8 класс

Задача 8.1. На клавиатуре компьютера Пети *неисправна* одна клавиша с некоторой цифрой (все остальные клавиши работают хорошо). Неисправная клавиша срабатывает только на каждое второе нажатие. Например, в случае неисправной клавиши «2» при вводе числа 12125252 получится число 112552.

Петя попробовал ввести 10-значное число, но на экране появилось 7-значное число

$$7479189.$$

Клавиша с какой цифрой могла быть неисправна? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7 или 9.

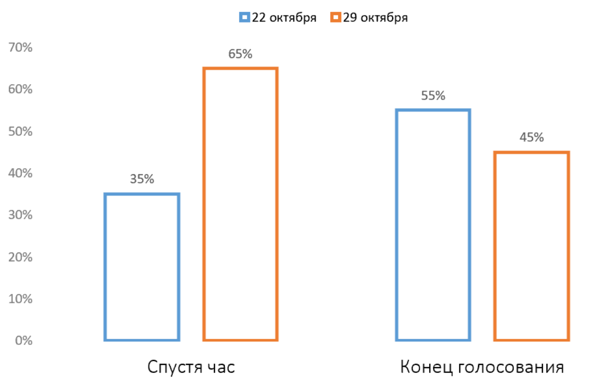
Решение. Не напечатались $10 - 7 = 3$ цифры. Это означает, что на неисправную клавишу нажимали хотя бы 5 раз, при этом не сработали первое, третье и пятое нажатие, но точно сработали второе и четвёртое. Цифр, встречающихся хотя бы дважды, на экране ровно две: 7 и 9. Ясно, что клавиша с 7 могла быть неисправной, например, в случае ввода числа 7774779189, а клавиша с 9 могла быть неисправной, например, в случае ввода числа 7479991899. □

Задача 8.2. В чате учеников одной из школ проходило голосование: «В какой день проводить дискотеку: 22 или 29 октября?»

На графике изображено, как голоса распределились спустя час после начала голосования.

Затем в голосовании приняли участие ещё 80 человек, которые голосовали только за 22 октября. После этого голосование завершилось. Итоговое распределение голосов также изображено на графике.

Сколько человек приняли участие в голосовании?



Ответ: 260.

Решение. Пусть спустя час после начала проголосовали x человек. Из левого графика ясно, что за 22 октября проголосовали $0{,}35x$ человек, а за 29 октября — $0{,}65x$ человек.

По итогу всего проголосовавших было $x + 80$ человек, из них 45% проголосовали за 29 октября. Поскольку их по-прежнему осталось $0{,}65x$, получаем уравнение

$0{,}65x = 0{,}45(x + 80)$, откуда находим $x = 180$. Следовательно, всего в голосовании приняли участие $180 + 80 = 260$ человек. □

Задача 8.3. В классе учатся 29 школьников: несколько отличников и несколько хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Все ученики этого класса сели за круглый стол.

- Несколько учеников сказали: «Рядом со мной ровно один хулиган».
- Все остальные ученики сказали: «Рядом со мной ровно два хулигана».

Какое наименьшее количество хулиганов может быть в классе?

Ответ: 10.

Решение. Если бы по кругу нашлись три отличника подряд, средний из них точно сказал бы неправду. Следовательно, среди любых трёх подряд идущих человек должен быть хотя бы один хулиган.

Выберем произвольного хулигана. Дадим ему номер 29, а всех следующих за ним по часовой стрелке людей пронумеруем числами от 1 до 28. Поскольку в каждой из непересекающихся групп $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, ..., $(25, 26, 27)$, (29) есть хотя бы один хулиган, то всего хулиганов хотя бы $\frac{27}{3} + 1 = 10$.

Заметим также, что хулиганов могло быть ровно 10. Опять же, пронумеровав людей по часовой стрелке числами от 1 до 29, пусть ученики с номерами 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 29 — это хулиганы, а ученики со всеми остальными номерами — отличники. При этом все отличники, кроме отличника с номером 28, сказали первую фразу, а отличник с номером 28 и все хулиганы сказали вторую фразу. Несложно видеть, что все условия задачи выполняются. □

Задача 8.4. Точки D и E отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AD = EC$. Оказалось, что $BD = ED$, $\angle BDC = \angle DEB$. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AB = 7$ и $BE = 2$.

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что треугольники DEC и BDA равны. Действительно, $DE = BD$, $EC = DA$ и $\angle DEC = 180° - \angle BED = 180° - \angle BDC = \angle BDA$. Отсюда следует, что $DC = AB = 7$ и $\angle DCE = \angle BAD$ (рис. 3). Из последнего равенства углов следует, что треугольник ABC является равнобедренным, $7 = AB = BC = 2 + EC$, откуда получаем $5 = EC = AD$ и $AC = AD + DC = 5 + 7 = 12$. □

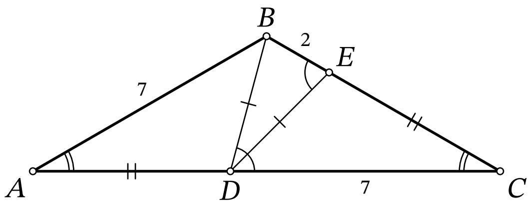


Рис. 3: к решению задачи 8.4

Задача 8.5. На доске были написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 235$. Петя стёр несколько из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел никакое *не* делится на разность никаких двух других. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

Ответ: 118.

Решение. На доске могло остаться 118 нечётных чисел: любое из них не делится на разность никаких двух других, потому что эта разность чётна.

Предположим, могло остаться хотя бы 119 чисел. Рассмотрим 118 множеств: 117 пар $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, ..., $(233, 234)$ и одно число 235. По принципу Дирихле в одном из множеств осталось хотя бы два числа. Это означает, что среди оставшихся чисел найдутся два последовательных, но тогда их разность, равная 1, является делителем любого другого оставшегося числа. Противоречие. □

Задача 8.6. В таблице 3×3 расставлены действительные числа. Оказалось, что произведение чисел в любой строке и любом столбце равно 10, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 3. Найдите число, стоящее в центральной клетке.

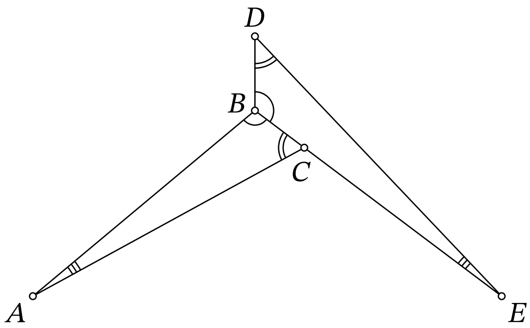
Ответ: 0,00081.

Решение.

Обозначим числа в квадрате слева направо: пусть a, b, c — числа в первой строчке, d, e, f — во второй строчке, g, h, i — в третьей строчке. Заметим, что

$$e = \frac{abde \cdot bcef \cdot degh \cdot efhi}{abc \cdot def \cdot ghi \cdot beh \cdot def} = \frac{3^4}{10^5} = 0{,}00081. \qquad \square$$

Задача 8.7. На рисунке изображены два равных треугольника: ABC и EBD. Оказалось, что $\angle DAE = \angle DEA = 37°$. Найдите угол BAC.



Ответ: 7.

