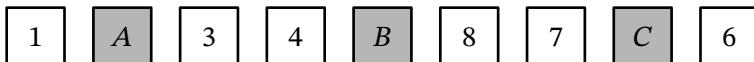


4 класс

Задача 4.1. На девяти карточках написаны числа от 1 до 9 (каждое — по одному разу). Эти карточки выложили в ряд так, что нет трёх подряд лежащих карточек, на которых числа идут по возрастанию, а также нет трёх подряд лежащих карточек, на которых числа идут по убыванию. Затем три карточки перевернули числом вниз, как показано на рисунке. Какие числа на них написаны?



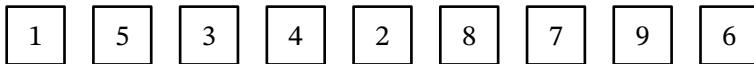
- Число на карточке A равно ...
- Число на карточке B равно ...
- Число на карточке C равно ...

Ответ: на карточке A написано число 5, на карточке B — 2, на карточке C — 9.

Решение. Недостающие числа — 2, 5 и 9.

Если число 5 будет на карточке B , то получатся подряд числа 3, 4, 5. Если число 5 будет на карточке C , то получатся подряд числа 8, 7, 5. Значит, число 5 может быть только на карточке A .

Если число 2 будет на карточке C , то получатся подряд числа 8, 7, 2. Значит, число 2 написано на карточке B , а 9 — на карточке C .



Получившийся вариант подходит. □

Задача 4.2. Найдите наименьшее число, у которого все цифры различны, а сумма всех цифр равна 32.

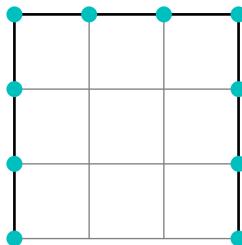
Ответ: 26789.

Решение. У четырёхзначного числа из различных цифр наибольшая возможная сумма цифр равна $9 + 8 + 7 + 6 = 30 < 32$, поэтому нужное нам число минимум пятизначное.

Постараемся сделать первую цифру как можно меньше. Ясно, что она не меньше 2. Поставим на первое место 2. Сумма оставшихся четырёх цифр 30, её можно получить только как $9 + 8 + 7 + 6$. Самую маленькую из этих цифр 6 ставим на второе место, следующую по величине цифру 7 — на третье место, 8 — на четвёртое, 9 — на пятое. □

Задача 4.3. Женя нарисовал квадрат со стороной 3 см, а затем одну из этих сторон стёр. Получилась фигура в виде буквы «П». Учительница попросила Женю расставить точки вдоль этой буквы «П», начиная с края, так, чтобы следующая точка была на расстоянии

1 см от предыдущей, как показано на рисунке, а затем посчитать, сколько получилось точек. Точек у него получилось 10.



Затем учительница решила усложнить задание и попросила посчитать число точек, но для буквы «П», полученной таким же образом из квадрата со стороной 10 см. Сколько точек будет у Жени в этот раз?

Ответ: 31.

Решение. Вдоль каждой из трёх сторон буквы «П» будет 11 точек. При этом «угловые» точки расположены сразу на двух сторонах, поэтому если 11 умножить на 3, то «угловые» точки будут учтены 2 раза. Значит, общее количество точек равно $11 \cdot 3 - 2 = 31$. \square

Задача 4.4. Лев Алекс решил посчитать полоски на зебре Марти (чёрные и белые полоски чередуются). Оказалось, что чёрных полосок на одну больше, чем белых. Также Алекс заметил, что все белые полоски одинаковой ширины, а чёрные бывают широкие и узкие, причём всего белых полосок на 7 больше, чем широких чёрных. Сколько всего у Марти узких чёрных полосок?

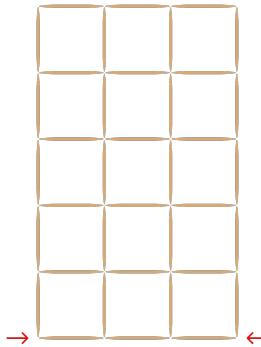
Ответ: 8.

Решение. Сначала посмотрим только на широкие чёрные полоски. Их на 7 меньше, чем белых. Если к широким чёрным полоскам добавить узкие чёрные, то это будут уже все чёрные полоски, которых на 1 больше, чем белых. Значит, для нахождения количества узких чёрных полосок нужно сначала «скомпенсировать» 7 белых полосок – число, на которое белых было больше, а затем добавить ещё одну. Получается $7 + 1 = 8$. \square

Задача 4.5. Хулиган Дима выложил из 38 деревянных зубочисток конструкцию в виде прямоугольника 3×5 . Затем он одновременно поджёг два соседних угла этого прямоугольника, отмеченных на рисунке.

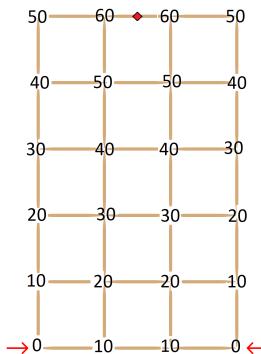
Известно, что одна зубочистка сгорает за 10 секунд. За сколько секунд сгорит вся эта конструкция?

(Огонь распространяется по зубочисткам с постоянной скоростью. Огонь продолжает распространяться с каждой сгоревшей зубочистки на все примыкающие к ней несгоревшие зубочистки.)



Ответ: 65.

Решение. На картинке ниже для каждого «узла», места соединения зубочисток, указано, за сколько секунд доберётся до него огонь. До середины средней зубочистки в верхнем горизонтальном ряду (отмечено на картинке) огонь будет добираться ещё 5 секунд.



