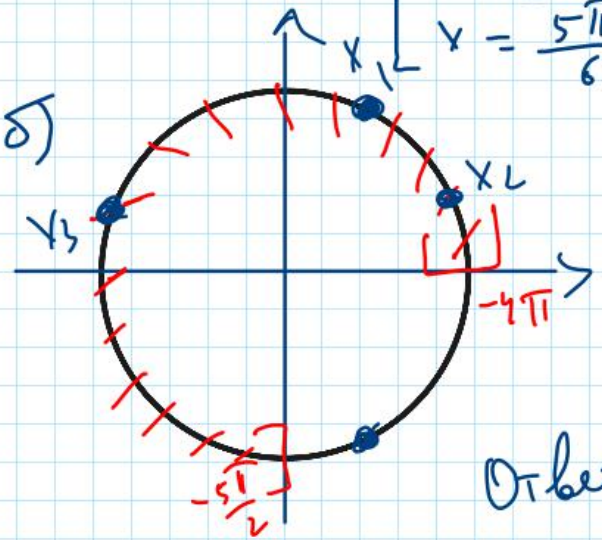
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

а) $4\sin x \cdot \cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0$

$2\sin x(2\cos x - 1) - 1(2\cos x - 1) = 0$

$(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m \end{array}\right.$ $n, k, m \in Z$



б) $x_2 = -4\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{23\pi}{6}$

$x_1 = -4\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{3}$

$x_3 = -4\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{19\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

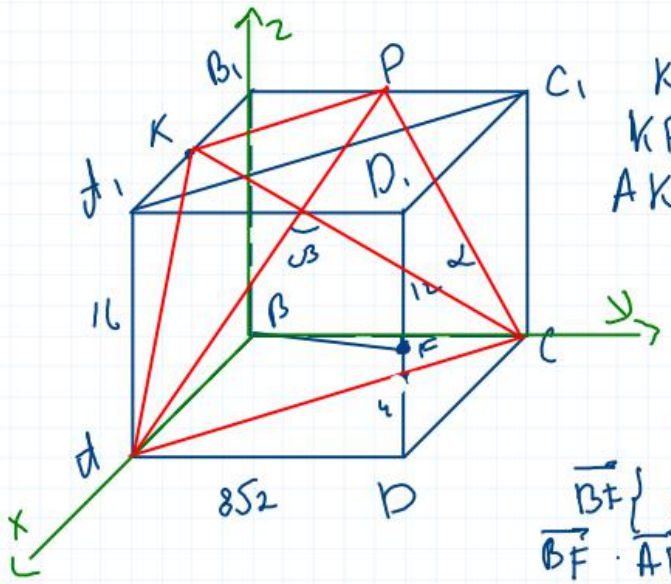
$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m \quad n, k, m \in Z$

б) $-\frac{23\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{3};\ -\frac{19\pi}{6}$

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{2}$, а боковое ребро $AA_1 = 16$. Точка K — середина ребра A_1B_1. На ребре DD_1 отмечена точка F так, что $DF = 4$. Плоскость α параллельна прямой A_1C_1 и содержит точки K и A.

а) Докажите, что прямая BF перпендикулярна плоскости α.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B, а основание — сечение данной призмы плоскостью α.



$KP \parallel A_1C_1$,

$KP \parallel AC$ (нафт. ли трапеции)

$AKPC$ – иск. сечение

сист. коорд:

$B(0;0;0)$ $F(8\sqrt{2};8\sqrt{2};4)$

$A(8\sqrt{2};0;0)$ $C(0;8\sqrt{2};0)$

$K(4\sqrt{2};0;16)$ $P(0;4\sqrt{2};16)$

$\vec{BF}\{8\sqrt{2};8\sqrt{2};4\}$ $\vec{AP}\{-8\sqrt{2};4\sqrt{2};16\}$ $\vec{CK}\{4\sqrt{2};-8\sqrt{2};16\}$

