Вариант 1.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25200	-2	10	0,42	0,5	10,5	5	5	-1	110	12	0

Решения заданий 13-19

Задание 13

а) Решите уравнение $\dfrac{(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

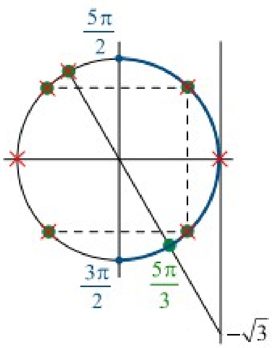
а)

$$\frac{(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0, \\ 2\sin^2 x=1, \end{array}\right. \\ \sqrt{2}\cos x\neq 1, \\ \cos x>0, \\ \sin x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}, \\ \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x\neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x>0, \\ \sin x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}, \\ \cos x>0. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Получим число $\dfrac{5\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z};$ б) $\dfrac{5\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта и *а* пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

Задание 14

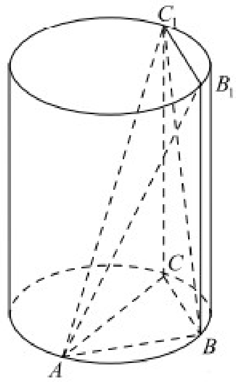
В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно,что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45°.

б) Найдите объём цилиндра.

Решение.

а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен углу AC_1B_1.



Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1, параллельная прямой BC, перпендикулярна прямым AB и BB_1. Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1, а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1:

$$B_1C_1 = BC = AB\sqrt{3} = \sqrt{6},\ AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = \sqrt{6}.$$

Значит, $\angle AC_1B_1 = 45^\circ$.

б) Отрезок AC является диаметром основания цилиндра. Значит, площадь основания цилиндра равна

$$\frac{\pi \cdot AC^2}{4} = \pi \cdot AB^2 = 2\pi.$$

Следовательно, объём цилиндра равен

$$2\pi \cdot BB_1 = 4\pi.$$

Ответ: б) 4π.

Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

Задание 15

Решите неравенство $\log_2^2(3x-1)+\log_{3x-1}^2 2-\log_2(3x-1)^2-\log_{3x-1}4+2\le 0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1)+\frac{1}{\log_2^2(3x-1)}\right)-2\left(\log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}\right)+2\le 0.$$

Пусть $\log_2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2(3x-1)}=t,$ тогда $\log_2^2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2^2(3x-1)}+2=t^2$ и, следовательно,

$$\log_2^2(3x-1)+\frac{1}{\log_2^2(3x-1)}=t^2-2.$$

Далее имеем: $t^2-2t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 2,$ откуда

$$0\le \log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}\le 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}=2\Leftrightarrow \log_2(3x-1)=1\Leftrightarrow 3x-1=2\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

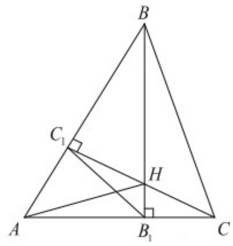
Задание 16

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

Решение.



а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы AC_1B_1 и AHB_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 = \angle AC_1B_1$.

Углы BC_1C и BB_1C — прямые, значит, точки B, C, B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC. Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$

Получаем, что $\angle ACB = \angle AHB_1$.

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH = 4$, откуда

$$B_1C_1 = AH \cdot \sin\angle BAC = AH \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем:

$$AB_1 = AB\cos\angle BAB_1 = AB\cos 60^\circ = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

$$AC_1 = AC\cos\angle CAC_1 = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AC.$$

Получаем, что $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_1} = 2$. Значит,

$$BC = 2B_1C_1 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Задание 17

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей.

Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение.

Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $x+y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $200x^2+300y^2=1\,200\,000$. Выразим y через x:

$$200x^2+300y^2=1\,200\,000 \Leftrightarrow y^2=4000-\frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}.$$

Значит, нам нужно найти наибольшее значение функции $Q(x)=x+\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}$ при $0\le x\le 20\sqrt{15}$. Для этого найдем производную функции $Q(x)$:

$$Q'(x)=1-\frac{2x}{3\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}}.$$

Найдем критические точки:

$$Q'(x)=0 \Leftrightarrow 1=\frac{2x}{3\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}=2x \Leftrightarrow 36\,000-6x^2=4x^2 \Leftrightarrow x^2=3600,$$

то есть $x=60$ — единственная критическая точка, удовлетворяющая условию $0\le x\le 20\sqrt{15}$. Найдем значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$Q(60)=100,\ Q(20\sqrt{15})=20\sqrt{15},\ Q(0)=20\sqrt{10}.$$

Наибольшее значение функции $Q(x)$ равно 100, значит, наибольшее количество единиц товара равно 100.

Ответ: 100.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	3
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
Максимальный балл	**3**

Задание 18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\cdot\ln(2x+a)$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке [0; 1].

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3x-2}(\ln(x-a)-\ln(2x+a))=0$ и рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sqrt{3x-2}=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$, при при выполнении условий

$$\begin{cases} x-a>0, \\ 2x+a>0 \end{cases}$$

то есть если

$$\begin{cases} \frac{2}{3}-a>0, \\ \frac{4}{3}+a>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} \ln(x-a)-\ln(2x+a)=0, \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=2x+a, \\ x-a>0, \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a, \\ -3a>0, \\ -6a-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a, \\ a\le -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Корень $-2a$ лежит на отрезке [0; 1] при $-\frac{1}{2}\le a\le 0$. Для второго случая получаем $-\frac{1}{2}\le a\le -\frac{1}{3}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [0; 1] при $-\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 19. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение.

Пусть данное число равно $100a+10b+c$, где a, b и c - цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно к, то выполнено $100a+10b+c = ka+kb+kc$.

а) Если частное равно 12, то $100a+10b+c= 2a+12b+12c$; $88a=2b+11c$, что верно, например, при $b=0$, $a=1$, $c=8$: частное числа 108 и суммы его цифр равно 12.

б) Если частное равно 87, то $100a+10b+c=87a+87b+87c$ и тогда $13a=77b+86c$. Так как $a<10$, то $77b+86c<130$. Значит, $b=0$, $c=1$ или $b=1$, $c=0$. Но ни 77, ни 86 не делится на 13. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 87.

в) Частное числа 198 и суммы его цифр равно 11.

Пусть k - наименьшее натуральное значение частного числа и суммы его цифр равно 10 или меньше. Тогда

$$(100-k)a+(10-k)b=(k-1)c.$$

Учитывая условие $k \le 10$, получаем неравенство

$$100-k \le (100-k)a \le (100-k)a+(10-k)b=(k-1)c \le 9(k-1).$$

Отсюда имеем $100-k \le 9(k-1)$, $k \ge 10{,}9$. Это противоречит неравенству $k \le 10$. Значит, наименьшее натуральное значение частного трёхзначного числа и суммы его цифр равно 11.

Ответ: а) да; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-46	3
47-64	4
65-100	5