□

Задача 4.6. Разведчик хочет передать сообщение, состоящее из нескольких написанных в ряд букв А, Б и В. Для секретности каждая буква кодируется: буква А заменяется на 011, буква Б — на 01, буква В — на 10. Используя данную кодировку, разведчик получил код

011011010011.

Появилась информация, что данную кодировку расшифровали, в связи с чем разведчику придётся использовать запасную кодировку. В ней буква А заменяется на 21, буква Б — на 122, буква В — на 1. Какой код получится у данного сообщения в новой кодировке?

Ответ: 211221121.

Решение. Посмотрим на правый конец кода. Две единицы в конце могут получиться только из буквы А: 011011010011.

А

Далее смотрим на самую правую цифру из тех, про которую ещё не разгадали, из какой буквы она получилась. Цифра 0 на конце есть только у В: 011011010011.

В А

Аналогично предыдущая буква тоже В: 011011010011.

Б В А

Теперь «не разгаданная» самая правая цифра — 1. Перед ней стоит 0. Такое может получиться только из буквы Б: 011011010011.

Б В В А

«Не разгаданные» цифры справа — две единицы. Такое может получиться только из А: 011011010011.

А Б В В А

Полученное сообщение АБВВА кодируем по-новому и получаем 211221121. □

Задача 4.7. Школьники Александр, Борис, Сергей, Дарья и Елена с понедельника по пятницу посещали занятия хора. Известно, что:

- в каждый из пяти дней ровно трое из школьников присутствовали, а ровно двое отсутствовали;
- никто из школьников не отсутствовал два дня подряд и никто не присутствовал три дня подряд;
- Елена пропустила на два дня больше, чем Борис;
- был только один день, когда Александр и Сергей одновременно были на занятиях;
- в понедельник Сергей был на занятиях.

Кто из школьников был на занятиях в пятницу?

Ответ: Александр, Борис, Дарья.

Решение. Поскольку никто не присутствовал три дня подряд, то максимальное число дней, в которые можно быть на занятиях, — это 4. При этом 4 занятия в неделю возможны, только если пропустить среду. Поскольку нельзя пропустить два дня подряд, то минимальное число дней, в которые можно быть на занятиях, — это 2. При этом 2 занятия в неделю возможны, только если они во вторник и четверг. Елена пропустила на два дня больше, чем Борис. Значит, Елена посетила ровно два дня (эти дни обязательно вторник и четверг), а Борис посетил ровно четыре дня (эти дни обязательно понедельник, вторник, четверг и пятница). Внесём полученную информацию в таблицу, также в ней укажем, что Сергей был в понедельник.

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр					
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+				
Дарья					
Елена	-	+	-	+	-

В среду уже есть двое отсутствующих: Борис и Елена. Значит, все остальные в среду были.

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр			+		
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+		+		
Дарья			+		
Елена	-	+	-	+	-

Есть только один день, когда Александр и Сергей были одновременно — это среда. Поскольку Сергей был в понедельник, значит Александра в понедельник не было. Тогда он был во вторник (потому что нельзя пропускать два дня подряд) и не был в четверг (потому что никто не присутствовал три дня подряд).

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+		+		
Дарья			+		
Елена	-	+	-	+	-

Дарья должна была прийти в понедельник, чтобы было трое присутствующих. Кроме того, во вторник уже есть трое присутствующих, поэтому Сергея и Дарьи во вторник не было.

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+	-	+		
Дарья	+	-	+		
Елена	-	+	-	+	-

Александр точно был в пятницу (нельзя отсутствовать два дня подряд). Тогда Сергей не был в пятницу (уже есть общий день с Александром) и был в четверг (нельзя пропускать два дня подряд).

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	+
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+	-	+	+	-
Дарья	+	-	+		
Елена	-	+	-	+	-

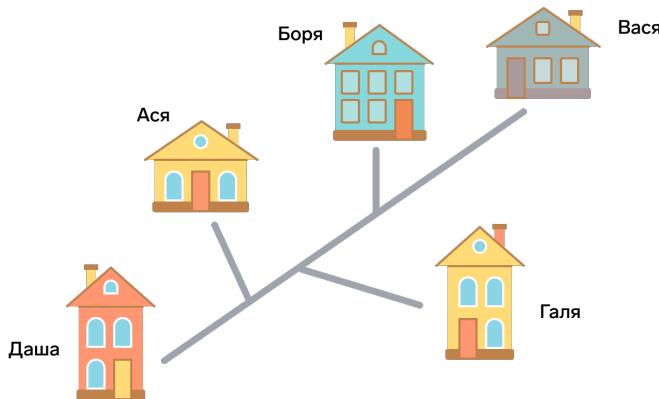
В четверг есть три посещения, поэтому Дарья в четверг не была, а была в пятницу (нельзя пропускать два дня подряд).

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	+
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+	-	+	+	-
Дарья	+	-	+	-	+
Елена	-	+	-	+	-

Итак, в пятницу на занятиях были только Александр, Борис и Дарья.

□

Задача 4.8. На рисунке изображена схема дорог между домами пяти ребят. От Аси до Гали кратчайшее расстояние по дорогам 12 км, от Гали до Бори — 10 км, от Аси до Бори — 8 км, от Даши до Гали — 15 км, от Васи до Гали — 17 км. Сколько километров составляет кратчайшее расстояние по дорогам от Даши до Васи?



Ответ: 18.

Решение. Сложим расстояния от Даши до Гали и от Васи до Гали: $15 + 17 = 32$. Будет посчитана «основная» дорога (от Даши до Васи) и дважды «ответвление» от неё к Гале.