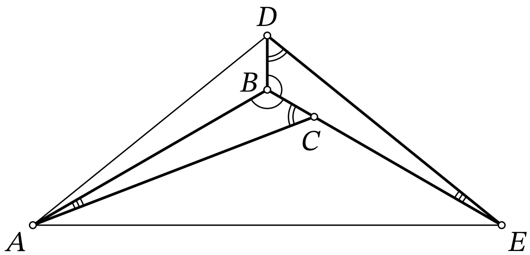


Рис. 4: к решению задачи 8.7

Решение. Проведём отрезки AD и AE (рис. 4). Поскольку $\angle DAE = \angle DEA = 37°$, треугольник ADE является равнобедренным, $AD = DE$.

Заметим, что треугольник ABD равен треугольнику EBD по трём сторонам: BD — общая сторона, $AD = DE$, $AB = BE$ из равенства треугольников ABC и EBD. Тогда $\angle DAB = \angle BED = \angle BAC$ и $\angle ABD = \angle DBE = \angle ABE = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

Поскольку $AB = BE$, треугольник ABE является равнобедренным с углом $120°$, поэтому $\angle BAE = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. Следовательно,

$$\angle BAC = \angle DAB = \angle DAE - \angle BAE = 37° - 30° = 7°. \qquad \square$$

Задача 8.8. Сколькими способами можно покрасить все натуральные числа от 1 до 200 в красный и синий цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не равнялась степени двойки?

Ответ: 256.

Решение.

Лемма. Если сумма двух натуральных чисел равна степени двойки, то степени вхождения 2 в разложения на простые множители этих двух чисел одинаковы.

Доказательство леммы. Пусть сумма чисел $a = 2^\alpha \cdot a_1$ и $b = 2^\beta \cdot b_1$, где a_1 и b_1 нечётны, равна 2^n. Поскольку $2^n = a + b > a \geqslant 2^\alpha$, то $n > \alpha$. Предположим, что α и β различны, не нарушая общности, $\alpha > \beta$. Тогда $b = 2^\beta \cdot b_1 = 2^n - 2^\alpha \cdot a_1 = 2^\alpha(2^{n-\alpha} - a_1)$ делится на 2^α. Но $\beta < \alpha$, противоречие. *Лемма доказана.*

Назовём раскраску в два цвета множества M *хорошей*, если сумма любых двух различных одноцветных чисел из множества M не равна степени двойки. Назовём раскраску в два цвета последовательности $x_1 \leqslant x_2 \dots \leqslant x_t$ *чередующейся*, если любые два соседних числа в этой последовательности покрашены в разные цвета.

Рассмотрим 8 множеств чисел, имеющих в своём разложении на простые множители одинаковую степень двойки:

$$M_0 = \{1, 3, 5, \dots, 199\},\ M_1 = \{2, 6, 10, \dots, 198\},\ M_2 = \{4, 12, 20, \dots, 196\},\ \dots,\ M_7 = \{128\}.$$

Докажем, что для каждого из этих 8 множеств существует ровно две хороших раскраски, обе из которых — чередующиеся. Поскольку числа из разных множеств не дают в сумме степень двойки (это следует из леммы), мы получим, что всего хороших раскрасок чисел $1, 2, \dots, 200$ существует ровно $2^8 = 256$.

Рассмотрим $M_k = \{2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \dots\}$. Рассмотрим множество чисел M_k^*, в котором содержатся все числа множества M_k, разделённые на 2^k. Очевидно, что любой хорошей раскраске множества M_k соответствует ровно одна хорошая раскраска множества M_k^* (если сумма двух каких-то чисел была степенью двойки, то и сумма этих чисел, разделённых на 2^k, также будет степенью двойки, и наоборот). Достаточно доказать, что для M_k^* существует ровно две хороших раскраски, обе из которых — чередующиеся.

Очевидно, M_k^* состоит из нескольких первых нечётных натуральных чисел (возможно, из одного). Не нарушая общности, число 1 в нём — красное. Поскольку $1 + 3 = 2^2$, число 3 — синее. Поскольку $5 + 3 = 7 + 1 = 2^3$, число 5 — красное, а число 7 — синее. Так можно продолжать и дальше: если раскраска нечётных чисел от 1 до $2^s - 1$ — чередующаяся, то раскраска нечётных чисел от $2^s + 1$ до $2^{s+1} - 1$ — тоже чередующаяся (поскольку $(2^s + 1) + (2^s - 1) = (2^s + 3) + (2^s - 3) = \dots = (2^{s+1} - 1) + 1 = 2^{s+1}$). При этом числа $2^s - 1$ и $2^s + 1$ покрашены в разные цвета, поэтому и раскраска чисел от 1 до $2^{s+1} - 1$ — тоже чередующаяся. Итак, если число 1 — красное, то раскраска восстанавливается однозначно, и она является чередующейся. Очевидно, что если число 1 — синее, то раскраска тоже восстанавливается однозначно, и она тоже является чередующейся. Ясно также, что чередующиеся раскраски подходят: в них любые два различных одноцветных числа нечётны и имеют одинаковый остаток при делении на 4, поэтому их сумма больше 2 и не делится на 4, следовательно, не является степенью двойки. Других раскрасок нет. □

Другое решение. Если два различных числа в сумме дают степень двойки, меньшее из них будем называть *родителем* большего. Докажем, что у степеней двойки нет родителей, а у остальных чисел ровно по одному родителю.

Действительно, рассмотрим число x, находящееся в диапазоне $2^{k-1} \leqslant x < 2^k$ для некоторого $k \geqslant 0$. Пусть один из его родителей — некоторое число $y < x$. Тогда $2^{k-1} \leqslant x <$

$x + y < 2x < 2^{k+1}$, откуда $x + y = 2^k$ (это должна быть какая-то степень двойки). Следовательно, родитель $y = 2^k - x$ для $x \neq 2^{k-1}$ определяется однозначно (а для $x = 2^{k-1}$ получаем $y = x$, что невозможно). С другой стороны, ясно, что если $x \neq 2^{k-1}$, то $2^k - x$ — это действительно родитель числа x ($2^k - x \leqslant 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1} < x$ и $2^k - x + x = 2^k$).

Теперь покажем, что любую покраску степеней двойки можно единственным образом продолжить до покраски всего данного множества чисел. Пусть все степени двойки из нашего множества уже покрашены в красный или синий цвета. Начнем идти по остальным числам по возрастанию (3, 5, 6, ...); когда мы дойдём до очередного числа, у него будет родитель, и он уже будет покрашен. Значит, мы можем покрасить текущее число единственным образом — в цвет, противоположный цвету его родителя. Так мы раскрасим все числа.

Полученная раскраска будет удовлетворять условию, так как в любой паре чисел, дающих в сумме степень двойки, большее число будет покрашено в цвет, противоположный цвету своего родителя, то есть меньшего числа пары.

Следовательно, количество способов раскрасить данный диапазон требуемым образом совпадает с количеством способов раскрасить степени двойки из диапазона произвольным образом. Так как всего у нас 8 степеней двойки (от 2^0 до 2^7), то способов ровно 2^8. $\square$

9 класс

Задача 9.1. На острове живут красные, жёлтые, зелёные и синие хамелеоны.

- В пасмурный день либо один красный хамелеон меняет окрас на жёлтый цвет, либо один зелёный хамелеон — на синий цвет.
- В солнечный день либо один красный хамелеон меняет окрас на зелёный цвет, либо один жёлтый хамелеон — на синий цвет.

