

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10 - 0, 8

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Найдите корень уравнения

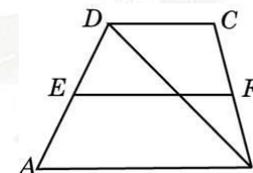
$$3^{\log_9(4x+1)} = 9.$$

Ответ: _____.

2 По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,93. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,94. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Ответ: _____.

3 Основания трапеции равны 2 и 4. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: _____.

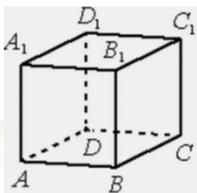


4 Найдите значение выражения

$$\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{8} \cdot \cos \frac{7\pi}{8}.$$

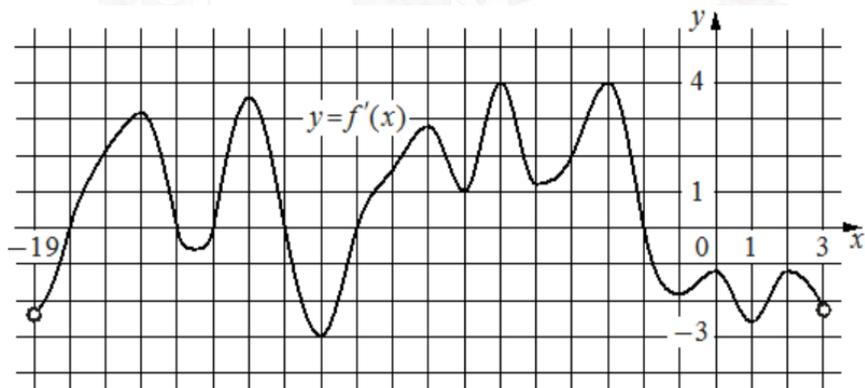
Ответ: _____.

5 В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и AD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; -4]$.



Ответ: _____.

7 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 20$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

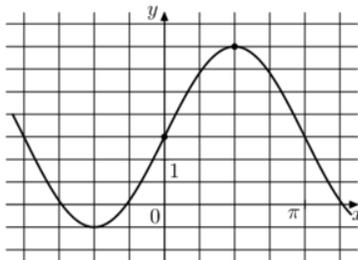
Ответ: _____.

8 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 132 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



- 9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

- 10 В волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью $0,7$ погода завтра будет такой же, как и сегодня. 6 сентября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 9 сентября в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ: _____.

- 11 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 25x - 25 \operatorname{tg} x + 41 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right].$$

- 13 Точка E лежит на высоте SO , а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE:EO = SF:FC = 2:1$.

- а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF , если $AB = 8$, $SO = 14$.

- 14 Решите неравенство

$$\log_2((x-1)(x^2+2)) \leq 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x.$$

- 15 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

vk.com/ege100ballov



16 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
 б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

18 Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k – го. Известно, что $M_1 = 1, M_2 = 2$.

- а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1,6$.
 б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?
 в) Найдите наибольшее возможное значение M_3 .

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_47937899

(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	10 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 98 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) 55 учеников набрали 90-100 баллов на ЕГЭ 2021 Высшее образование (ТГУ, 2009-2014) Победитель трёх олимпиад по высшей математике
Аккаунт и группа ВК:	https://vk.com/eugene10 https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб и инстаграм:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 https://www.instagram.com/shkola_pifagora/



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	20	
2	0,0042	
3	2	
4	-0,5	
5	90	
6	4	
7	24	
8	11	
9	2	
10	0,468	
11	41	
12	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$	
13	$\frac{88\sqrt{2}}{3}$	
14	(1; 2]	
15	12 млн рублей	
16	$2\sqrt{26}$	
17	$(-1; 0) \cup (0; 1]$	
18	а) например, 5; 0; 2; 1; 1; б) нет в) 2,8	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

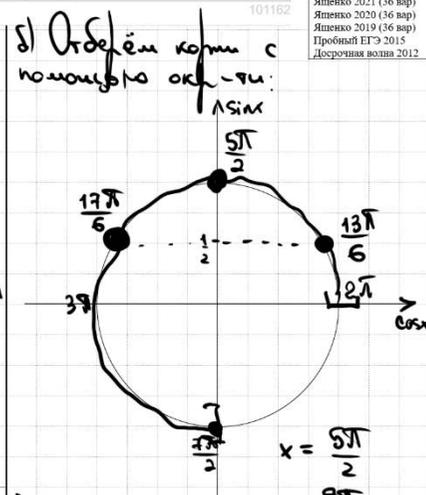
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2021 (36 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Пробный ЕГЭ 2015
 Досрочная волна 2012

а) $5^2 = \cos x - \sin 2x + 25$
 $\cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$
 $\cos x \cdot (1 - 2\sin x) = 0$
 $\cos x = 0$ $1 - 2\sin x = 0$
 $\sin x = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$
 $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:

 $x = \frac{5\pi}{2}$
 $x = \frac{9\pi}{2}$
 $x = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$
 $x = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6}$

ОТВЕТ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

13 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды SABCD, причём SE:EO = SF:FC = 2:1.
 а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.
 б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если AB = 8, SO = 14.