К полученной сумме добавим расстояние от Аси до Бори: $32 + 8 = 40$. Будут посчитаны все три ответвления (к Гале — дважды), основная дорога тоже будет посчитана, причём

участок на ней между первым и третьим ответвлением — дважды.

Вычтем из полученного значения два оставшихся расстояния: от Аси до Гали и от Гали до Бори: $40 - 12 - 10 = 18$. Теперь будет посчитана только основная дорога. \square

5 класс

Задача 5.1. В некотором месяце некоторого года ровно 5 пятниц. При этом первый и последний день этого месяца — не пятницы. Каким днём недели является 12-е число месяца?

Ответ: понедельник.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты, каким днём недели могло быть 1-е число месяца.

Предположим, что первое число этого месяца — понедельник. Тогда пятницы — 5-е, 12-е, 19-е, 26-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — вторник. Тогда пятницы — 4-е, 11-е, 18-е, 25-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — среда. Тогда пятницы — 3-е, 10-е, 17-е, 24-е и 31-е числа. Их пять, но пятница — последний день месяца. Нам снова не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — четверг. Тогда пятницы — 2-е, 9-е, 16-е, 23-е и 30-е числа. Подходит, если в месяце 31 день. И в этом случае получается, что 12-е число — понедельник.

Первым числом пятница быть не может.

Предположим, что первое число этого месяца — суббота. Тогда пятницы — 7-е, 14-е, 21-е, 28-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — воскресенье. Тогда пятницы — 6-е, 13-е, 20-е, 27-е. Их только четыре — нам не подходит. \square

Задача 5.2. За круглый стол рассадили несколько человек так, что между соседними людьми расстояния одинаковые. Одному из них дали табличку с номером 1 и дальше по часовой стрелке раздали всем таблички с номерами 2, 3 и т. д.

Человек с табличкой с номером 31 заметил, что от него до человека с табличкой с номером 7 такое же расстояние, как и до человека с табличкой с номером 14. Сколько всего людей сели за стол?

Ответ: 41.

Решение. Чтобы такая ситуация была возможна, людей от 31-го до 14-го нужно считать по кругу в сторону уменьшения номеров, а от 31-го до 7-го — по кругу в сторону увеличения номеров.

Между 31-м и 14-м сидит 16 человек. Значит, между 31-м и 7-м тоже 16 человек. Среди них 6 с номерами от 1 до 6, тогда оставшиеся $16 - 6 = 10$ человек — это люди с номерами от 32-го. Самый большой номер получается 41. \square

Задача 5.3. На рисунке изображён план системы дорог некоторого города. В этом городе 8 прямых улиц, а 11 перекрёстков названы латинскими буквами A, B, C, \dots, J, K .

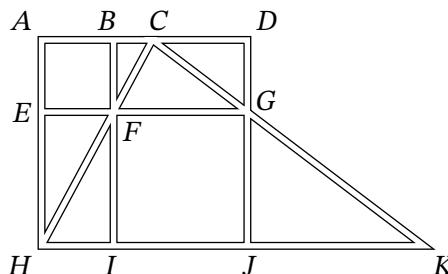
На некоторые три перекрёстка надо поставить по полицейскому так, чтобы на каждой из 8 улиц стоял хотя бы один полицейский. На какие именно три перекрёстка надо поставить полицейских? Достаточно указать хотя бы один подходящий вариант расположения.

Все улицы направлены вдоль прямых линий.

Горизонтальные улицы: $A-B-C-D$, $E-F-G$, $H-I-J-K$.

Вертикальные улицы: $A-E-H$, $B-F-I$, $D-G-J$.

Наклонные улицы: $H-F-C$, $C-G-K$.



Ответ: B, G, H .

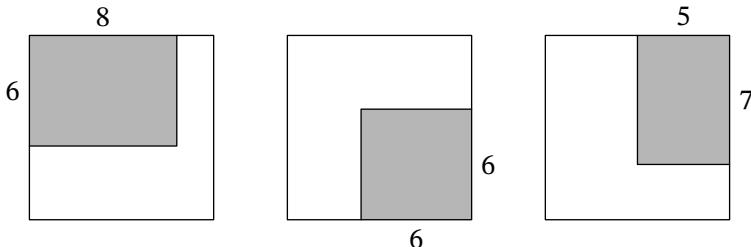
Решение. Подойдёт вариант, если поставить полицейских на перекрёстках B, G, H . Можно показать, что это единственный возможный вариант.

Поскольку вертикальных улиц всего три, и на каждой из них должно быть по полицейскому, то на перекрёстках C и K полицейских точно нет. Поэтому на перекрёстке G точно должен быть полицейский. Тогда на улице $E-F-G$ полицейских больше нет (поскольку на улицах $A-B-C-D$ и $H-I-J-K$ есть хотя бы по одному полицейскому). На улице $C-F-H$ должен быть полицейский, и его можно поставить только на перекрёстке H . Незакрытой остаются улицы $A-B-C-D$ и $B-F-I$, поэтому третьего полицейского нужно поставить на перекрёстке B . \square

Задача 5.4. Директор школы, завхоз и родительский комитет, не договорившись друг с другом, купили по ковру для школьного актового зала размером 10×10 . Подумав, что же делать, они решили положить все три ковра так, как показано на картинке: первый ковёр

6×8 — в один угол, второй ковёр 6×6 — в противоположный угол и третий ковёр 5×7 — в один из оставшихся углов (все размеры указаны в метрах).

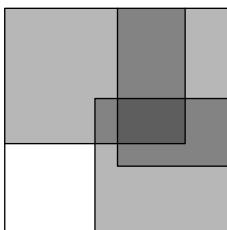
Найдите площадь части зала, накрытой коврами в три слоя (ответ дайте в квадратных метрах).



Ответ: 6.

