## Вариант 3.

**Ответы**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 9 | 0,4 | 3 | 44 | 19 | 60 | 1 | 30 | 35000 | 2 |

**Решения заданий 13-19**

**Задание 13**

а) Решите уравнение $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

**Решение.**

а) Заметим, что: $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = \dfrac{3^{\cos x}}{3^{2\cos^2 x}} = 3^{\cos x - 2\cos^2 x}$. Далее имеем:

$$3^{\cos x - 2\cos^2 x} = 4^{2\cos^2 x - \cos x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos^2 x - \cos x} = 4^{2\cos^2 x - \cos x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{12}\right)^{2\cos^2 x - \cos x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) Решая двойное неравенство $-\dfrac{3\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$ для каждой из полученных серий корней находим, что заданному промежутку принадлежат числа $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{3}$ и только они.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{3}$.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта и *а* пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **2** |

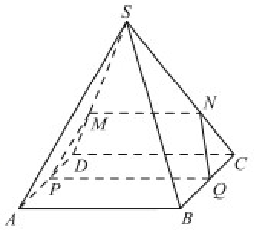
**Задание 14**

Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной $S$. Точка $M$ расположена на $SD$ так, что $SM : SD = 2 : 3$. $P$ — середина ребра $AD$, а $Q$ середина ребра $BC$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью $MQP$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость $MQP$ разбивает пирамиду.

**Решение.**




а) Пусть плоскость $MPQ$ пересекает $SC$ в точке $N$. Так как $PD = CQ$, $PD \parallel CQ$, то $PDCQ$ — параллелограмм, $PQ \parallel CD$. Поскольку $PQ \parallel CD$, $PQ \subset MPQ$, то $MN \parallel PQ \parallel CD$.

Тогда $\dfrac{SM}{MD} = \dfrac{SN}{NC}$, то есть $MD = NC$. Так как $MD = NC$, $CQ = PD$ и $\angle SCB = \angle SDA$, так как пирамида правильная, то $\triangle NCQ = \triangle PDM$, следовательно, $NQ = MP$.

Поскольку $NQ = MP$ и $MN \parallel PQ$, то $MNQP$ — равнобедренная трапеция, что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $S_{DPQC} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$, расстояние от точки $M$ до плоскости $ABC$ втрое меньше расстояния от точки $S$ до плоскости $ABC$. Тогда $\dfrac{V_{MPDCQ}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{6}$.

По теореме об отношении площадей треугольников с равными углами $\dfrac{S_{\triangle CQN}}{S_{\triangle CSB}} = \dfrac{CN}{CS} \cdot \dfrac{CQ}{CB} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$, расстояние от точки $D$ до плоскости $SBC$, в 1,5 раза больше чем от точки $M$. Значит, $\dfrac{V_{MNCQ}}{V_{SABCD}} = \dfrac{V_{MNCQ}}{2V_{SBCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{18}$, из чего следует, что $V_{CQPDMN} = \left(\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{6}\right) V_{SABCD} = \dfrac{2}{9} V_{SABCD}$, тогда $\dfrac{V_{CQPDMN}}{V_{PQNMSBA}} = \dfrac{2}{7}$.

Ответ:б) $\dfrac{2}{7}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б) | 2 |
| Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **2** |

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

**Задание 15**

Решите неравенство $(4x-7)\cdot\log_{x^2-4x+5}(3x-5)\geq 0$.

**Решение.**

Для рационализации неравенства заметим, что на ОДЗ логарифма выражения $\log_a b$ и $(a-1)(b-1)$ имеют одинаковые знаки. Поэтому при условиях

$$\begin{cases} 3x-5>0, \\ x^2-4x+5>0, \\ x^2-4x+5\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{3}, \\ x\neq 2 \end{cases}$$

исходное неравенство равносильно следующему:

$$(4x-7)(x^2-4x+4)(3x-6)\geq 0 \Leftrightarrow 2(4x-7)(x-2)^3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2, \\ x\leq \dfrac{7}{4}. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем: $\dfrac{5}{3}<x\leq\dfrac{7}{4}$, $x>2$.

Ответ: $\left(\dfrac{5}{3};\ \dfrac{7}{4}\right]\cup(2;\ +\infty)$.

| **Содержание критерия** | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения. | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **2** |

**Задание 16**

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$. Точки $M$ и $N$ являются серединами сторон $AB$ и $CD$ соответственно. Окружность, проходящая через точки $B$ и $C$, пересекает отрезки $BM$ и $CN$ в точках $P$ и $Q$ (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ лежат на одной окружности.