В сентябре было 18 солнечных и 12 пасмурных дней. При этом количество жёлтых хамелеонов увеличилось на 5. На сколько увеличилось количество зелёных хамелеонов?

Ответ: 11.

Решение. Пусть A — количество зелёных хамелеонов на острове, а B — жёлтых. Рассмотрим величину $A - B$. Заметим, что каждый пасмурный день она уменьшается на 1, а каждый солнечный день она увеличивается на 1. Поскольку солнечных дней в сентябре было на $18 - 12 = 6$ больше, чем пасмурных, то и величина $A - B$ увеличилась на 6 за это время. Поскольку B увеличилось на 5, то A должно было увеличиться на $5 + 6 = 11$. $\square$

Задача 9.2. У Дениса есть карточки с числами от 1 до 50. Сколько существует способов выбрать две карточки так, чтобы разность чисел на карточках равнялась 11, а произведение делилось на 5?

Порядок выбранных карточек не важен: например, способ выбора карточек с числами 5 и 16, а также способ выбора карточек с числами 16 и 5 — это один и тот же способ.

Ответ: 15.

Решение. Чтобы произведение делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы какой-то множитель делился на 5. Пусть n — делящееся на 5 выбранное число, тогда в пару ему надо выбрать $n-11$ или $n+11$, притом оба выбранных числа должны быть натуральными. Ясно, что при $n = 5, 10, 40, 45, 50$ есть только один способ выбрать пару, а при $n = 15, 20, 25, 30, 35$ есть ровно два способа выбрать пару. Итого $5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 15$ способов. □

Задача 9.3. Торговцы Андрей и Борис купили по 60 мешков картошки у одного и того же фермера. Все мешки стоили одинаково.

Андрей продал все свои мешки, увеличив их цену на 100%. Борис же сначала увеличил цену на 60%, а когда продал 15 мешков, увеличил цену ещё на 40% и продал остальные 45 мешков.

Оказалось, что Борис заработал на 1200 рублей больше Андрея. Сколько рублей стоил один мешок картошки у фермера?

Ответ: 250.

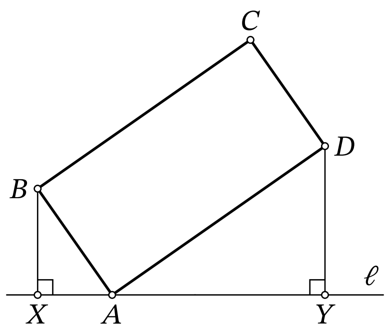
Решение. Пусть мешок у фермера стоил x рублей. На покупку 60 мешков Андрей и Борис потратили поровну.

Из условия следует, что Андрей продал 60 мешков по $2x$ рублей, т. е. получил $60 \cdot 2x$ рублей. Борис же продал 15 мешков по цене $1{,}6x$ рублей, а затем продал 45 мешков по цене $1{,}6x \cdot 1{,}4$ рублей. Получаем уравнение

$$2x \cdot 60 + 1200 = 15 \cdot 1{,}6x + 45 \cdot 1{,}6x \cdot 1{,}4.$$

Решая его, находим $x = 250$. □

Задача 9.4. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая ℓ, как изображено на рисунке. Из точек B и D опущены перпендикуляры BX и DY на прямую ℓ. Найдите длину отрезка XY, если известно, что $BX = 4$, $DY = 10$, $BC = 2AB$.



Ответ: 13.

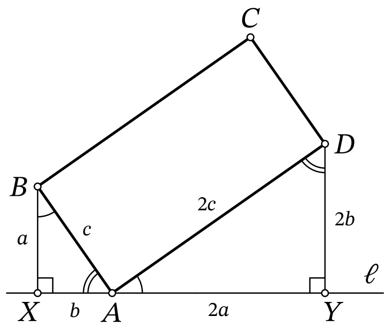


Рис. 5: к решению задачи 9.4

Решение. Заметим, что так как $\angle YAD = 90^\circ - \angle XAB$ (рис. 5), то прямоугольные треугольники XAB и YDA подобны по острому углу $\angle YAD = \angle XBA$. Коэффициент подобия равен отношению $AB : AD$, то есть $\frac{1}{2}$. Отсюда получаем $XA = \frac{1}{2}DY = 5$ и $AY = 2BX = 8$, что в сумме даёт $XY = 13$. □

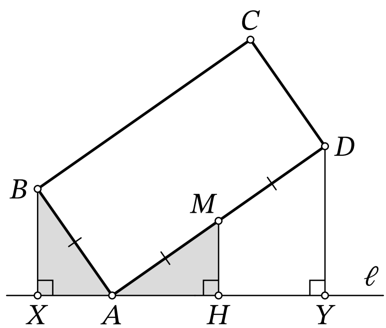


Рис. 6: к решению задачи 9.4

Другое решение. Пусть M — середина отрезка AD, тогда $AM = MD = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} = AB$ (рис. 6). Опустим из M перпендикуляр на MH на прямую ℓ. Поскольку в треугольнике ADY отрезок MH проходит через середину стороны AD и параллелен стороне DY, то он является средней линией, $AH = HY$ и $MH = \frac{DY}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

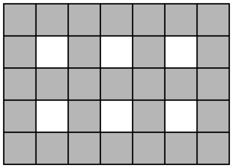
Заметим, что $\angle ABX = 90^\circ - \angle BAX = 90^\circ - (180 - 90^\circ - \angle MAH) = \angle MAH$. Тогда прямоугольные треугольники ABX и MAH равны по гипотенузе $AB = AM$ и острому углу $\angle ABX = \angle MAH$. Отсюда следует, что $AX = MH = 5$ и $AH = BX = 4$.

Итак, $XY = AX + AH + HY = 5 + 4 + 4 = 13$. □

Задача 9.5. У Леонида есть белый клетчатый прямоугольник. Сначала он покрасил в серый цвет все столбцы через один, начиная с самого левого, а затем все строки через одну, начиная с самой верхней. Все клетки, примыкающие к границе прямоугольника, оказались закрашены.

Сколько закрашенных клеток могло получиться в прямоугольнике, если белых клеток осталось 74? Укажите все возможные варианты.

Пример раскраски прямоугольника 5×7 изображён ниже.



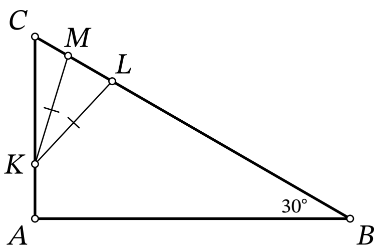
Ответ: 301 или 373.

Решение. Из условия следует, что в прямоугольнике нечётное количество и столбцов, и строк. Пронумеруем строки сверху вниз числами $1, 2, \ldots, 2k+1$, а столбцы слева направо числами $1, 2, \ldots, 2l+1$ (для целых неотрицательных k и l). Не нарушая общности, $k \leqslant l$.

Заметим, что все белые клетки находятся в точности в тех клетках, номера столбца и строки которых — чётные числа. Отсюда следует равенство $74 = k \cdot l$. Тогда либо $k = 1$ и $l = 74$, либо $k = 2$ и $l = 37$. Ясно, что всего закрашенных клеток $(2k+1)(2l+1) - kl$, поэтому в первом случае получаем ответ $3 \cdot 149 - 1 \cdot 74 = 373$, а во втором — ответ $5 \cdot 75 - 2 \cdot 37 = 301$. $\square$

Задача 9.6. В треугольнике ABC известны углы $\angle B = 30^\circ$ и $\angle A = 90^\circ$. На стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точки L и M так, что $KL = KM$ (точка L лежит на отрезке BM).