Решение. Все размеры будем считать в метрах, а площадь — в квадратных метрах.

Посмотрим на перекрытие второго и третьего ковров. Это будет прямоугольник 5×3 (5 по горизонтали, 3 по вертикали), прилегающий к правой стороне квадратной комнаты, 4 — расстояние от верхней стороны, 3 — от нижней.



С первым ковром этот прямоугольник пересекается по горизонтали между 5-м и 8-м метрами от левой стороны квадратной комнаты, по вертикали — между 4-м и 6-м метрами от верхней стороны. В итоге получается прямоугольник 2×3 , площадь которого равна 6. □

Задача 5.5. На кружки по математике записалось несколько школьников. Их хотят распределить по группам равномерно — таким образом, чтобы количество учеников в любых двух группах отличалось не более чем на 1.

В результате такого равномерного деления получилось 6 групп, среди которых ровно 4 группы по 13 учеников. Сколько всего могло быть школьников? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 76 или 80.

Решение. Так как количество учеников в группах отличается не более, чем на 1, то в оставшихся двух группах может быть по 12 или по 14 учеников (ясно, что групп из 12 и 14 уч-

ников одновременно быть не может). Значит, общее количество учеников может быть равно $13 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 76$ или $13 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 80$. \square

Задача 5.6. Несколько камней разложены в 5 кучек. Известно, что

- в пятой кучке камней в шесть раз больше, чем в третьей;
- во второй кучке камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе взятых;
- в первой кучке камней втрое меньше, чем в пятой, и на 10 меньше, чем в четвёртой;
- в четвёртой кучке камней в два раза меньше, чем во второй.

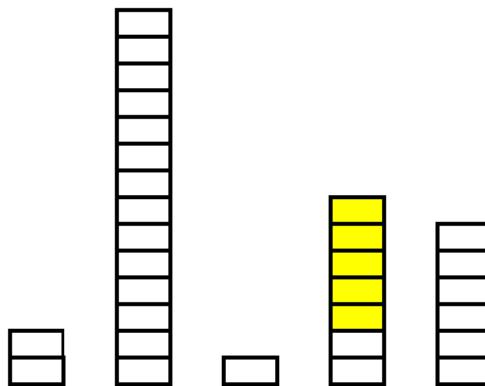
Сколько всего суммарно камней в этих пяти кучках?

Ответ: 60.

Решение. Обозначим количество камней в третьей кучке в виде прямоугольника. Тогда, так как в пятой кучке камней в 6 раз больше, то можно представить это в виде 6 прямоугольников. Во второй кучке количество камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе, то есть $(1 + 6) \cdot 2 = 14$ прямоугольников. В первой втрое меньше, чем в пятой, то есть $6 : 3 = 2$ прямоугольника. В четвёртой в два раза меньше, чем во второй, то есть $14 : 2 = 7$ прямоугольников.

При этом также известно, что в первой кучке камней на 10 меньше, чем в четвёртой. Тогда 5 прямоугольников соответствуют 10 камням. Значит, 1 прямоугольник = 2 камня.

Всего $2 + 14 + 1 + 7 + 6 = 30$ прямоугольников. Это $30 \cdot 2 = 60$ камней.



Задача 5.7. После чемпионата мира по хоккею три журналиста написали статью о сборной Германии — каждый для своей газеты.

- Первый написал: «Сборная Германии за весь чемпионат забила больше 10, но меньше 17 шайб».

- Второй: «Сборная Германии забила больше 11, но меньше 18 шайб за весь чемпионат».
- Третий: «Сборная Германии забила нечётное количество шайб за весь чемпионат».

В итоге оказалось, что правы были только два журналиста. Сколько шайб могла забить сборная Германии на чемпионате? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 11, 12, 14, 16 или 17.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты.

Если шайб забито не больше 10, то для нечётного количества шайб будет верно одно утверждение, а для чётного — ноль. Не подходит.

Если забито 11 шайб, то верны ровно два утверждения. Подходит.

Если шайб забито от 12 до 16, то для нечётного количества шайб верны все три утверждения, а для чётного — два. Подходят только чётные значения: 12, 14, 16.

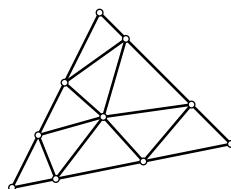
Если забито 17 шайб, то верны ровно два утверждения. Подходит.

Если шайб забито не меньше 18, то для нечётного количества шайб верно одно утверждение, а для чётного — ноль. Не подходит.

Итак, нам подходят пять значений: 11, 12, 14, 16, 17. □

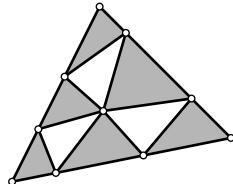
Задача 5.8. Внутри большого треугольника периметра 120 провели несколько отрезков, которые разделили его на девять меньших треугольников, как показано на рисунке. Оказалось, что периметры всех девяти маленьких треугольников равны между собой. Чему они могут быть равны? Укажите все возможные варианты.

Периметр фигуры — сумма длин всех её сторон.



Ответ: 40.

Решение. Сложим периметры шести маленьких треугольников, отмеченных серым на следующем рисунке:



Из полученного значения вычтем периметры остальных трёх маленьких белых треугольников. Поскольку периметры маленьких треугольников равны, то, с одной стороны, получится утроенный периметр маленького треугольника. С другой стороны, в такой сумме будут только отрезки, составляющие периметр большого треугольника, равный 120. Значит, периметр маленького треугольника равен $120 : 3 = 40$. \square

6 класс

Задача 6.1. Пять последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма трёх самых маленьких из них равна 60. Чему равна сумма трёх самых больших?