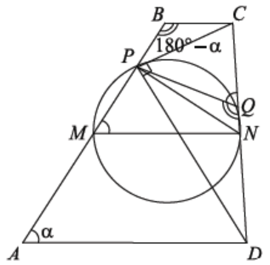
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $MPQ$, если прямая $DP$ перпендикулярна прямой $PC$, $AB=25$, $BC=3$, $CD=28$, $AD=20$.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б) | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения | 1 |

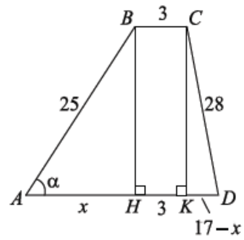
| | |
|---|---|
| пункта а), при этом пункт а) не выполнен | |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **3** |

**Решение.**

а) Заметим, что $MN$ — средняя линия трапеции по определению, значит, $MN \parallel AD$. Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle BMN = \alpha$, а $\angle CBA = 180° - \alpha$. По свойству вписанного в окружность четырехугольника, $\angle PQC = 180° - \angle PBC$. Угол $PQN$ является смежным с ним, значит, $\angle PQN = 180° - \angle PQC = 180° - \alpha$. Поскольку сумма углов $PMN$ и $PQN$ равна 180°, около четырехугольника $PQNM$ можно описать окружность.




б) Требуется найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника $MPQ$. Эта окружность описана и вокруг четырехугольника $PQNM$, а значит, и вокруг треугольника $MPN$. Найдем радиус окружности, описанной вокруг треугольника $MPN$. Для этого воспользуемся обобщенной теоремой синусов: $R = \dfrac{PN}{2\sin\alpha}$.




Найдем $PN$. По условию, треугольник $CDP$ является прямоугольным, $CN = ND$, значит, $PN$ является медианой прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе. Поэтому $PN = \dfrac{1}{2}CD = 14$.

Найдем синус угла $\alpha$. Проведём высоты трапеции $BH$ и $CK$. Пусть $AH = x$. Поскольку высоты, проведенные из точек $B$ и $C$ к основанию $AD$ равны, можно составить уравнение на $x$:

$$25^2 - x^2 = 28^2 - (17 - x)^2 \Leftrightarrow 625 - x^2 = 784 - 289 + 34x - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{65}{17}.$$

Из прямоугольного треугольника $AHB$ по теореме Пифагора находим

$$BH = \sqrt{25^2 - \left(\frac{65}{17}\right)^2} = \frac{420}{17},$$

а тогда

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BA} = \frac{420}{17} : 25 = \frac{84}{85}.$$

Окончательно имеем:

$$R = \frac{14}{2 \cdot \frac{84}{85}} = \frac{85}{12}.$$

Ответ: б) $\dfrac{85}{12}$.

**Задание 17**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

**Решение.**

Пусть сумма кредита $A$ тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$A,\ A - 30,\ A - 60,\ ...,\ A - 570,\ A - 600,\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03A,\ 1{,}03(A - 30),\ ...,\ 1{,}03(A - 570),\ 1{,}03(A - 600).$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}03A + 30,\ 0{,}03(A - 30) + 30,\ ...,\ 0{,}03(A - 570) + 30,\quad 1{,}03(A - 600).$$

Всего следует выплатить (в тыс. рублей)

$$20 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{2A - 570}{2} + 20 \cdot 30 + 1{,}03(A - 600) = 1{,}63A - 189$$

Откуда

$$1{,}63A - 189 = 1604 \Leftrightarrow 1{,}63A = 1793 \Leftrightarrow A = 1100.$$

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит равна 1100 тыс. рублей.

Ответ: 1 100 000 рублей.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ. | 3 |
| Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано. | 2 |
| Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено. | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше. | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **3** |

**Задание 18**

Найти все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-1}\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

**Решение.**

Имеем уравнение вида $xy=0$, откуда на ОДЗ либо $x=0$, либо $y=0$. Рассмотрим эти случаи.

**Первый случай:** $\sqrt{4x-1}=0$, при условии $x^2-2x+2-a^2>0$.

Имеем:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{16}-\frac{1}{2}+2-a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{16}-\frac{1}{2}+2-a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ \frac{25}{16}-a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ -\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Число $\frac{1}{4}$ лежит на отрезке [0; 1], для первого случая получаем: $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$.

**Второй случай:** $\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$.

$$\begin{cases} \ln(x^2-2x+2-a^2)=0, \\ 4x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2-a^2=1, \\ 4x-1\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=a^2, \\ 4x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq\frac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x=1+a, \\ x=1-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+a, \\ 1+a\geq\frac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-a, \\ 1-a\geq\frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+a, \\ a\geq-\frac{3}{4} \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x=1-a, \\ a\leq\frac{3}{4}. \end{cases} (**) \end{array}\right.$$

Корень $1+a$ лежит на отрезке [0; 1] при $-1\leq a\leq 0$, учитывая $(*)$, получаем $-\frac{3}{4}\leq a\leq 0$.

Корень $1-a$ лежит на отрезке [0; 1] при $0\leq a\leq 1$, учитывая $(**)$, получаем $0\leq a\leq\frac{3}{4}$.

