8 класс

Задача 8.1. На клавиатуре компьютера Пети *неисправна* одна клавиша с некоторой цифрой (все остальные клавиши работают хорошо). Неисправная клавиша срабатывает только на каждое второе нажатие. Например, в случае неисправной клавиши «2» при вводе числа 12125252 получится число 112552.

Петя попробовал ввести 10-значное число, но на экране появилось 7-значное число

$$7479189.$$

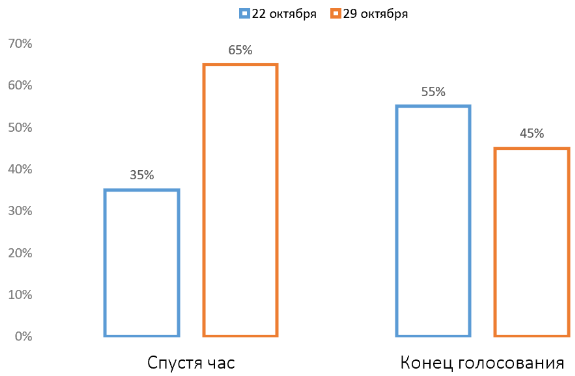
Клавиша с какой цифрой могла быть неисправна? Укажите все возможные варианты.

Задача 8.2. В чате учеников одной из школ проходило голосование: «В какой день проводить дискотеку: 22 или 29 октября?»

На графике изображено, как голоса распределились спустя час после начала голосования.

Затем в голосовании приняли участие ещё 80 человек, которые голосовали только за 22 октября. После этого голосование завершилось. Итоговое распределение голосов также изображено на графике.

Сколько человек приняли участие в голосовании?



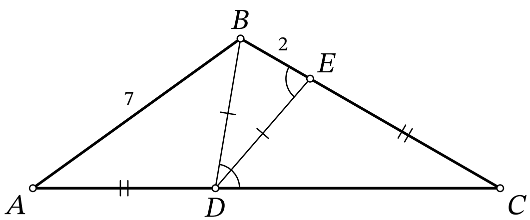
Задача 8.3. В классе учатся 29 школьников: несколько отличников и несколько хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Все ученики этого класса сели за круглый стол.

- Несколько учеников сказали: «Рядом со мной ровно один хулиган».
- Все остальные ученики сказали: «Рядом со мной ровно два хулигана».

Какое наименьшее количество хулиганов может быть в классе?

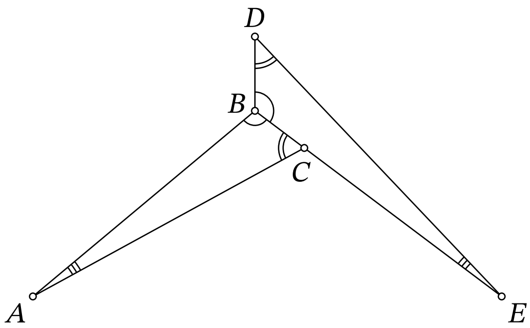
Задача 8.4. Точки D и E отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AD = EC$. Оказалось, что $BD = ED$, $\angle BDC = \angle DEB$. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AB = 7$ и $BE = 2$.



Задача 8.5. На доске были написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 235$. Петя стёр несколько из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел никакое *не* делится на разность никаких двух других. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

Задача 8.6. В таблице 3×3 расставлены действительные числа. Оказалось, что произведение чисел в любой строке и любом столбце равно 10, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 3. Найдите число, стоящее в центральной клетке.

Задача 8.7. На рисунке изображены два равных треугольника: ABC и EBD. Оказалось, что $\angle DAE = \angle DEA = 37°$. Найдите угол BAC.



Задача 8.8. Сколькими способами можно покрасить все натуральные числа от 1 до 200 в красный и синий цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не равнялась степени двойки?

9 класс

Задача 9.1. На острове живут красные, жёлтые, зелёные и синие хамелеоны.

- В пасмурный день либо один красный хамелеон меняет окрас на жёлтый цвет, либо один зелёный хамелеон — на синий цвет.
- В солнечный день либо один красный хамелеон меняет окрас на зелёный цвет, либо один жёлтый хамелеон — на синий цвет.

В сентябре было 18 солнечных и 12 пасмурных дней. При этом количество жёлтых хамелеонов увеличилось на 5. На сколько увеличилось количество зелёных хамелеонов?

Задача 9.2. У Дениса есть карточки с числами от 1 до 50. Сколько существует способов выбрать две карточки так, чтобы разность чисел на карточках равнялась 11, а произведение делилось на 5?