Ответ: 66.

Решение. Пятое число на 4 больше первого, а четвёртое — на 2 больше второго. Тогда сумма трёх самых больших чисел на $2 + 4 = 6$ больше суммы трёх самых маленьких, и она равна $60 + 6 = 66$. \square

Задача 6.2. Аркадий, Борис, Вера, Гая, Даня и Егор встали в хоровод.

- Даня встал рядом с Верой, справа от неё,
- Гая встала напротив Егора,
- Егор встал рядом с Даней,
- Аркадий и Гая не захотели стоять рядом.

Кто стоит рядом с Борисом?

Ответ: Аркадий и Гая.

Решение. Из первого и третьего утверждения следует, что Вера, Даня, Егор стоят именно в таком порядке против часовой стрелке. Поскольку всего в хороводе шесть человек, то напротив Егора, то есть слева от Веры, стоит Гая. Остались Аркадий и Борис. Поскольку Аркадий и Гая не стоят рядом, то слева от Гали стоит Борис, а слева от Бориса — Аркадий. Получается такое расположение:

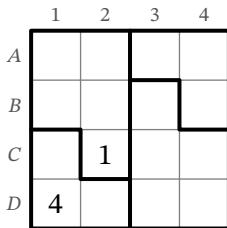
Борис	Галя	Аркадий
Вера		Егор
	Даня	

Рядом с Борисом — Аркадий и Галя. □

Задача 6.3. В клетках таблицы 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, 4 так, что

- каждое из чисел встречается в каждой строке и в каждом столбце;
- во всех четырёх частях, изображённых на рисунке, суммы чисел равны.

По двум числам на рисунке определите, в каких клетках стоят двойки.



Постройте соответствие.

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| • В строчке A двойка стоит | • в столбце с номером 1. |
| • В строчке B двойка стоит | • в столбце с номером 2. |
| • В строчке C двойка стоит | • в столбце с номером 3. |
| • В строчке D двойка стоит | • в столбце с номером 4. |

Ответ: В строчке A двойка стоит в столбце 2, в строчке B — 1, в строчке C — 4, в строчке D — 3.

Решение. Сначала найдём, чему равна сумма чисел в каждой из частей, на которые разделена доска. В каждом столбце по разу встречаются числа от 1 до 4. Их сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, а во всей доске сумма всех чисел равна $10 \cdot 4 = 40$. Поскольку во всех частях суммы чисел равны, то они равны $40 : 4 = 10$.

Посмотрим на левый нижний уголок из трёх клеток. Одно из чисел — четвёрка, поэтому сумма двух других должна быть равна $10 - 4 = 6$. При этом эти два числа не могут быть четвёрками, так как четвёрка уже есть с ними в одной линии. Единственный возможный вариант — две тройки. Получаем, что в клетках $C1$ и $D2$ стоят тройки.

В правом верхнем трёхклеточном уголке сумма трёх чисел тоже равна 10. Такая сумма может быть получена либо как $4 + 3 + 3$, либо как $4 + 4 + 2$. При этом в первом случае в клетке $A4$ должна быть четвёрка, а во втором — двойка.

В клетках $C3$ и $C4$ в каком-то порядке стоят двойка и четвёрка, в клетках $D3$ и $D4$ — единица и двойка. Тогда в клетке $B3$ число равно $10 - 2 - 4 - 1 - 2 = 1$.

В клетках $A4$ и $B4$ записаны либо четвёрка и тройка, либо четвёрка и двойка. Четвёрка там в любом случае есть, поэтому в клетке $C4$ четвёрки быть не может, значит, в $C4$ двойка, а в $C3$ четвёрка.

В правом столбце двойка уже есть, значит, в клетке $D4$ единица, а в клетке $D3$ двойка.

Рассмотрим опять самый правый столбец. Там уже определились единица и двойка, значит, в оставшихся двух верхних клетках тройка и четвёрка, причём обязательно в клетке $A4$ четвёрка, а в клетке $B4$ тройка. Также мы сразу можем определить, что в клетке $A3$ тройка.

В верхней строке уже есть четвёрка. Во втором столбце не хватает двойки и четвёрки. Получается, что в клетке $A2$ двойка, а в клетке $B2$ четвёрка.

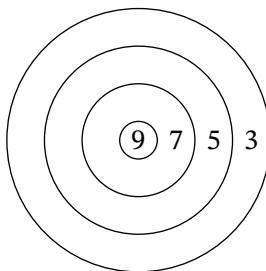
Оставшиеся пустые верхние клетки первого столбца заполняются без труда: в клетке $A1$ единица, а в клетке $B1$ двойка.

	1	2	3	4
A	1	2	3	4
B	2	4	1	3
C	3	1	4	2
D	4	3	2	1

Итак, двойки находятся в клетках $A2, B1, C4, D3$. □

Задача 6.4. Миша летом на даче изготовил себе самодельный дартс. Круглая доска разделена окружностями на несколько секторов — в неё можно кидать дротики. За попадание даётся столько очков, сколько написано в секторе, как указано на рисунке.

Миша кидал 3 раза по 8 дротиков. Во второй раз он выбил в 2 раза больше очков, чем в первый, а в третий раз в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько он выбил очков во второй раз?



Ответ: 48.

Решение. Наименьшая возможная сумма очков, которую можно выбрать восемью дротиками, равна $3 \cdot 8 = 24$. Тогда во второй раз Миша выбил не меньше $24 \cdot 2 = 48$ очков, а в третий — не меньше $48 \cdot 1,5 = 72$.