Найдите длину отрезка LM, если известно, что $AK = 4$, $BL = 31$, $MC = 3$.



Ответ: 14.

Решение. В решении мы будем несколько раз пользоваться фактом о том, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет напротив этого угла вдвое меньше гипотенузы.

Опустим в равнобедренном треугольнике KML высоту KH на основание (рис. 7). Поскольку эта высота является и медианой, то $MH = HL = x$. В прямоугольном треуголь-

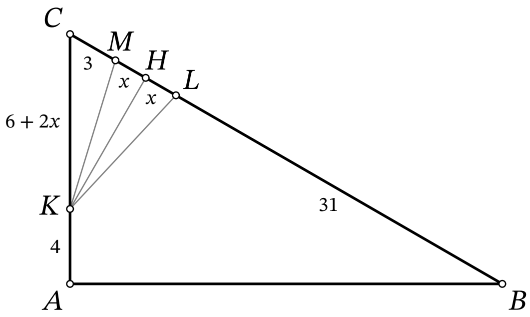


Рис. 7: к решению задачи 9.6

нике CKH имеем $\angle CKH = 90^\circ - \angle C = \angle A = 30^\circ$, поэтому $KC = 2 \cdot CH = 2 \cdot (CM + MH) = 2 \cdot (3 + x) = 6 + 2x$. В прямоугольном треугольнике ABC имеем $\angle A = 30^\circ$, поэтому $BC = 2 \cdot AC$. Составляя и решая соответствующее уравнение $31 + 2x + 3 = 2 \cdot (4 + 6 + 2x)$, находим $x = 7$. Тогда $LM = 2x = 2 \cdot 7 = 14$. □

Задача 9.7. В школьном шахматном турнире участвовали 4 человека: Андрей, Ваня, Дима и Саша. Каждый сыграл дважды с каждым своим соперником. В каждой игре за победу давалось 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

Известно, что по окончании турнира

- все ребята набрали разное количество очков;
- Андрей занял первое место, Дима — второе, Ваня — третье, Саша — четвёртое;
- Андрей одержал столько же побед, сколько и Саша.

Сколько очков набрал каждый из ребят?

Ответ: Андрей набрал 4 очка, Ваня — 2,5, Дима — 3,5, Саша — 2.

Решение. В каждой игре два участника суммарно получают 1 очко. Ясно, что всего игр было $6 \cdot 2 = 12$, поэтому суммарно у всех участников ровно 12 очков. Также ясно, что итоговое количество очков у каждого участника — либо целое число, либо целое, увеличенное на 0,5.

Если бы Саша набрал хотя бы 2,5 очка, то Ваня — хотя бы 3 очка, Дима — хотя бы 3,5 очка, Андрей — хотя бы 4 очка. Тогда суммарно они бы набрали хотя бы $2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4 = 13$ очков, противоречие. Значит, Саша набрал не более 2 очков. Следовательно, он одержал не более 2 побед, тогда и Андрей одержал не более 2 побед.

Всего Андрей сыграл 6 игр, тогда он набрал не более $2 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}5 = 4$ очков. Если бы Андрей набрал не более 3,5 очков, то Дима — не более 3, Ваня — не более 2,5, Саша — не более 2. Тогда суммарно они набрали не более $3{,}5 + 3 + 2{,}5 + 2 = 11$ очков, противоречие. Значит, Андрей набрал ровно 4 очка, причём это возможно только в случае, если он 2 раза победил и 4 раза сыграл вничью. Тогда и Саша 2 раза победил, при этом у него не более 2 очков. Значит, Саша набрал ровно 2 очка.

Дима и Ваня суммарно набрали оставшиеся ровно $12 - 4 - 2 = 6$ очков, причём Ваня набрал хотя бы 2,5 очка, а Дима — не более 3,5. Поскольку они набрали разное количество очков, и Ваня набрал меньше Димы, то Ваня набрал ровно 2,5 очка, а Дима — ровно 3,5 очка.

Приведём пример, как могла произойти описанная турнирная ситуация. Пусть Андрей дважды выиграл у Саши, дважды сыграл вничью и с Ваней, и с Димой. Саша же дважды выиграл у Вани и дважды проиграл Диме. Наконец, Дима один раз проиграл Ване, а другой раз сыграл с ним вничью. Несложно видеть, что все условия задачи выполняются. □

Задача 9.8. Целые числа n и m удовлетворяют неравенствам $3n - m < 5$, $n + m > 26$, $3m - 2n < 46$. Чему может равняться $2n + m$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 36.

Решение. Поскольку числа m и n целые, то и значения выражений из условия $3n - m$, $n + m$, $3m - 2n$ — тоже целые. Тогда

$$\begin{cases} 3n - m \leqslant 4, \\ n + m \geqslant 27, \\ 3m - 2n \leqslant 45. \end{cases}$$

Сложив утроенное первое неравенство с третьим, получим $7n \leqslant 57$, откуда $n \leqslant 8$. Сложив удвоенное первое неравенство с утроенным третьим, получим $7m \leqslant 143$, откуда $m \leqslant 20$.

Итак, $n \leqslant 8$, $m \leqslant 20$, при этом $n + m \geqslant 27$. Это возможно только в трёх случаях.

- Пусть $n = 7$, $m = 20$. Тогда не выполняется условие $3m - 2n \leqslant 45$.
- Пусть $n = 8$, $m = 19$. Тогда не выполняется условие $3n - m \leqslant 4$.
- Пусть $n = 8$, $m = 20$. Несложно видеть, что тогда все условия выполняются. Значит, $2n + m = 2 \cdot 8 + 20 = 36$. □

Другое решение. Изобразим данные неравенства как области на координатной плоскости Omn, как на рис. 8. Каждое из неравенств соответствует некоторой полуплоскости. Например, неравенство $3n - m < 5$ — это полуплоскость, расположенная ниже прямой $3n - m = 5$.

Пересечением этих полуплоскостей является треугольник, внутри которого лежит одна целая точка $m = 20$, $n = 8$ (точки на границе треугольника не подходят, так как неравенства строгие), откуда сразу получаем единственный ответ $2n + m = 36$. □

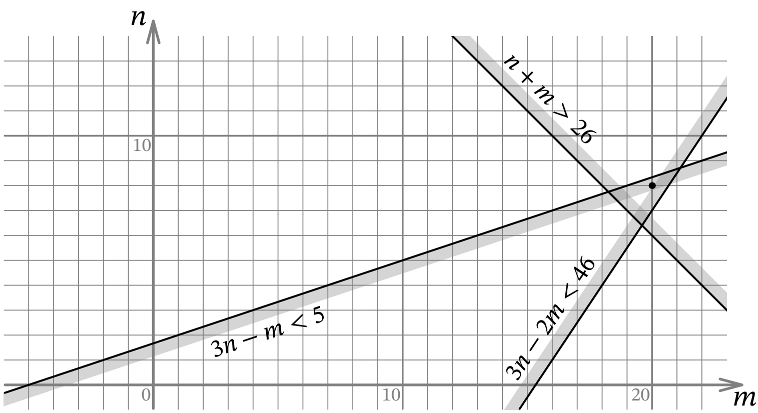


Рис. 8: к решению задачи 9.8

10 класс

Задача 10.1. Найдите наибольшее 12-значное число N, удовлетворяющее двум следующим условиям:

- В десятичной записи числа N шесть цифр «4» и шесть цифр «7»;
- В десятичной записи числа N никакие четыре подряд идущие цифры не образуют число «7444».