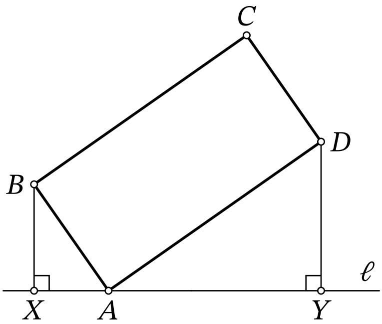
Порядок выбранных карточек не важен: например, способ выбора карточек с числами 5 и 16, а также способ выбора карточек с числами 16 и 5 — это один и тот же способ.

Задача 9.3. Торговцы Андрей и Борис купили по 60 мешков картошки у одного и того же фермера. Все мешки стоили одинаково.

Андрей продал все свои мешки, увеличив их цену на 100%. Борис же сначала увеличил цену на 60%, а когда продал 15 мешков, увеличил цену ещё на 40% и продал остальные 45 мешков.

Оказалось, что Борис заработал на 1200 рублей больше Андрея. Сколько рублей стоил один мешок картошки у фермера?

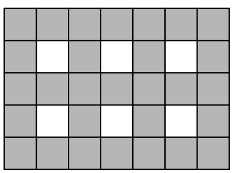
Задача 9.4. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая ℓ, как изображено на рисунке. Из точек B и D опущены перпендикуляры BX и DY на прямую ℓ. Найдите длину отрезка XY, если известно, что $BX = 4$, $DY = 10$, $BC = 2AB$.



Задача 9.5. У Леонида есть белый клетчатый прямоугольник. Сначала он покрасил в серый цвет все столбцы через один, начиная с самого левого, а затем все строки через одну, начиная с самой верхней. Все клетки, примыкающие к границе прямоугольника, оказались закрашены.

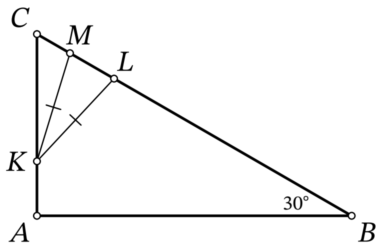
Сколько закрашенных клеток могло получиться в прямоугольнике, если белых клеток осталось 74? Укажите все возможные варианты.

Пример раскраски прямоугольника 5×7 изображён ниже.



Задача 9.6. В треугольнике ABC известны углы $\angle B = 30^\circ$ и $\angle A = 90^\circ$. На стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точки L и M так, что $KL = KM$ (точка L лежит на отрезке BM).

Найдите длину отрезка LM, если известно, что $AK = 4$, $BL = 31$, $MC = 3$.



Задача 9.7. В школьном шахматном турнире участвовали 4 человека: Андрей, Ваня, Дима и Саша. Каждый сыграл дважды с каждым своим соперником. В каждой игре за победу давалось 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

Известно, что по окончании турнира

- все ребята набрали разное количество очков;
- Андрей занял первое место, Дима — второе, Ваня — третье, Саша — четвёртое;
- Андрей одержал столько же побед, сколько и Саша.

Сколько очков набрал каждый из ребят?

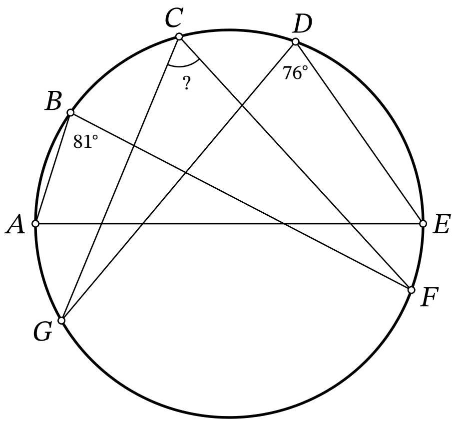
Задача 9.8. Целые числа n и m удовлетворяют неравенствам $3n - m < 5$, $n + m > 26$, $3m - 2n < 46$. Чему может равняться $2n + m$? Укажите все возможные варианты.

10 класс

Задача 10.1. Найдите наибольшее 12-значное число N, удовлетворяющее двум следующим условиям:

- В десятичной записи числа N шесть цифр «4» и шесть цифр «7»;
- В десятичной записи числа N никакие четыре подряд идущие цифры не образуют число «7444».

Задача 10.2. На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, G, как изображено на рисунке. Известно, что AE — диаметр окружности. Также известно, что $\angle ABF = 81°$, $\angle EDG = 76°$. Сколько градусов составляет угол FCG?



Задача 10.3. Лёша разрезал куб $n \times n \times n$ на 153 меньших кубика. Причём у всех кубиков, кроме одного, длина ребра равна 1. Найдите n.

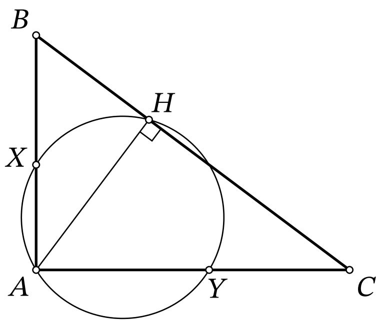
Задача 10.4. В классе учатся N школьников: несколько отличников и 8 хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды все ученики этого класса сели за круглый стол, и каждый из них заявил всем остальным: «Как минимум треть из вас — хулиганы!»

