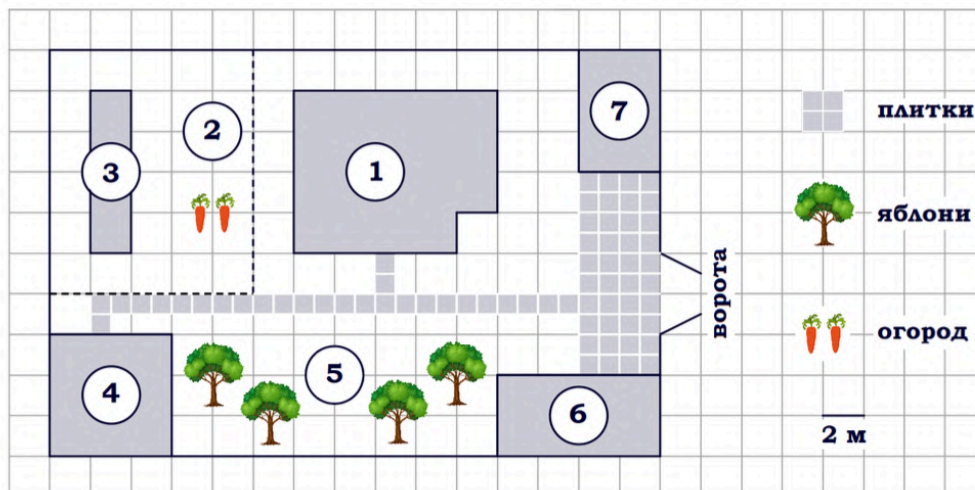


ЗАДАЧИ 1-5



Задание 1. На плане изображён дачный участок по адресу: п. Синицыно, ул. Красная, д. 34 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота. При входе на участок слева от ворот находится гараж. Справа от ворот находится сарай площадью 24 кв. м, а чуть подальше – жилой дом. Напротив жилого дома расположены яблоневые посадки. Также на участке есть баня, к которой ведёт дорожка, выложенная плиткой, и огород с теплицей внутри (огород отмечен на плане цифрой 2). Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м x 1 м. Между гаражом и сараем находится площадка, вымощенная такой же плиткой. К участку подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

| Объекты | теплица | баня | сарай | яблони |
|---------|---------|------|-------|--------|
| Цифры | | | | |

3. Найдите периметр фундамента жилого дома. Ответ дайте в метрах.

$18 \cdot 2 = 36$ метров

5. Плитки для садовых дорожек продаются в упаковках по 8 штук. Сколько упаковок плиток понадобилось, чтобы выложить все дорожки?

27/8=3 и 3/8, понадобится 4 упаковки с плитками.

8. На сколько процентов площадь, которую занимает сарай, меньше площади, которую занимает гараж?

$$S(\text{сарая}) = 24 \text{ кв м}$$

$$S(\text{гаража}) = 32 \text{ кв м}$$

$$(24/32) \cdot 100\% = 75\%, \text{ тогда площадь гаража на } 25\% \text{ больше площади сарая.}$$

10. Хозяин участка планирует установить в жилом доме систему отопления. Он рассматривает два варианта: электрическое или газовое отопление. Цены на оборудование и стоимость его установки, данные о расходе газа, электроэнергии и их стоимости даны в таблице.

| | Нагреватель (котёл) | Прочее оборудование и монтаж | Средн. расход газа/средн. потребл. мощность | Стоимость газа/электроэнергии |
|-------------------|---------------------|------------------------------|---|-------------------------------|
| Газовое отопление | 24 000 руб. | 14 316 руб. | 1,1 куб. м/ч | 4,4 руб./куб. м |
| Электр. отопление | 19 000 руб. | 11 000 руб. | 4,4 кВт | 5,3 руб./(кВт·ч) |

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовое отопление. Через сколько часов непрерывной работы отопления экономия от использования газа вместо электричества компенсирует разницу в стоимости покупки и установки газового и электрического оборудования?

$$24000 + 14316 = 38316$$

$$19000 + 11000 = 30000$$

$$38316 - 30000 = 8316$$

$$1,1 \cdot 4,4 = 4,84$$

$$4,4 \cdot 5,3 = 23,32$$

$$23,32 - 4,84 = 18,48$$

$$8316 : 18,48 = 450$$

6 задание

Найдите значение выражения $4,7 - 8,2 = -3,5$

Найдите значения выражения $9,6 / 1,2 = 8$

7 задание

Какое из следующих чисел заключено между $17/15$ и $16/13$?