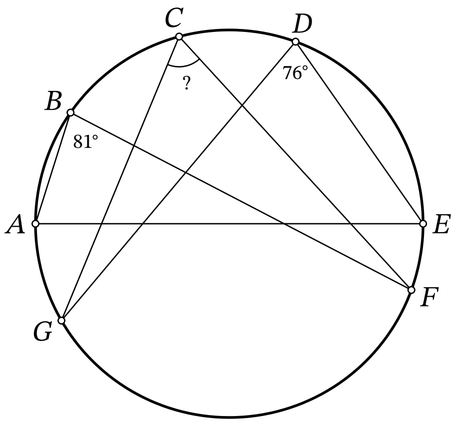
Ответ: 777744744744.

Решение. Ясно, что число 777744744744 подходит под условие задачи.

Предположим, существует число больше, тогда оно точно начинается с четырёх семёрок. Выберем в этом числе наибольшее количество подряд идущих четвёрок, пусть их k. Если $k \geqslant 3$, то выбрав среди этих k четвёрок три самых левых, а также семёрку левее их, получим кусок цифр «7444», противоречие.

Значит, $k \leqslant 2$. В последних восьми разрядах числа должны стоять шесть четвёрок. Поскольку никакие три подряд идущие цифры не могут быть одновременно четвёрками, то последние восемь цифр определяются однозначно: это 44744744. Но соответствующее число 777744744744 мы уже нашли. □

Задача 10.2. На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, G, как изображено на рисунке. Известно, что AE — диаметр окружности. Также известно, что $\angle ABF = 81°$, $\angle EDG = 76°$. Сколько градусов составляет угол FCG?



Ответ: 67.

Решение. Поскольку вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, то $\angle ACF = \angle ABF = 81^\circ$ и $\angle ECG = \angle EDG = 76^\circ$. Поскольку на диаметр опирается прямой угол,

$$\angle FCG = \angle ACF + \angle ECG - \angle ACE = 81^\circ + 76^\circ - 90^\circ = 67^\circ. \qquad \square$$

Задача 10.3. Лёша разрезал куб $n \times n \times n$ на 153 меньших кубика. Причём у всех кубиков, кроме одного, длина ребра равна 1. Найдите n.

Ответ: 6.

Решение. Пусть оставшийся кубик имеет ребро s. Очевидно, что числа n и s — натуральные, причём $n > s$.

Разность объёмов кубов с рёбрами n и s равна суммарному объёму кубиков с ребром 1. Следовательно, $n^3 - s^3 = 152$.

Поскольку $n^3 > 152 > 5^3$, то $n > 5$. Заметим, что $n = 6$ равенству выше удовлетворяет, ему соответствует $s = 4$, ведь $6^3 - 4^3 = 152$. А $n = 7$ равенству не удовлетворяет, ведь число $7^3 - 152 = 191$ не является точным кубом. Также не удовлетворяют равенству и все $n \geqslant 8$, ведь иначе

$$152 = n^3 - s^3 \geqslant n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 = 3n(n-1) + 1 \geqslant 3 \cdot 8 \cdot 7 + 1 > 152.$$

Ясно, что единственное значение $n = 6$ возможно: куб $6 \times 6 \times 6$ можно разрезать на куб $4 \times 4 \times 4$ и 152 кубика $1 \times 1 \times 1$. $\square$

Задача 10.4. В классе учатся N школьников: несколько отличников и 8 хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды все ученики этого класса сели за круглый стол, и каждый из них заявил всем остальным: «Как минимум треть из вас — хулиганы!»

Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 23, 24 или 25.

Решение.

Условие того, что хулиган сделал данное заявление, равносильно неравенству $\frac{7}{N-1} < \frac{1}{3}$, что эквивалентно $N > 22$.

Условие того, что отличник сделал данное заявление, равносильно неравенству $\frac{8}{N-1} \geqslant \frac{1}{3}$, что эквивалентно $25 \geqslant N$.

Поскольку в классе есть хулиганы, то $N > 22$. Тогда в классе есть и отличники, значит, $25 \geqslant N$. Следовательно, все возможные натуральные значения N — это 23, 24, 25. ☐

Задача 10.5. У Вики есть 60 карточек с числами от 1 до 60. Она хочет разбить все карточки на пары так, чтобы во всех парах получался один и тот же модуль разности чисел. Сколько существует способов так сделать?

Ответ: 8.

Решение. Пусть d — модуль разности чисел. Очевидно, что число d — натуральное.

Ясно, что число 1 должно быть в паре с $d+1$, число 2 должно быть в паре с $d+2$, ..., число d должно быть в паре с $2d$. Значит, первые $2d$ натуральных чисел разбились друг с другом на пары.

Рассматривая число $2d+1$, получаем, что оно должно быть в паре с $3d+1$, число $2d+2$ должно быть в паре с $3d+2$, ..., число $3d$ должно быть в паре с $4d$. Значит, следующие $2d$ натуральных чисел тоже разбились друг с другом на пары.

Продолжая так аналогично, получаем, что множество всех чисел $\{1, 2, \ldots, 60\}$ должно разбиться на непересекающиеся группы по $2d$ чисел (которые при этом разбиваются на d пар). Следовательно, 60 делится на $2d$, что равносильно тому, что 30 делится на d. У числа 30 ровно 8 натуральных делителей: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Ясно, что все они подходят, ведь каждому числу d среди них соответствует $\frac{30}{d}$ групп вида $\{2kd+1, 2kd+2, \ldots, 4kd\}$, которые очевидным образом разбиваются на пары с модулем разности d. ☐

Задача 10.6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. Окружность, проходящая через точки A и H, пересекает катеты AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AX = 5$, $AY = 6$, $AB = 9$.

Ответ: 13,5.

Решение. Пусть K — вторая точка пересечения данной окружности со стороной BC (рис. 9). Поскольку $\angle AHK = 90°$, отрезок AK является диаметром этой окружности, и $\angle AXK = \angle AYK = 90°$. Следовательно, $AXKY$ — прямоугольник, и $XK = AY = 6$.