С другой стороны, $72 = 9 \cdot 8$ — это наибольшая возможная сумма очков, которую можно выбрать восемью дротиками. Значит, в третий раз Миша выбил ровно 72 очка, а во второй — ровно 48. \square

Задача 6.5. Несколько одноклассников вместе съели торт. Лёша съел больше всех — $\frac{1}{11}$ от всего торта, а Алёна — меньше всех — $\frac{1}{14}$ от всего торта. Сколько одноклассников ели торт? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 12 или 13.

Решение. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{11}$ торта, как Лёша, то человек в классе было бы 11. Но так как каждый, кроме Лёши, съел меньше $\frac{1}{11}$, то всего людей больше 11, то есть хотя бы 12.

Аналогичными соображениями покажем, что людей не больше 13. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{14}$ торта, как Алёна, то человек в классе было бы 14. Но так как все, кроме Алёны, съели больше $\frac{1}{14}$, то всего людей меньше 14, то есть не больше 13.

Осталось два возможных варианта: 12 и 13. Покажем, что они оба возможны.

После того, как Лёша взял $\frac{1}{11}$ торта, а Алёна взяла $\frac{1}{14}$ торта, всё оставшееся мы раздадим поровну всем остальным (остальных — 10 или 11 человек). Поймём, почему каждому из них достанется менее $\frac{1}{11}$ торта, но более $\frac{1}{14}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не менее $\frac{1}{11}$ торта. Кроме Алёны человек в классе не менее 11, каждый из них съел суммарно не менее $\frac{1}{11}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Алёны, съели не менее $\frac{11}{11} = 1$, то есть целый торт. Но тогда Алёне было нечего не досталось, противоречие. Значит, всем остальным досталось менее $\frac{1}{11}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не более $\frac{1}{14}$ торта. Кроме Лёши человек в классе не более 12, каждый из них съел суммарно не более $\frac{1}{14}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Лёши, съели не более $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ торта. Тогда оставшиеся не менее $\frac{1}{7}$ торта должны съесть Лёша, но он съел всего лишь $\frac{1}{11} < \frac{1}{7}$, противоречие. Значит, всем остальным досталось более $\frac{1}{14}$ торта. \square

Задача 6.6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 65 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявление: «Среди сделанных ранее заявлений истинных ровно на 20 меньше, чем ложных». Сколько рыцарей было на этом заседании?

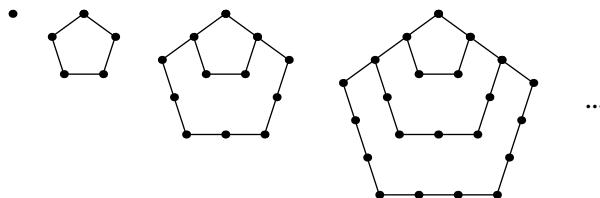
Ответ: 23.

Решение. Первые 20 человек — лжецы, потому что до них всего было сделано не больше 19 заявлений, а значит, истинных не может быть ровно на 20 меньше, чем ложных.

Далее 21-й человек говорит правду (ведь до него было ровно 20 ложных заявлений), значит, он рыцарь. Затем 22-й говорит неправду (до него было 20 ложных и 1 истинное заявление), значит, он лжец. Далее 23-й человек говорит правду (ложных заявлений опять стало на 20 больше, чем истинных), значит, 23-й рыцарь, и так далее.

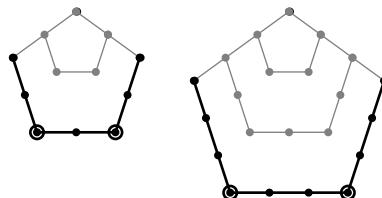
Среди людей, начиная с 21-го, те, кто с нечётными номерами, — рыцари, а те, кто с чётными, — лжецы. Среди чисел от 21 до 65 включительно ровно 23 нечётных, поэтому и рыцарей на заседании было ровно 23. \square

Задача 6.7. Аня расставляет камешки на песке. Сначала она поставила один камень, потом добавила камешки, чтобы получился пятиугольник, затем сделала из камешков внешний большой пятиугольник, после этого ещё один внешний пятиугольник и т. д., как на рисунке. Количество камней, которые у неё были расставлены на первых четырёх картинках: 1, 5, 12 и 22. Если продолжать составлять такие картинки дальше, то сколько камней будет на 10-й картинке?



Ответ: 145.

Решение. На второй картинке 5 камней. Чтобы из неё получить третью картинку, нужно добавить три отрезка с тремя камнями на каждом. Угловые камни посчитываются два раза, поэтому всего камней на третьей картинке будет $5 + 3 \cdot 3 - 2 = 12$.



Чтобы из третьей картинки получить четвёртую, нужно добавить три отрезка с четырьмя камнями на каждом. Угловые камни посчитываются два раза, поэтому всего камней будет $12 + 3 \cdot 4 - 2 = 22$.

Аналогично посчитаем количество камней на каждой из остальных картинок:

$$\text{на 5-й: } 22 + 3 \cdot 5 - 2 = 35;$$

$$\text{на 6-й: } 35 + 3 \cdot 6 - 2 = 51;$$

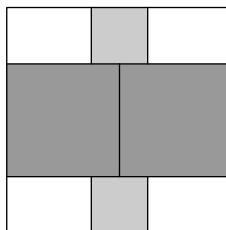
$$\text{на 7-й: } 51 + 3 \cdot 7 - 2 = 70;$$

на 8-й: $70 + 3 \cdot 8 - 2 = 92$;

на 9-й: $92 + 3 \cdot 9 - 2 = 117$;

на 10-й: $117 + 3 \cdot 10 - 2 = 145$. \square

Задача 6.8. Крест, состоящий из двух одинаковых больших и двух одинаковых маленьких квадратов, поместили внутрь ещё большего квадрата. Вычислите в сантиметрах сторону самого большого квадрата, если площадь креста — 810 см^2 .