- 1) 1,2
- 2) 1,3
- 3) 1,4
- 4) 1,5

7) $17/15$ и $16/13$

$17 \overline{)15} = 1,133\dots$ $16 \overline{)13} = 1,23\dots$

1) 1,2

8 задание

$$(\sqrt{20} - \sqrt{5})\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{20} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} &= \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \\ &= \sqrt{20 \cdot 5} - \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{100} - \sqrt{25} = \\ &= 10 - 5 = 5\end{aligned}$$

Найдите значение выражения $\frac{a^9 \cdot a^{12}}{a^{18}}$ при $a = 4$.

$$\begin{aligned}\frac{a^9 \cdot a^{12}}{a^{18}} &= \frac{a^{9+12}}{a^{18}} = \frac{a^{21}}{a^{18}} = a^{21-12} = a^3, \\ 4^3 &= \underline{64}\end{aligned}$$

9 задание

$$x^2 - 16 = 0$$

запишите в ответ больший из корней

g) $x^2 - 16 = 0$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
 $x^2 - 4^2 = 0$
 $(x-4)(x+4) = 0$
 $x-4=0$ $x+4=0$
 $x=4$ $x=-4$

10 задание

Родительский комитет закупил 20 пазлов для подарков детям на окончание года, из них 9 с машинами и 11 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Саше достанется пазл с машиной.

Решение:

20 пазлов всего

9 с машинами

11 с городами

$$\frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 0,45$$

Нам нужно, чтобы Саше достались пазлы с машиной

В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Норвегии или Швеции.

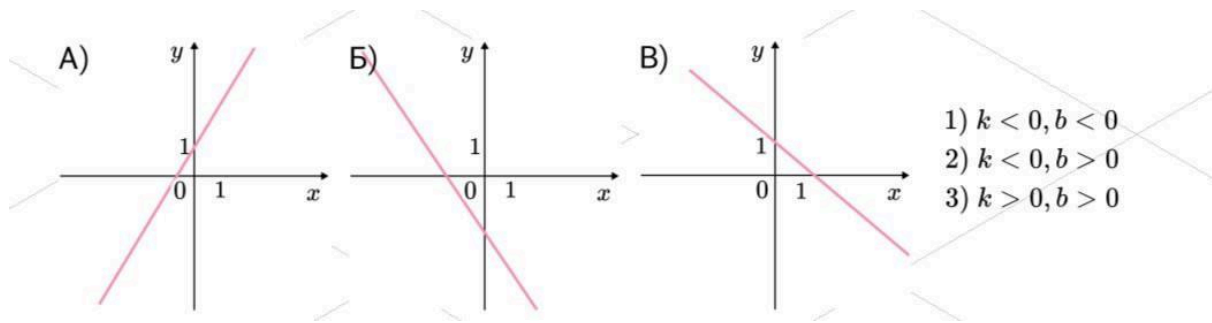
Решение:

$$P = \frac{6+3}{20} = \frac{9}{20} = 0,45$$

$$P = \frac{6+3}{11+6+3} = \frac{9}{20} = 0,45$$

11 задание

Установите соответствие



Ответ: 312

12 задание

Сила Архимеда, выталкивающая на поверхность погруженное в воду тело, вычисляется по формуле $F = \rho g V$, где $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — плотность воды, $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения, а V — объем тела в кубических метрах. Сила F измеряется в ньютонах. Найдите силу Архимеда, действующую на погруженное в воду тело объемом 0,04 куб. м. Ответ дайте в ньютонах.

12) $F = \rho g V$

| |
|--|
| $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ |
| $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ |
| $V = 0,04 \text{ м}^3$ |
| $F = ?$ |

$F = 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,04 =$
 $= \underline{392} \text{ (Н)}$

13 задание

Решите неравенство $-3-x > 4x+7$

$$\begin{array}{l}
 -3 - x > 4x + 7 \\
 -x - 4x > 7 + 3 \\
 -5x > 10 \quad | : -5 \\
 x < -2 \\
 \text{Отв: } (-\infty; -2)
 \end{array}$$

14 задание

В ходе биологического эксперимента в чашку Петри с питательной средой поместили колонию микроорганизмов массой 13 мг. За каждые 30 минут масса колонии увеличивается в 3 раза. Найдите массу колонии микроорганизмов через 90 минут после начала эксперимента. Ответ дайте в миллиграммах.