$\vec{BF}\cdot\vec{AP} = -128+64+64=0$

$\vec{BF}\cdot\vec{CK} = 64-128+64=0$

$\vec{BF}\perp AP$; $\vec{BF}\perp CK$, $AP \cap CK$

$BF \perp \alpha$

б) $V = \frac{1}{3} S_{AKPC} \cdot h$

$S_{AKPC} = \frac{1}{2} AP \cdot KC \cdot \sin(\vec{AK};\vec{PC})$

$\cos\beta = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{CK}}{|\vec{AP}|\cdot|\vec{CK}|} = \frac{4}{13}$

$|AP| = |CK| = \sqrt{416}$

$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{16}{169}} = \frac{3\sqrt{17}}{13}$

$S_{AKPC} = \frac{1}{2}\cdot 416 \cdot \frac{3\sqrt{17}}{13} = 48\sqrt{17}$

$V = \frac{1}{3}\cdot 48\sqrt{17}\cdot\frac{32}{\sqrt{17}} = 512$

Ответ: 512

h – ? ур-ние плоскости $ax+by+cz+d=0$

$\vec{BF}$ – нормаль

$8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 4z + d = 0$

$A(8\sqrt{2};0;0)$: $8\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2} + 0 + 0 + d = 0$

$d = -128$

ур-ние пл-ти:

$8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 4z - 128 = 0$

$h = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{32}{\sqrt{17}}$

15 Решите неравенство:

$$\frac{12^x - 4^x \cdot 3}{3^x \cdot x - 3x - 6 \cdot 3^x + 18} \geq \frac{16}{x-6}$$

$$\frac{4^x(3^x - 3)}{3^x(x-6) - 3(x-6)} - \frac{16}{x-6} \geq 0$$

$$\frac{4^x(3^x - 3)}{(3^x - 3)(x-6)} - \frac{16}{x-6} \geq 0 \qquad 3^x - 3 \neq 0, \quad x \neq 1$$

$$\frac{4^x - 16}{x-6} \geq 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x \neq 6 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2] \cup (6; +\infty)$

16 15го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

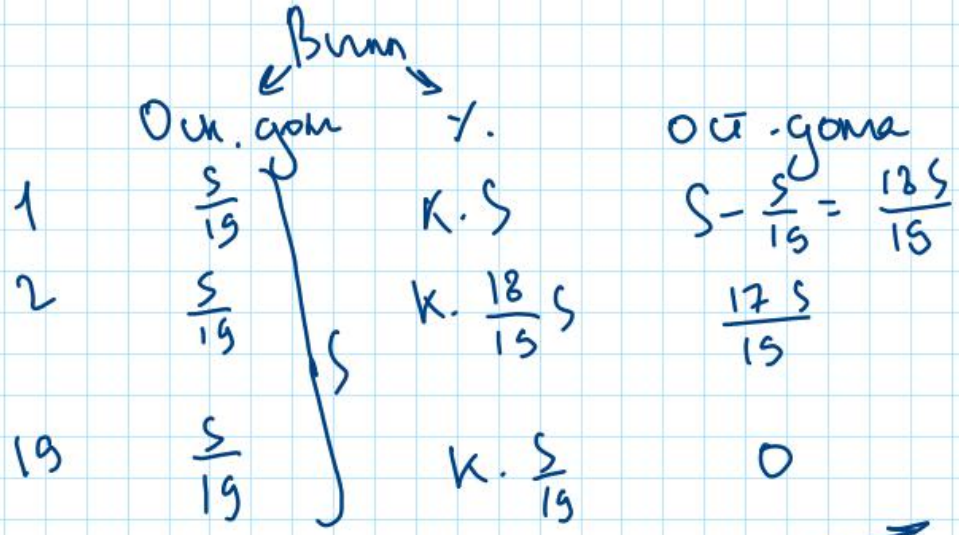
Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредит на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

$n = 19$

$r = ?$ $\quad k = \frac{r}{100}$

$ОСВ = 1{,}3\,S$

$S = ?$ р.



