Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

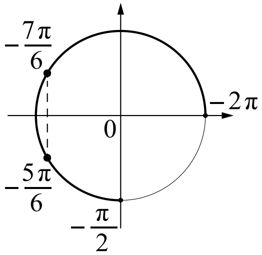
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(\cos^2 x+1\right)=0.$$

Значит, или $\cos^2 x=-1$, что невозможно, или $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\dfrac{7\pi}{6}$; $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\dfrac{7\pi}{6}$; $-\dfrac{5\pi}{6}$.

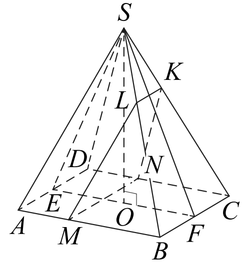
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC, прямые KL, BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL:LB=SK:KC=DN:NC=AM:MB.$$

Таким образом, прямая LM, лежащая в плоскости α, параллельна прямой SA, а значит, плоскость α параллельна прямой SA.

б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD, искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC. Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC, а прямые SE и EF — прямой AD. Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD, а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

Значит, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF.

Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF, откуда

$$EO=2,\ SE=\sqrt{SA^2-\frac{AD^2}{4}}=3\sqrt{5};$$

$$\sin\angle ESO=\frac{OE}{SE}=\frac{2\sqrt{5}}{15};\ \angle ESF=2\angle ESO=2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Ответ: б) $2\arcsin\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_5\left(\left(3-x\right)\left(x^2+2\right)\right)\ge\log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5\left(5-x\right)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_5\left(\left(3-x\right)\left(x^2+2\right)\right)\ge\log_5\left(\left(3-x\right)\left(4-x\right)\right)+\log_5\left(5-x\right);$$

$$\log_5\left(3-x\right)+\log_5\left(x^2+2\right)\ge\log_5\left(3-x\right)+\log_5\left(4-x\right)+\log_5\left(5-x\right).$$

Неравенство определено при $x<3$, поэтому при $x<3$ неравенство принимает вид:

$$x^2+2\ge\left(4-x\right)\left(5-x\right);\ x^2+2\ge x^2-9x+20;\ 9x\ge18,$$

откуда $x\ge2$. Учитывая ограничение $x<3$, получаем: $2\le x<3$.

Ответ: $\left[2;3\right)$.

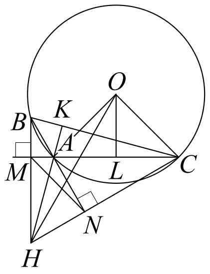
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH=AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC=\sqrt{15}$, $\angle ABC=45°$.

Решение.



а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC, поэтому $\angle AMN=\angle CMN=\angle ABC$. Значит, треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AN}{AC}=\cos\angle NAC=\cos60°=\frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника AMN, равен $\frac{AO}{2}$.

Точки M и N лежат на окружности диаметром AH, поэтому $AH=AO$.

б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K, а точка L — середина стороны AC, тогда

$$\angle AKB=90°,\ \angle AOL=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot2\angle ABC=\angle ABC=45°.$$

Значит,

$$\angle OAL=90°-\angle AOL=45°,\ \angle BAK=90°-\angle ABC=45°;$$

$$\angle OAH=180°-\angle OAK=180°-\left(\angle BAC-\angle BAK-\angle OAL\right)=150°.$$

Площадь треугольника AHO равна

$$\frac{AO\cdot AH\cdot\sin\angle OAH}{2}=\frac{AO^2\cdot\sin150°}{2}=\frac{BC^2\cdot\sin150°}{8\sin^2120°}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5;\ \frac{5(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{5\cdot 2}{n};\ \frac{5}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6;\ \frac{6(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{6\cdot 2}{n};\ \frac{6}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1+\frac{5}{n};\ \frac{(n-1)+5}{n};\ \ldots;\ \frac{2+5}{n};\ \frac{1+5}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$5+\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=5+\frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 7,5 млн рублей, поэтому $n=4$.
Ответ: 4.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $9x^2-a^2=0$, для которых выполнено условие $x^2+8x+16-a^2\neq 0$.

Поскольку $9x^2-a^2=(3x-a)(3x+a)$, уравнение $9x^2-a^2=0$ задаёт на плоскости Oxa пару прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $a=3x$ и $a=-3x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a=0$ и имеет два корня при $a\neq 0$.

Поскольку

$$x^2+8x+16-a^2=(x+4-a)(x+4+a),$$

уравнение $x^2+8x+16-a^2=0$ задаёт пару прямых m_1 и m_2, заданных уравнениями $a=x+4$ и $a=-x-4$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x+4=3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\a=6.\end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_1 пересекаются в точке $(2;6)$.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}-x-4=3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\a=-3.\end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_2 пересекаются в точке $(-1;-3)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x+4=-3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\a=3.\end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_1 пересекаются в точке $(-1;3)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}-x-4=-3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\a=-6.\end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_2 пересекаются в точке $(2;-6)$.

Следовательно, условие $x^2+8x+16-a^2\neq 0$ выполнено для корней уравнения $9x^2-a^2=0$ при всех a, кроме $a=-6$, $a=-3$, $a=3$ и $a=6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-6$; $-6<a<-3$; $-3<a<0$; $0<a<3$; $3<a<6$; $a>6$.

Ответ: $a<-6$; $-6<a<-3$; $-3<a<0$; $0<a<3$; $3<a<6$; $a>6$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=0$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-6$, $a=0$ и/или $a=3$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-3$, $a=0$ и/или $a=6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.
а) Пусть в день с номером k записано k чисел 3 и $12-2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $12+k$. Таким образом, n может быть равным 6.
б) Пусть $n=4$, в первый день на доску записали число 2 и двенадцать чисел 3, во второй день — двенадцать чисел 4, в третий день — шесть чисел 4 и пять чисел 5, а в четвёртый день — десять чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 38, во второй — 48, в третий — 49, а в четвёртый — 50. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $2\frac{12}{13}<3$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{1}{46}>4$.
в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 6 чисел. Значит, если $n>5$, то в шестой день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 6. Таким образом, $n\le 5$.
Если $n=5$, то в пятый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в четвёртый, третий и второй дни, не превосходят 9, 8 и 7 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 40.
Если $n=4$, то в четвёртый день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 14 и 13 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 48.
Если $n=3$, то в третий день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 19, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 45.
Если $n=2$, то во второй день на доску было записано не более пяти чисел, а их сумма не превосходит 25. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 31.

Если $n=1$, то сумма всех записанных чисел равна 6.
Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 48.
Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 48. Пусть $n=4$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 2, 2, 3, 3, 3; в третий — 3, 3, 4, 4; в четвёртый — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных в эти дни чисел соответственно равны 6, 13, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 48.
Ответ: а) да; б) да; в) 48.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4