Решение:

Через 20 минут масса колонии станет $13 * 3$, через 60 минут станет $13 * 3^2$ через 90 минут масса станет $13 * 3^3 = 351$ миллиграмм

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 6 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 480 мг. Найдите массу изотопа через 36 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

Решение:

Через 6 минут масса изотопа будет равна $480 * \frac{1}{2} = 240$

Через 12 минут масса изотопа будет равна $480 * \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Через 36 минут масса изотопа будет равна $480 * \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{480}{64} = 7,5$

У Тани есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 480 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счету отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 10 см?

Решение:

1 отскок: 480 см

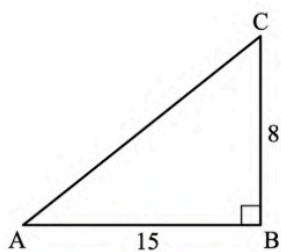
2 отскок $480 \cdot \frac{1}{3} = 160$ см

3 отскок $480 \cdot (\frac{1}{3})^2 = 53,3$ см

4 отскок $480 \cdot (\frac{1}{3})^3 = 17,77$ см

5 отскок $480 \cdot (\frac{1}{3})^4 = 5,92$ см

15 задание



ЗАДАЧА:

Дано:
 ΔABC - прямоугольный

$\angle B = 90^\circ$

$AB = 15$

$BC = 8$

Найти:

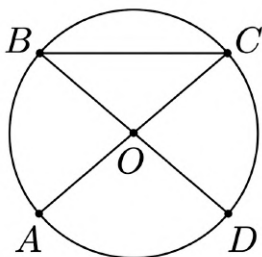
$AC = ?$

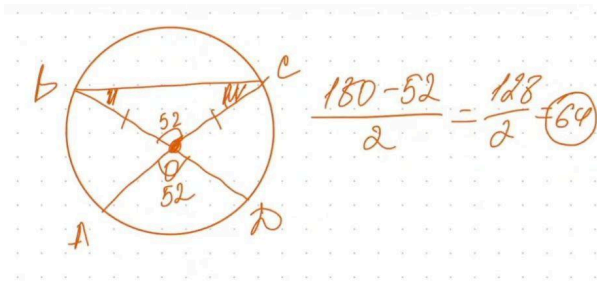
по Т. Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

16 задание

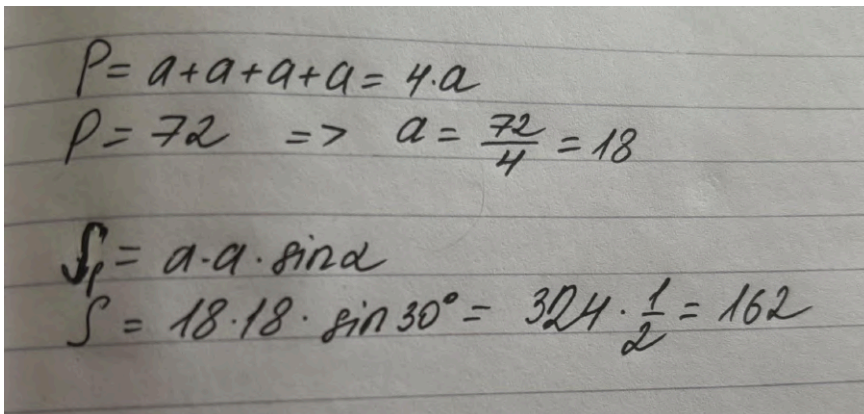
В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD - диаметры. Угол AOD равен 52° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах