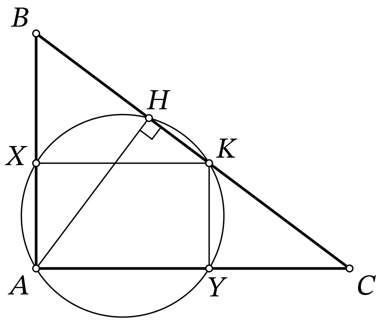


Рис. 9: к решению задачи 10.6

Из условия следует, что $XB = AB - AX = 9 - 5 = 4$. Заметим, что прямоугольные треугольники XBK и ABC с общим острым углом B подобны. Поэтому

$$\frac{4}{6} = \frac{XB}{XK} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{AC},$$

откуда находим $AC = 13{,}5$. □

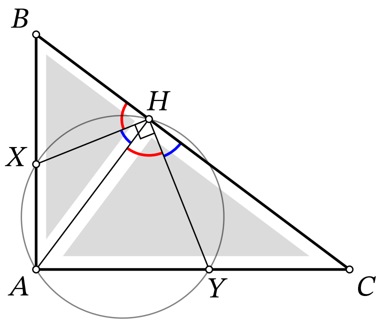


Рис. 10: к решению задачи 10.6

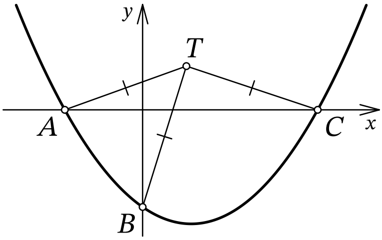
Другое решение. Из вписанности четырёхугольника $AXHY$ следует, что $\angle XHY = 180^\circ - \angle XAY = 90^\circ$. Заметим, что $\angle CHY = 180^\circ - \angle XHY - \angle BHX = 90^\circ - \angle BHX = \angle AHX$ (рис. 10). Это означает, что в подобных прямоугольных треугольниках AHC и BHA точки Y и X соответствуют друг другу, то есть делят соответствующие стороны AC и AB в одинаковых отношениях (также это можно вывести из подобия по углам треугольников CHY и AHX). Следовательно,

$$\frac{6}{CY} = \frac{AY}{CY} = \frac{BX}{AX} = \frac{4}{5},$$

откуда находим $CY = 6 \cdot \frac{5}{4} = 7{,}5$ и $AC = AY + CY = 6 + 7{,}5 = 13{,}5$. □

Задача 10.7. График функции $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + ax + b$ пересекает ось Ox в точках A и C, а ось

Oy — в точке B, как изображено на рисунке. Оказалось, что для точки T с координатами $(3;3)$ выполнено условие $TA = TB = TC$. Найдите b.



Ответ: -6.

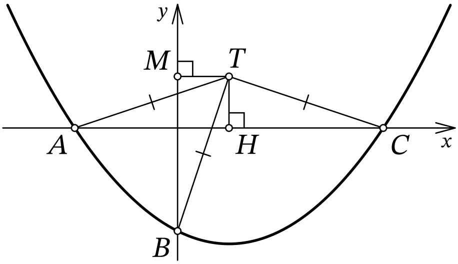


Рис. 11: к решению задачи 10.7

Решение. Пусть точка A имеет координаты $(x_1; 0)$, точка C — координаты $(x_2; 0)$. Из условия ясно, что $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Поскольку x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x)$, то по теореме Виета имеем $x_1 \cdot x_2 = 12b$, откуда получаем $b = \frac{x_1 \cdot x_2}{12} < 0$.

Пусть H — точка с координатами $(3; 0)$ (рис. 11). Ясно, что в равнобедренном треугольнике ATC отрезок TH является высотой, поэтому он также является и медианой. Следовательно, $3 - x_1 = AH = HC = x_2 - 3$, откуда получаем $x_1 = 6 - x_2$.

Пусть M — точка с координатами $(0, 3)$. Поскольку $TH = TM = 3$ и $TA = TB$, прямоугольные треугольники ATH и BTM равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $3 - x_1 = HA = MB = 3 - b$, то есть $x_1 = b = \frac{x_1 \cdot x_2}{12}$ (по т. Виета), откуда находим $x_2 = 12$. Наконец, $x_1 = 6 - x_2 = 6 - 12 = -6$ и $b = x_1 = -6$. □

Другое решение. Как и в предыдущем решении, обозначим абсциссы точек A и C за x_1 и x_2 соответственно; также будем пользоваться тем, что точка B имеет координаты $(0; b)$. Сразу поймём, что $OA = |x_1| = -x_1$, $OC = |x_2| = x_2$ и $OB = |b| = -b$.

Найдём второе пересечение окружности с осью ординат, пусть это точка D с координатами $(0; d)$ (рис. 12). Хорды AC и BD окружности пересекаются в начале координат O; из свойств окружности мы знаем, что $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Получаем $-x_1 \cdot x_2 = -b \cdot d$, откуда, заменяя $x_1 \cdot x_2$ на $12b$ по теореме Виета, получаем $d = 12$.

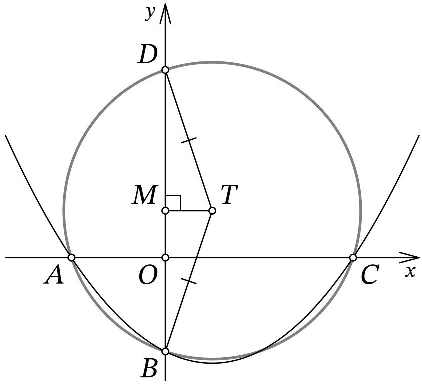


Рис. 12: к решению задачи 10.7

Осталось заметить, что треугольник BTD равнобедренный, и середина его основания, точка M, имеет координаты $(0;3)$. Отражая относительно неё точку $D(0;12)$, получаем $B(0;-6)$. □

Задача 10.8. При каком наименьшем натуральном a на числовом интервале $(a, 3a)$ находится ровно 50 точных квадратов?

Ответ: 4486.

Решение. Выберем наибольшее натуральное n такое, что $n^2 \leqslant a$. Тогда

$$n^2 \leqslant a < (n+1)^2 < (n+2)^2 < \ldots < (n+50)^2 < 3a \leqslant (n+51)^2.$$

Заметим, что $\frac{(n+50)^2}{(n+1)^2} < \frac{3a}{a} = 3$, поэтому $1 + \frac{49}{n+1} = \frac{n+50}{n+1} < \sqrt{3}$, откуда получаем

$$n+1 > \frac{49}{\sqrt{3}-1} = \frac{49(\sqrt{3}+1)}{2} > \frac{49(1{,}7+1)}{2} > \frac{132}{2} = 66.$$

Из того, что $n+1 > 66$, следует, что $n \geqslant 66$ и $a \geqslant 66^2$.

Если на соответствующем значению $n = 66$ числовом промежутке $[66^2; 67^2)$ найдутся подходящие значения a, то наименьшее из них и будет ответом в задаче. В этом случае должны выполняться условия $66^2 = 4356 \leqslant a < 4489 = 67^2$. Также должны выполняться условия $13456 = 116^2 < 3a \leqslant 117^2 = 13689$, равносильные тому, что $4485\frac{1}{3} < a \leqslant 4563$. Ясно, что наименьшим a, подходящим под все эти условия, является $a = 4486$. Оно подходит: на соответствующем промежутке $(a; 3a)$ находятся только точные квадраты $67^2, 68^2, \ldots, 116^2$, и их ровно 50. □

11 класс

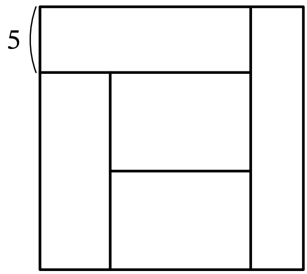
Задача 11.1. Произведение девяти последовательных натуральных чисел делится на 1111. Какое наименьшее возможное значение может принимать среднее арифметическое этих девяти чисел?

Ответ: 97.

Решение. Пусть эти девять чисел — $n, n+1, \ldots, n+8$ для некоторого натурального n. Ясно, что их среднее арифметическое равно $n+4$.