Ответ: 36.

Решение. Длины стороны двух больших квадратов вместе дают сторону внешнего (самого большого) квадрата. Значит, стороны больших квадратов равны $\frac{1}{2}$ стороны внешнего квадрата, а площадь каждого из них равна $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ площади внешнего.

Длины сторон двух меньших квадратов вместе со стороной большего квадрата в сумме дают сторону внешнего квадрата. Значит, стороны меньших квадратов равны $\frac{1}{4}$ стороны внешнего квадрата, а площадь каждого из них равна $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ площади внешнего.

Общая площадь креста равна $2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16} = \frac{10}{16}$ площади внешнего квадрата и равна 810 см^2 . Значит, $\frac{1}{16}$ площади внешнего квадрата равна $810 : 10 = 81 \text{ см}^2$, а площадь всего внешнего квадрата равна $81 \cdot 16 = (9 \cdot 4)^2 \text{ см}^2$. Тогда его сторона равна $9 \cdot 4 = 36 \text{ см}$. \square

7 класс

Задача 7.1. Саша и Ваня играют в игру. Саша задаёт Ване вопросы. Если Ваня отвечает на вопрос правильно, то Саша даёт ему 7 конфет. Если же Ваня отвечает неправильно, то он даёт Саше 3 конфеты. После того, как Саша задал 50 вопросов, оказалось, что у каждого из них столько же конфет, сколько было в начале. На сколько вопросов Ваня ответил правильно?

Ответ: 15.

Решение. Пусть Ваня ответил правильно на x вопросов, тогда неправильно он ответил на $50 - x$ вопросов. Значит, в процессе игры Ваня получил $7x$ конфет и отдал $3(50 - x)$ конфет. Поскольку у обоих ребят после игры общее количество конфет не изменилось, получаем $7x = 3(50 - x)$. Решая его, находим $x = 15$.

Замечание. Тот же ответ можно было получить, поняв, что для «уравнивания конфет» Ваня каждые 3 правильных ответа должен «компенсировать» 7 неправильными. □

Задача 7.2. На День учителя благодарные ученики подарили Егору Сергеевичу несколько железнодорожных билетов, чтобы он совершил путешествие по России.

Билеты были для проезда между следующими парами городов:

- Санкт-Петербург и Тверь,
- Ярославль и Нижний Новгород,
- Москва и Казань,
- Нижний Новгород и Казань,
- Москва и Тверь,
- Москва и Нижний Новгород.

Билеты были с открытой датой: по каждому билету можно проехать один раз в любую сторону между городами.

Егор Сергеевич в итоге смог побывать ровно по одному разу в шести городах. В каком городе могло начаться путешествие? Укажите все возможные варианты.

Ответ: Санкт-Петербург или Ярославль.



Рис. 1: к решению задачи 7.2

Решение. Все доступные пути изображены на рис 1. Из Санкт-Петербурга и Ярославля выходит по одной дороге, поэтому каждый из этих городов должен быть в пути начальным или конечным.

Оба варианта возможны. Маршрут Санкт-Петербург — Тверь — Москва — Казань — Нижний Новгород — Ярославль начинается в Санкт-Петербурге. Если проехать этот маршрут в обратном порядке, то первым городом будет Ярославль. □

Задача 7.3. В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?

16		
		10
8		12

Ответ: 34.

Решение. Пусть a — число в правой верхней клетке, а b — число в центральной клетке.

У суммы диагонали с числом 8 с суммой чисел в правом столбце есть общее слагаемое a , поэтому $8 + b = 10 + 12$, откуда $b = 14$. У сумм трёх чисел по обеим диагоналям есть общее число b , поэтому $16 + 12 = 8 + a$, откуда $a = 20$. Следовательно, $a + b = 20 + 14 = 34$. \square

Замечание. Можно расставить и остальные числа, чтобы убедиться, что условие задачи корректно:

16	6	20
18	14	10
8	22	12

Задача 7.4. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?

Ответ: 38.

Решение. Пусть ручка стоит r рублей. Тогда числа 357 и 441 делятся на d . Поскольку наибольший общий делитель чисел $357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$ и $441 = 3^2 \cdot 7^2$ равен $3 \cdot 7$, то и 21 делится на r . Поскольку $r > 10$, то $r = 21$. Тогда всего ручек было куплено $\frac{357}{21} + \frac{441}{21} = 17 + 21 = 38$. \square

Задача 7.5. В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно селить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе селить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?

Ответ: 37.

Решение. Все фанаты делятся на шесть групп: мужчины/женщины, болеющие за первую команду; мужчины/женщины, болеющие за вторую команду; мужчины/женщины, болеющие за третью команду. В одну комнату можно селить только людей из одной группы.

Количество людей в каждой из шести групп поделим с остатком на 3. Если в какой-то группе получился остаток 1, поселим любого 1 человека из неё в отдельный номер. Если получился остаток 2, поселим любых 2 человека из неё в отдельный номер. Теперь в каждой группе количество нерасселённых фанатов делится на 3.

После того, как мы расселили остатки каждой группы, осталось сколько-то нерасселённых людей. Это суммарное количество не больше 100 и не меньше 88 (ведь все шесть остатков в сумме дают не более $6 \cdot 2 = 12$, а $100 - 12 = 88$). При этом это число делится на 3, поэтому оно равно одному из значений 90, 93, 96.99 (и всех соответствующих людей можно расселить в комнаты по три человека). Рассмотрим несколько случаев.