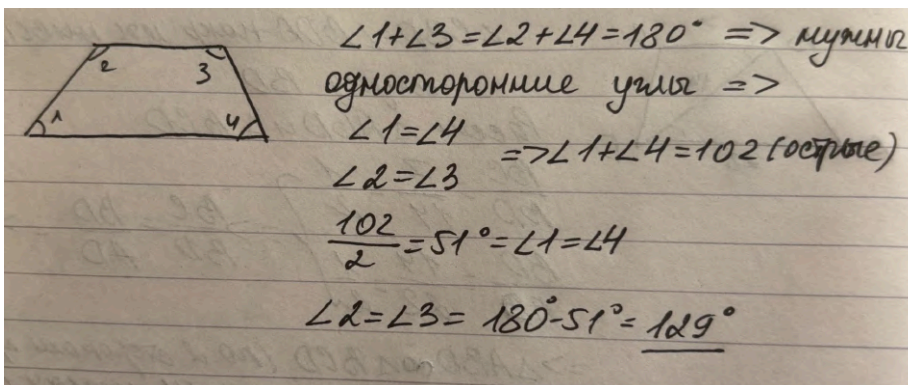


17 задание

периметр ромба 72 один из углов равен 30 градусов, найдите его площадь

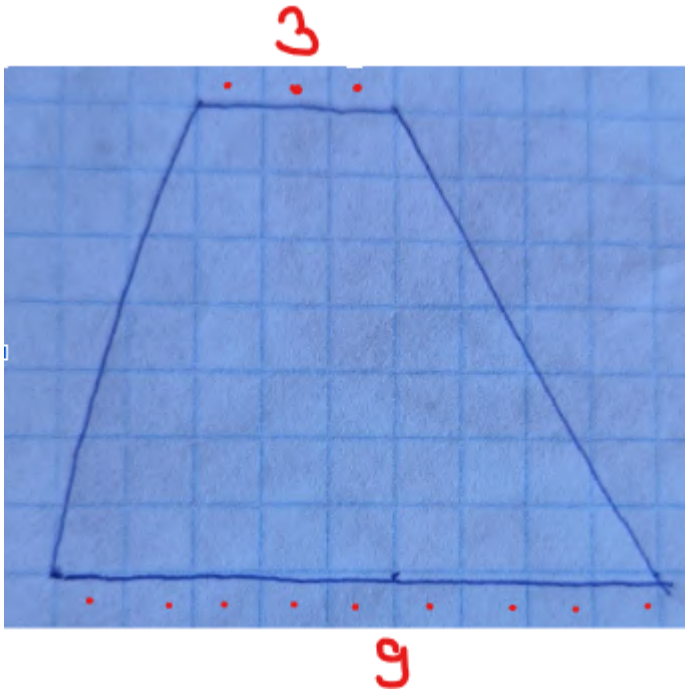


Сумма двух углов трапеции составляет 102°. Найдите больший угол этой трапеции.



18 задание

На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена трапеция. Найдите длину ее средней линии.



Длина средней линии трапеции равна полусумме оснований $\frac{9+3}{2} = 6$

19 задание

Какие из следующих утверждений являются истинными высказываниями?

1. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.
3. Любые два равносторонних треугольника подобны.

В ответ запишите номера истинных высказываний без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: **23**

20 задание

Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$.

5 20

$$x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$$
$$x(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$
$$x(x + 1)^2 - 2(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)(x(x + 1) - 2) = 0$$
$$(x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$$
$$x = -1$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 = 5^2$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-1 \pm 5}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Ответ: -1; -3; 2.

Решите уравнение: $x^3 = x^2 - 7x + 7$

$$x^3 - x^2 + 7x - 7 = 0$$
$$x^2(x - 1) + 7(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + 7) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad x^2 + 7 = 0$$
$$x = 1 \quad x^2 = -7$$

нет корней

Решите уравнение $X^3+2x^2=9x+18$

$$\begin{aligned}
 x^3+2x^2 &= 9x+18 \\
 x^2(x+2) &= 9(x+2) & (a^2-b^2) &= (a-b)(a+b) \\
 x^2(x+2) - 9(x+2) &= 0 \\
 (x+2)(x^2-9) &= 0 \\
 x+2=0 & \quad x^2-9=0 \\
 x=-2 & \quad (x-3)(x+3)=0 \\
 & \quad x=-3 \\
 & \quad x=3
 \end{aligned}$$

Отв: -3; -2; 3

Решите уравнение $X^4=(3x-10)^2$

$$\begin{aligned}
 x^4 &= (3x-10)^2 & a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \\
 x^4 - (3x-10)^2 &= 0 \\
 (x^2)^2 - (3x-10)^2 &= 0 \\
 (x^2 - (3x-10))(x^2 + (3x-10)) &= 0 \\
 (x^2 - 3x + 10)(x^2 + 3x - 10) &= 0 \\
 \left. \begin{aligned}
 x^2 - 3x + 10 &= 0 \\
 D &= b^2 - 4ac \\
 D &= 9 - 40 = -31 < 0 \text{ - нет корней}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 x^2 + 3x - 10 &= 0 \\
 D &= b^2 - 4ac \\
 D &= 9 - 4 \cdot (-10) = 49, \sqrt{49} = 7 \\
 x_1 &= \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
 x_2 &= \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Отв: 2; -5