Чтобы произведение делилось на $1111 = 11 \cdot 101$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из множителей делился на 11, а также хотя бы один из множителей делился на 101. Тогда какое-то из девяти чисел не меньше 101, поэтому $n+8 \geqslant 101$ и $n+4 \geqslant 97$. Ясно также, что для девяти чисел $93, 94, \ldots, 101$ значение $n+4 = 97$ достигается, ведь 99 делится на 11, а 101 делится на 101. □

Задача 11.2. Квадрат разрезали на пять прямоугольников равной площади, как изображено на рисунке. Ширина одного из прямоугольников равна 5. Найдите площадь квадрата.



Ответ: 400.

Решение. У центрального прямоугольника и у прямоугольника под ним есть общая горизонтальная сторона, а площади их равны. Значит, вертикальные стороны этих прямоугольников равны, обозначим их через x (рис. 13). У левого нижнего прямоугольника вертикальная сторона равна $2x$, его горизонтальную сторону обозначим через y. Поскольку его площадь $2xy$ совпадает с площадью центрального прямоугольника, то горизонтальная сторона центрального прямоугольника равна $2y$. Тогда горизонтальная сторона левого верхнего прямоугольника равна $3y$, и его площадь $3y \cdot 5 = 15y$ должна быть равна $2xy$, откуда находим $x = 7{,}5$. Тогда у всего квадрата сторона равна $5 + 2x = 5 + 2 \cdot 7{,}5 = 20$, а его площадь равна $20^2 = 400$. □

Задача 11.3. В турнире по футболу участвовало 15 команд, каждая сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0 очков.

После завершения турнира оказалось, что некоторые 6 команд набрали хотя бы N очков каждая. Какое наибольшее целое значение может принимать N?

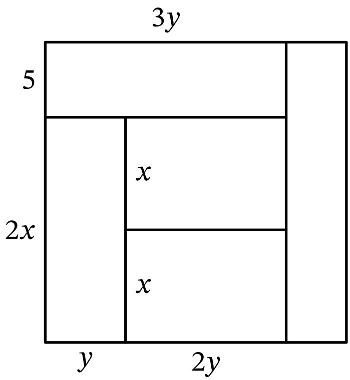


Рис. 13: к решению задачи 11.2

Ответ: 34.

Решение. Назовём эти 6 команд *успешными*, а остальные 9 команд назовём *неуспешными*. Назовём игру двух успешных команд *внутренней*, а игру успешной и неуспешной команды — *внешней*.

Сразу заметим, что за каждую игру участвующие в ней команды суммарно получают не более 3 очков. Ясно, что внутренних игр было ровно $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$, и только за такие игры все успешные команды суммарно заработали не более $15 \cdot 3 = 45$ очков. Внешних же игр было ровно $6 \cdot 9 = 54$, и в каждой такой игре успешная команда зарабатывала не более 3 очков. Итого за внешние игры все успешные команды суммарно набрали не более $54 \cdot 3 = 162$ очка. По условию успешные команды суммарно набрали хотя бы $6N$ очков, поэтому получаем неравенство $6N \leqslant 45 + 162$. Из него следует, что $N \leqslant \frac{207}{6} < 35$ и $N \leqslant 34$.

Теперь приведём пример для $N = 34$. Пронумеруем команды числами от 1 до 15. Покажем, как команды от 1 до 6 могут набрать хотя бы 34 очка.

- Пусть каждая команда от 1 до 6 выиграла у каждой команды от 7 до 15, тогда только за такие игры каждая команда от 1 до 6 набрала $9 \cdot 3 = 27$ очков.
- Пусть команды от 1 до 6 играли между собой так, как указано в следующей таблице (в каждой клетке указано количество очков, которое команда из соответствующей строки получила в игре с командой из соответствующего столбца):

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		3	3	1	0	0
2	0		3	3	1	0
3	0	0		3	3	1
4	1	0	0		3	3
5	3	1	0	0		3
6	3	3	1	0	0	

- Пусть в каждой игре команд от 7 до 15 выиграла команда с большим номером (исход этих игр не имеет значения).

Итого команды от 1 до 6 набрали хотя бы $27 + 7 = 34$ очка. □

Задача 11.4. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. На стороне AE отмечена точка K, на стороне CD — точка L. Известно, что $\angle LAE + \angle KCD = 108°$, $AK : KE = 3 : 7$. Найдите $CL : AB$.

Правильный пятиугольник — пятиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

Ответ: 0,7.

Решение. Для начала сформулируем известные факты, которыми мы будем пользоваться в решении.

- Сумма углов n-угольника равна $180°(n-2)$. В частности, каждый угол правильного пятиугольника равен $\frac{540°}{5} = 108°$.
- Все пять диагоналей правильного пятиугольника равны. Также каждая диагональ отсекает от пятиугольника равнобедренный треугольник с углом 108° при вершине и углами 36° при основании.

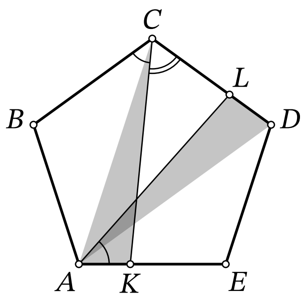


Рис. 14: к решению задачи 11.4

Пусть $\angle LAE = \alpha$, тогда $\angle KCD = 108° - \alpha$ и $\angle BCK = \alpha$ (рис. 14). Заметим, что

$$\angle CKA = 360° - \angle KAB - \angle ABC - \angle BCK = 360° - 108° - 108° - \alpha =$$
$$= 360° - \angle LDE - \angle DEA - \angle EAL = \angle ALD.$$

Докажем, что треугольники ALD и CKA равны. Равенство одной пары углов у нас уже есть. Далее, $\angle ADL = \angle CDE - \angle ADE = 108° - 36° = 72°$; так же получается $\angle CAK = 72°$, так как это аналогичный угол между диагональю и стороной пятиугольника.

Тогда равны и третьи углы треугольников. Значит, треугольники ALD и CKA равны по стороне $AD = AC$ и прилежащим к ней углам; отсюда следует $LD = AK$.

Обозначив длину AK за $3x$, имеем $KE = 7x$ из условия и $AE = AK + KE = 10x$. Кроме того, $CD = AB = AE$, так как это стороны пятиугольника. Получаем, что $CL = CD - LD = 7x$. Наконец, $CL : AB = 7x : 10x = 0{,}7$. □

Замечание. Равенство треугольников можно установить, рассмотрев поворот на $144°$ вокруг центра пятиугольника, который переводит точку C в точку A. Из равенства углов, данного в условии, следует, что угол BCK перейдёт в EAL и отрезок CK в отрезок AL; тогда совместятся и треугольники.

Задача 11.5. На доске написано некоторое двузначное число. Незнайка заявил, что оно делится на $3, 4, 5, 9, 10, 15, 18, 30$. Знайка, услышав это, огорчил Незнайку тем, что тот ошибся ровно 4 раза. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 36, 45 или 72.