$ОСВ = S + kS\left(1 + \frac{18}{15} + \ldots + \frac{1}{15}\right)$

$\frac{1 + \frac{1}{15}}{2} \cdot 15 = 10$

$S + 10kS = 1{,}3S \mid :S \neq 0$

$1 + 10k = 1{,}3$

$10k = 0{,}3$

$k = 0{,}03 \Rightarrow r = 3$

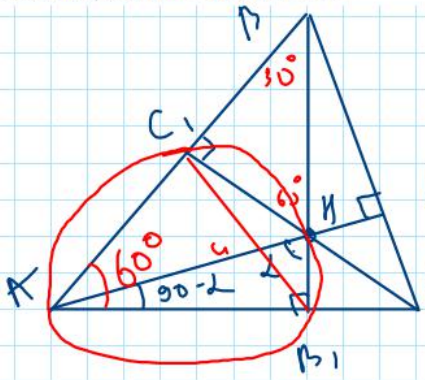
Ответ: 3

17

Высоты $BB1$ и $CC1$ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.



а) $\angle AHB_1 = \alpha$

$\triangle AHB_1$:

$\angle HAB_1 = 180° - 90° - \alpha = 90 - \alpha$

$\triangle AA_1C$:

$\angle C = 180° - (90 - \alpha) - 90° = \alpha$

$\angle AHB_1 = \angle ACB = \alpha$ что и требовалось доказать

б) Т. синусов $\frac{C_1B_1}{\sin BAC} = 2R$

Т.к. $\angle AC_1H = 90°$, AH - диаметр

$C_1B_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (общ. высоты)

$\frac{B_1C_1}{BC} = \cos A$

$\frac{2\sqrt{3}}{BC} = \frac{1}{2}$

$BC = 4\sqrt{3}$ Ответ: $4\sqrt{3}$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+3)x+(a+4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

$a=0$: не подх, т.к. ур-ние будет 1 корень

① $a\neq 0$: $D>0$

$D=4(a+3)^2-4a(a+4)=4a^2+24a+36-4a^2-16a$

$8a+36>0$

② $a>-4{,}5$

$|x_1-x_2|>2 \Rightarrow (x_1-x_2)^2>4$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2>4 \Rightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2>4$

Т. Виета: $x_1x_2=\frac{a+4}{a}$; $x_1+x_2=-\frac{2(a+3)}{a}$

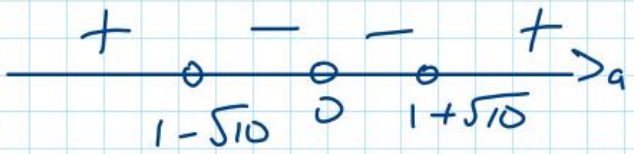
$\left(-\frac{2(a+3)}{a}\right)^2-4\cdot\frac{a+4}{a}>4$ $\quad|\cdot a^2$

$\frac{a^2-2a-9}{a^2}<0$

$\begin{cases} a^2-2a-9=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$ $D=4+36=40$ $\sqrt{D}=2\sqrt{10}$

$a_1=\frac{2+2\sqrt{10}}{2}=1+\sqrt{10}$

$a_2=1-\sqrt{10}$



Ответ: $a\in(1-\sqrt{10};0)\cup(0;1+\sqrt{10})$

19 Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.
а) Является ли множество {100; 101; 102; …; 199} хорошим?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ хорошим?
в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12}?

а) если разбить на два подм-ва
то только одно будет делиться на 101
т.к. 101 п/простое

б) да; $2; 2^{200}; 2^3; 2^{198}; 2^5; 2^{196} \ldots$
$2^2; 2^{199}; 2^4; 2^{197}; 2^6 \ldots$

в) п/-ные м-ва:
$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 =$
$= 3^5 \cdot 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
5, 2, 11 нельзя использовать; т.к
они п/простые

$\{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12\}$:

1) $\{1; 12\}$ и $\{3; 4\}$
$\{9; 9\}$ $\{3; 12\}$

Ответ: 1