- Если осталось 90 человек, то им нужно $90 : 3 = 30$ комнат, остальным 10 людям из 6 групп точно хватит 6 комнат. Всего нужно не больше 36 комнат.
- Если осталось 93 человека, то им нужна $93 : 3 = 31$ комната, остальным 7 людям из 6 групп точно хватит 6 комнат. Всего нужно не больше 37 комнат.
- Если осталось 96 человек, то им нужно $96 : 3 = 32$ комнаты, остальным 4 людям точно хватит 4 комнаты. Всего нужно не больше 36 комнат.
- Если осталось 99 человек, то им нужно $99 : 3 = 33$ комнаты, оставшемуся одному точно хватит 1 комнаты. Всего нужно не больше 34 комнат.

Таким образом, 37 комнат точно хватит.

Также приведём пример, когда необходимо хотя бы 37 комнат. Пусть распределение людей по шести группам такое: 20, 16, 16, 16, 16, 16. Для группы из 20 человек необходимо выделить не менее 7 комнат, для каждой из остальных — не менее 6 комнат. Итого необходимо не менее $7 + 6 \cdot 5 = 37$ комнат. \square

Задача 7.6. В классе учатся 25 школьников, каждый из которых либо отличник, либо хулиган. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды 5 учеников этого класса сказали: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников будет больше половины хулиганов».

Каждый из оставшихся 20 сказал: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников хулиганов будет в три раза больше, чем отличников».

Сколько отличников учится в классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5 или 7.

Решение. Назовём *первой группой* всех людей, сказавших первую фразу, и *второй группой* всех людей, сказавших вторую фразу. Рассмотрим два случая.

- Пусть во второй группе есть хотя бы отличник, выберем любого из них. Среди 24 остальных людей хулиганов в три раза больше, чем отличников, поэтому всего хулиганов ровно 18, а отличников ровно $6 + 1 = 7$.

Заметим, что такая ситуация возможна: в первой группе было 5 отличников, сказавших правду (ведь $18 > \frac{24}{2}$), а во второй группе было 2 отличника, сказавших правду (ведь $18 = 3 \cdot 6$), а также 18 хулиганов, сказавших неправду (ведь $17 \neq 3 \cdot 7$).

- Пусть во второй группе вообще нет отличников, тогда всего хулиганов хотя бы 20. Тогда любой человек из первой группы сказал правду (ведь 19, и 20 составляют больше половины от 24), поэтому все 5 человек в первой группе — отличники, и отличников в классе ровно 5.

Заметим, что такая ситуация возможна: в первой группе было 5 отличников, сказавших правду (ведь $20 > \frac{24}{2}$), а во второй группе было 20 хулиганов, сказавших неправду (ведь $19 \neq 3 \cdot 5$). \square

Задача 7.7. Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы.

Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?

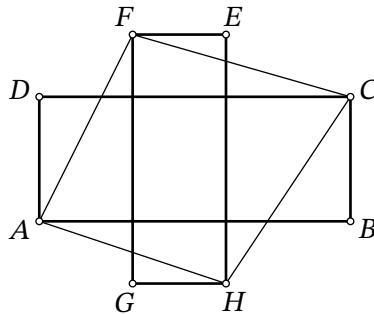
Ответ: 114.

Решение. Рассмотрим число 2. Меньше него только число 1. Так как оно единственное, то оно не может быть ни в одной из групп относительно числа 2. Значит, 1 должно быть напротив 2.

Рассмотрим число 4. Чисел, которые меньше него, три — нечётное количество. Значит, одно из них не должно входить ни в одну из групп относительно числа 4, т. е. должно быть напротив. Так как 1 и 2 уже стоят друг напротив друга, то напротив 4 стоит 3.

Продолжая аналогичные рассуждения и дальше, получаем, что напротив любого чётного числа стоит нечётное число, которое на 1 меньше его. Таким образом, напротив числа 114 стоит число 113. И наоборот: напротив 113 стоит 114. \square

Задача 7.8. На прямоугольном листе бумаги нарисовали картинку в форме «креста» из двух прямоугольников $ABCD$ и $EFGH$, стороны которых параллельны краям листа. Известно, что $AB = 9$, $BC = 5$, $EF = 3$, $FG = 10$. Найдите площадь четырёхугольника $AFCH$.



Ответ: 52,5.

Решение. Два исходных прямоугольника в пересечении образуют «маленький» прямоугольник со сторонами 5 и 3. Его площадь равна 15.

Продлим отрезки DA , CH , BC , EF до прямых. Они образуют «большой» прямоугольник со сторонами 9 и 10, содержащий «крест» (рис. 2). Его площадь равна 90.

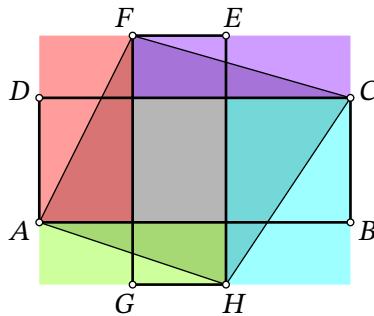


Рис. 2: к решению задачи 7.8

Площадь «большого» прямоугольника состоит из площади «маленького» и площади «кольца», которое, в свою очередь, можно представить как четыре прямоугольника с диагоналями AF , FC , CH , HA . Диагонали делят площадь каждого из этих прямоугольников пополам. Четырёхугольник $AFCH$ состоит из одной половины каждого такого прямоугольника и из «маленького» прямоугольника.

Посчитаем площадь $AFCH$. Площадь «кольца» из четырёх прямоугольников равна разности площадей «большого» и «маленького», то есть $90 - 15 = 75$. Общая площадь четырёх треугольников равна $75 : 2 = 37,5$. Тогда искомая площадь равна $15 + 37,5 = 52,5$. \square