Решение. Пусть N — написанное на доске двузначное число. Если бы N делилось на 30, то оно также бы делилось на $3, 5, 10, 15$, поэтому Незнайка ошибся бы не более 3 раз, противоречие. Если бы N не делилось на 3, то оно также бы не делилось на $9, 15, 18, 30$, поэтому Незнайка ошибся бы хотя бы 5 раз, противоречие. Следовательно, N делится на 3, но не делится на 30. Отсюда сразу следует, что N не делится на 10. Значит, среди утверждений про делимость на $4, 5, 9, 15, 18$ верны ровно три. Число N, делящееся на 3, не может одновременно делиться на 4 и 5 (иначе оно делилось бы и на 30). Следовательно, среди утверждений про делимость на $9, 15, 18$ верны хотя бы два. Если бы N не делилось на 9, то оно также бы не делилось и на 18, противоречие. Следовательно, N делится на 9. Кроме того, N делится на 15 или на 18. Рассмотрим два случая.

- Пусть N делится на 15. Поскольку оно также делится и на 9, то оно равно либо 45, либо 90. Но N не может быть равно 90, поскольку N не делится на 30. При этом N может быть равно 45 (ведь 45 делится на $3, 5, 9, 15$ и не делится на $4, 10, 18, 30$).
- Пусть N не делится на 15. Тогда оно делится на 18, и оно равно либо 18, либо 36, либо 54, либо 72, либо 90. Опять же, N не может быть равно 90, поскольку N не делится на 30. Также N не может быть равно 18 и 54 (ведь 18 и 54 оба делятся на $3, 9, 18$ и оба не делятся на $4, 5, 10, 15, 30$). При этом N может быть равно 36 или 72 (ведь 36 и 72 оба делятся на $3, 4, 9, 18$ и оба не делятся на $5, 10, 15, 30$).

Итого получилось три возможных варианта: 36, 45 и 72. □

Задача 11.6. Квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что $P(P(x)) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4$. Чему может равняться $P(8)$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 58.

Решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $P(P(x)) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c =$

$a(a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2) + b(ax^2 + bx + c) + c$. Следовательно,

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4 = P(P(x)) = \\ = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 = 1, \\ 2a^2b = -2, \\ ab^2 + 2a^2c + ab = 4, \\ 2abc + b^2 = -3, \\ ac^2 + bc + c = 4. \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу следует, что $a = 1$. Подставив $a = 1$ во второе уравнение, получим $2b = -2$, откуда $b = -1$. Подставив $a = 1$ и $b = -1$ в третье уравнение, получим $1 + 2c - 1 = 4$, откуда $c = 2$. Ясно, что $a = 1, b = -1, c = 2$ является решением этой системы, поэтому $P(x) = x^2 - x + 2$ и $P(8) = 8^2 - 8 + 2 = 58$. □

Задача 11.7. В стране 110 городов. Между каждыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет.

Автомобилист находился в некотором городе, из которого вела ровно одна дорога. Проехав по дороге, он оказался во втором городе, из которого вели уже ровно две дороги. Проехав по одной из них, он оказался в третьем городе, из которого вели уже ровно три дороги, и так далее. В какой-то момент, проехав по одной из дорог, он оказался в N-м городе, из которого вели уже ровно N дорог. На этом автомобилист своё путешествие прекратил. (Для каждого $2 \leqslant k \leqslant N$ из k-го города выходило ровно k дорог с учётом той, по которой автомобилист в этот город приехал.)

Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 107.

Решение. Пронумеруем города в порядке их посещения автомобилистом: $1, 2, 3, \ldots, N$.

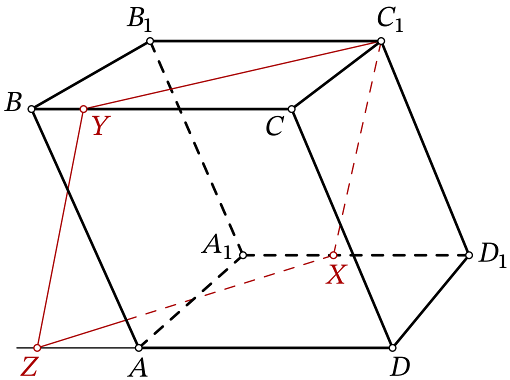
Предположим, $N \geqslant 108$. Из города 1 ведёт дорога только в город 2, поэтому из города 108 все дороги ведут во все 108 городов, кроме 1 и 108. Но тогда из города 2 ведёт хотя бы три дороги: в города 1, 3 и 108. Противоречие, значит, $N \leqslant 107$.

Приведём пример для $N = 107$. Пусть города имеют номера $1, 2, 3, \ldots, 109, 110$. Пусть

- для всех $1 \leqslant i \leqslant 54$ есть дорога из города i в город $i + 1$;
- для всех $56 \leqslant j \leqslant 107$ есть дороги из города j во все города с $110 - j$ по 110 включительно, кроме самого города j;
- из города 55 есть дороги в города 109 и 110;
- никаких других дорог в стране нет.

Несложно убедиться, что для всех $1 \leqslant k \leqslant 107$ из города k ведёт ровно k дорог. По этим городам и мог проехать автомобилист. □

Задача 11.8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре A_1D_1 выбрана точка X, а на ребре BC выбрана точка Y. Известно, что $A_1X = 5$, $BY = 3$, $B_1C_1 = 14$. Плоскость C_1XY пересекает луч DA в точке Z. Найдите DZ.



Ответ: 20.

Решение. Прямые C_1Y и ZX лежат в параллельных плоскостях BB_1C_1C и AA_1D_1D, поэтому не пересекаются. Поскольку эти две прямые также лежат в одной плоскости C_1XZY, то они параллельны. Аналогично, параллельны прямые YZ и C_1X. Следовательно, четырёхугольник C_1XZY — параллелограмм.

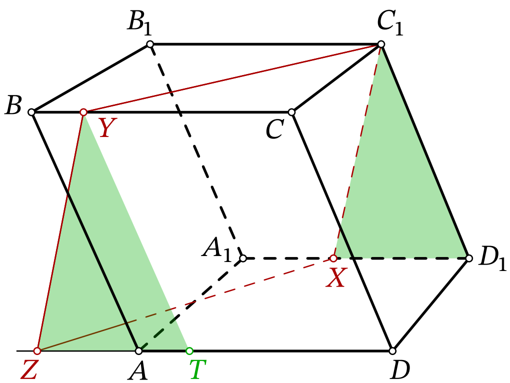


Рис. 15: к решению задачи 11.8

Отложим на AD отрезок AT, равный BY (рис. 15). Четырёхугольник $BYTA$ — параллелограмм, то есть отрезки YT, BA и C_1D_1 параллельны и равны. Кроме этого, параллельны и равны отрезки YZ и C_1X; из параллельностей следует равенство углов ZYT и XC_1D_1, что даёт равенство треугольников ZYT и XC_1D_1.

Тогда

$$DZ = ZT + AD - AT = XD_1 + B_1C_1 - BY =$$
$$= (A_1D_1 - A_1X) + B_1C_1 - BY = (14 - 5) + 14 - 3 = 20. \qquad \square$$

Другое решение. Как и в предыдущем решении, будем пользоваться тем, что C_1XZY — параллелограмм.

Рассмотрим цепочку векторных равенств:

$$\overrightarrow{DZ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{C_1X} = \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{D_1X}.$$

В последней части все векторы ориентированы так же, как $\overrightarrow{DZ}$, поэтому можно перейти к равенству отрезков и продолжить:

$$DZ = CY + D_1X = (CB - BY) + (D_1A_1 - A_1X) = 2B_1C_1 - BY - A_1X.$$

Подставляя данные в условии длины, получаем $DZ = 2 \cdot 14 - 3 - 5 = 20$. $\square$