Источники:
 Досрочная волна 2021
СВОЙСТВО МЕДИАНЫ

 Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1 (считая от вершины)
ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

 $S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha}{2}$

Рассмотрим $\triangle BCD$.

 SO — медиана $\triangle SBD$ (т.к. $\triangle SBD$ — р/б)
 $\Rightarrow E$ — точка пересечения медиан
 $\Rightarrow BK$ — медиана
 $\Rightarrow K$ — середина на SD
 а) Построим сечение:
 1) Построим BF
 2) Построим BE
 3) $BE \cap SD = K$
 4) Построим FK
 5) $FE \cap AS = M$
 6) Построим KM
 7) Построим BM
 FKMB — сечение.
 б) 1) $\triangle SEF \sim \triangle SOC$ по 2 углам.
 $\frac{SE}{SO} = \frac{SF}{SC} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sin \alpha$
 $\Rightarrow FE \parallel OC$
 $\Rightarrow FM \parallel AC$
 $\Rightarrow FM = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$
 2) $BK \perp AC$ по свойству пирамиды
 $\Rightarrow BK \perp FM$
ОТВЕТ: $\frac{88\sqrt{2}}{3}$
 3) $SD = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$
 $\cos \angle BKS = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2$
 $BK = \sqrt{5^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 128} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$
 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot 3\sqrt{17} = \frac{88\sqrt{2}}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1



обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство $\log_2((x-1)(x^2+2)) \leq 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x$.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2019
РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ
 $a^2 + 2a + c = a(a-1)(a-2)$

$\log_2((x-1)(x^2+2)) + \log_2 x \leq \log_2 2 + \log_2(x^2+3x-4)$

① $(x-1)(x^2+2) \cdot x \leq 2 \cdot (x^2+3x-4)$ ④ $(x-1)(x+4) > 0$

② $(x-1)(x^2+2) > 0$

③ $x > 0$

⑤ $x^2+3x-4 > 0$

Найдём пересечение:

② $x-1 > 0$
 $x > 1$

③ $x > 0$

ОТВЕТ: $(1; 2]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Источники:
ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Ященко 2018
Досрочная волна 2016

Пусть S - сумма вклада
Дек 21 - месяц, кол-во!
Дек 22 - месяц, пополнение вклада
Дек 23 - месяц, пополнение вклада

Дано: Сумма вклада

1 Дек 21	S
1 Дек 21	$1,1 \cdot S$
1 Дек 22	итого по прошку
1 Дек 22	$1,1^2 \cdot S$
1 Ян 23	$1,1^2 \cdot S + 3$
1 Фев 23	$1,1^3 \cdot S + 3 \cdot 1,1$
1 Мар 23	$1,1^3 \cdot S + 3 \cdot 1,1 + 3$
1 Апр 23	$1,1^4 \cdot S + 3 \cdot 1,1^2 + 3 \cdot 1,1 < 25$

$1,4641 \cdot S + 3 \cdot 1,21 + 3,3 < 25$

$1,4641 \cdot S < 25 - 6,93$

$1,4641 \cdot S < 18,07$

$S < \frac{18,0700}{1,4641}$

$S < \frac{180700}{14641}$

$S < 12 \frac{5008}{14641}$

$\Rightarrow S_{\text{наиб}} = 12$

ОТВЕТ: 12

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

vk.com/ege100ballov

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 21 1213



С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 1, M_2 = 2$.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017
Основная волна 2016

- а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1,6$.
б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?
в) Найдите наибольшее возможное значение M_3 .

а) $M_1 = \frac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{5} = 1 \Rightarrow a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 5$
 $M_2 = \frac{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6}{5} = 2 \Rightarrow a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 10$
 $M_3 = \frac{a_1+a_2+a_4+a_5+a_6}{5} = 1,6 \Rightarrow a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 = 8$

Вопросы: $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 5$
 $a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 10$
 $a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 = 15$

Вопросы: $a_1 - a_3 = 10$
 Это невозможно по усл. задачи

б) С учетом пункта а)
 $a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 \leq 14$
 $\Rightarrow M_{3max} = \frac{14}{5} = 2,8$

5 0 2 1 1 1
 9 4 0 0 0 1

ОТВЕТ: а) 5 0 2 1 1 1
 б) нет
 в) 2,8

– искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б;	1