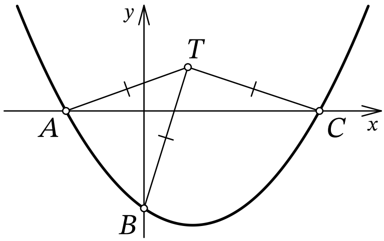
Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

Задача 10.5. У Вики есть 60 карточек с числами от 1 до 60. Она хочет разбить все карточки на пары так, чтобы во всех парах получался один и тот же модуль разности чисел. Сколько существует способов так сделать?

Задача 10.6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. Окружность, проходящая через точки A и H, пересекает катеты AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AX = 5$, $AY = 6$, $AB = 9$.



Задача 10.7. График функции $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + ax + b$ пересекает ось Ox в точках A и C, а ось Oy — в точке B, как изображено на рисунке. Оказалось, что для точки T с координатами $(3; 3)$ выполнено условие $TA = TB = TC$. Найдите b.

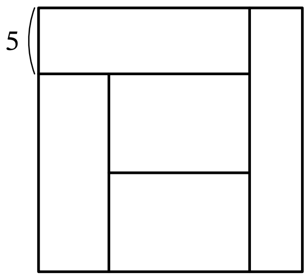


Задача 10.8. При каком наименьшем натуральном a на числовом интервале $(a, 3a)$ находится ровно 50 точных квадратов?

11 класс

Задача 11.1. Произведение девяти последовательных натуральных чисел делится на 1111. Какое наименьшее возможное значение может принимать среднее арифметическое этих девяти чисел?

Задача 11.2. Квадрат разрезали на пять прямоугольников равной площади, как изображено на рисунке. Ширина одного из прямоугольников равна 5. Найдите площадь квадрата.

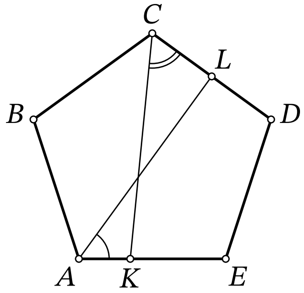


Задача 11.3. В турнире по футболу участвовало 15 команд, каждая сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0 очков.

После завершения турнира оказалось, что некоторые 6 команд набрали хотя бы N очков каждая. Какое наибольшее целое значение может принимать N?

Задача 11.4. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. На стороне AE отмечена точка K, на стороне CD — точка L. Известно, что $\angle LAE + \angle KCD = 108°$, $AK : KE = 3 : 7$. Найдите $CL : AB$.

Правильный пятиугольник — пятиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.



Задача 11.5. На доске написано некоторое двузначное число. Незнайка заявил, что оно делится на 3, 4, 5, 9, 10, 15, 18, 30. Знайка, услышав это, огорчил Незнайку тем, что тот ошибся ровно 4 раза. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

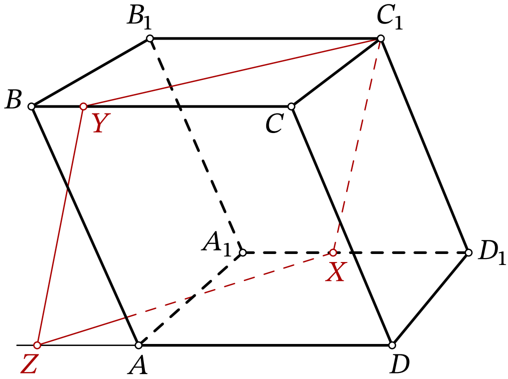
Задача 11.6. Квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что $P(P(x)) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4$. Чему может равняться $P(8)$? Укажите все возможные варианты.

Задача 11.7. В стране 110 городов. Между каждыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет.

Автомобилист находился в некотором городе, из которого вела ровно одна дорога. Проехав по дороге, он оказался во втором городе, из которого вели уже ровно две дороги. Проехав по одной из них, он оказался в третьем городе, из которого вели уже ровно три дороги, и так далее. В какой-то момент, проехав по одной из дорог, он оказался в N-м городе, из которого вели уже ровно N дорог. На этом автомобилист своё путешествие прекратил. (Для каждого $2 \leqslant k \leqslant N$ из k-го города выходило ровно k дорог с учётом той, по которой автомобилист в этот город приехал.)

Какое наибольшее значение может принимать N?

Задача 11.8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре A_1D_1 выбрана точка X, а на ребре BC выбрана точка Y. Известно, что $A_1X = 5$, $BY = 3$, $B_1C_1 = 14$. Плоскость C_1XY пересекает луч DA в точке Z. Найдите DZ.



B_1
C_1
B
Y
C
A_1
X
D_1
Z
A
D