Корни уравнения $x=1+a$ и $x=1-a$ совпадают при $a=0$.

Корни уравнения $x=1+a$ и $x=\frac{1}{4}$ совпадают при $a=-\frac{3}{4}$.

Корни уравнения $x=1-a$ и $x=\frac{1}{4}$ совпадают при $a=\frac{3}{4}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1] при $-\frac{5}{4}<a\leq-\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4}\leq a<\frac{5}{4}$.

Ответ: $-\frac{5}{4}<a\leq-\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4}\leq a<\frac{5}{4}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ. | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся включением/исключением точек $a=-\frac{3}{4}$ и/или $a=\frac{3}{4}$ | 3 |
| В решении верно найдены все граничные точки $a=-\frac{5}{4}$, $a=-\frac{3}{4}$, $a=\frac{3}{4}$, $a=\frac{5}{4}$, но неверно определены промежутки ИЛИ верно найден хотя бы один из промежутков, входящих в решение ИЛИ возможно, за исключением граничных точек | 2 |
| Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и верно получен один из промежутков, входящих в решение, возможно за исключением граничных точек | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **4** |

**Задание 19**

В ящике лежат 68 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей , масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 944 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1016 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 15 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующий результатов:<br>— обоснованное решение в п. *а*;<br>— обоснованное решение в п. *б*;<br>— искомая оценка в п. *в*;<br>— пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **4** |

**Решение.**

Пусть всего $a$ овощей тяжелее 1000 г (а их суммарная масса $S_1$), $b$ овощей весят 1000 г (их суммарная масса $S_2$), $c$ овощей легче 1000 г (их суммарная масса $S_3$). Тогда условие записывается системой:

$$\begin{cases} a+b+c=68, \\ S_1+S_2+S_3=68000, \\ S_1=1016a, \\ S_2=1000b, \\ S_3=944c. \end{cases}$$

а) В этом случае $a=c$ и $b=68-2a$. Из системы имеем: $1016a+1000\cdot(68-2a)+944a=68000$, откуда $a=0$. Противоречие с условием, что в ящике есть хотя бы два овоща различной массы

б) В этом случае $b=15$. Тогда из системы имеем: $15+a+c=68$ и $1016a+15000+944c=68000$, откуда $9a=371$. Но тогда $a$ — нецелое число. Противоречие.

в) Пусть $x$ — масса самого легкого овоща. Тогда средняя масса овощей, которые легче 1000 г, не превосходит

$$\frac{x+999\cdot(c-1)}{c}=999-\frac{999-x}{c}.$$

Это выражение должно быть не меньше 944. Решая неравенство $999-\frac{999-x}{c}\geq 944$, получаем $x\geq 999-55c$. Следовательно, чтобы найти минимальное возможное $x$, надо найти максимально возможное $c$.

Вычитая из уравнения $1016a+1000b+944c=68000$ уравнение $944a+944b+944c=944\cdot(a+b+c)=944\cdot 68$, получим: $9a+7b=476$. Но $476=9a+7b<9\cdot(a+b)$, откуда $a+b\geq 53$ (т.к. числа натуральные). Поэтому из того, что овощей 68, получаем оценку $c\leq 15$. Если $c=15$, то $a+b=53$. Откуда $476=9a+7b=7\cdot(a+b)+2a=7\cdot 53+2a$, что противоречит натуральности $a$ (хотя бы из соображений четности). Если $c=14$, то наши уравнения имеют решение: $a=49$, $b=5$.

Тогда минимальное возможное $x$ получается из уравнения $x=999-55c$, откуда $x=229$ (иначе будет противоречие с необходимым неравенством, полученным выше). Пример следует из решения: один овощ массой 229 г., тринадцать овощей массой 999 г., пять овощей массой 1000 г. и сорок девять овощей массой 1016 г.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 229.

**Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы**

| Первичный | Тестовый |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 5 |
| 2 | 9 |
| 3 | 14 |
| 4 | 18 |
| 5 | 23 |
| 6 | 27 |
| 7 | 33 |
| 8 | 39 |
| 9 | 45 |
| 10 | 50 |
| 11 | 56 |
| 12 | 62 |
| 13 | 68 |
| 14 | 70 |
| 15 | 72 |
| 16 | 74 |
| 17 | 76 |
| 18 | 78 |
| 19 | 80 |
| 20 | 82 |
| 21 | 84 |
| 22 | 86 |
| 23 | 88 |
| 24 | 90 |
| 25 | 92 |
| 26 | 94 |
| 27 | 96 |
| 28 | 98 |
| 29 | 99 |
| 30 | 100 |
| 31 | 100 |
| 32 | 100 |

| Тестовый | Оценка |
|---|---|
| 0-26 | 2 |
| 27-46 | 3 |
| 47-64 | 4 |
| 65-100 | 5 |