Решите уравнение $(x-1)(x^2 + 8x + 16) = 6(x+4)$

$$\begin{aligned}
 (x-1)(x^2+8x+16) &= 6(x+4) & (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
 (x-1)(x+4)^2 &= 6(x+4) & (x+4)^2 &= x^2+8x+16 \\
 (x-1)(x+4)^2 - 6(x+4) &= 0 \\
 (x+4)((x-1)(x+4) - 6) &= 0 & (x-1)(x+4) &= x^2+4x-x-4= \\
 (x+4)(x^2+3x-4-6) &= 0 & &= x^2+3x-4 \\
 x+4=0 & \quad x^2+3x-10=0 \\
 x=-4 & \quad D=b^2-4ac \\
 & \quad D=9-4 \cdot (-10)=49 \\
 & \quad x_1 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
 & \quad x_2 = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5
 \end{aligned}$$

Отв: -5; -4; 2

21 задание

Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

| | $v \text{ (км/ч)}$ | $S \text{ (км)}$ | $t \text{ (ч)}$ |
|-------------|--------------------|------------------|------------------|
| по теч. | $x+3$ | 36 | $\frac{36}{x+3}$ |
| против теч. | $x-3$ | 36 | $\frac{36}{x-3}$ |

Пусть $x \text{ (км/ч)}$ - собственная скорость лодки,
тогда $(x+3) \text{ (км/ч)}$ - скорость по течению,
а $(x-3) \text{ (км/ч)}$ - скорость против течения.
По условию на весь путь лодка затратила 5 часов.
Составим уравнение:

$$\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5 \quad | \cdot (x+3)(x-3) \quad \text{ор: } x \neq 3; \\ x \neq -3$$
$$36(x-3) + 36(x+3) = 5(x+3)(x-3)$$
$$36x - 108 + 36x + 108 = 5(x^2 - 9)$$
$$72x = 5x^2 - 45$$
$$5x^2 - 72x - 45 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 5184 + 900 = 6084 = 78^2$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{72 \pm 78}{5 \cdot 10} \Rightarrow x_1 = -0,6 \text{ - не подходит, т.к. скорость не может быть отрицательной}$$
$$x_2 = 15$$

Ответ: 15 км/ч $v_{\text{лод}} = 15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

22 задание

Постройте график функции $y = x^2 + 11x - 4|x+6| + 30$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком три общие точки.

$$y = x^2 + 11x - 4|x+6| + 30$$

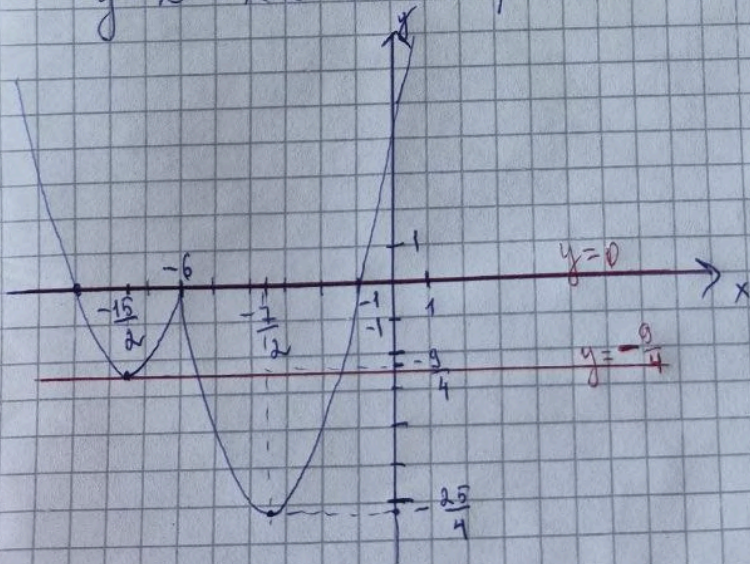
$$y = \begin{cases} x^2 + 11x - 4(x+6) + 30, & x+6 \geq 0 \\ x^2 + 11x - 4(-x-6) + 30, & x+6 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 11x - 4x - 24 + 30, & x+6 \geq 0 \\ x^2 + 11x + 4x + 24 + 30, & x+6 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 7x + 6, & x \geq -6 \\ x^2 + 15x + 54, & x < -6 \end{cases}$$

$y = x^2 + 7x + 6$ - парабола ветви вверх

$y = x^2 + 15x + 54$ - парабола ветви вверх



$$y = x^2 + 7x + 6$$

| | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|
| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
| y | 6 | 14 | 0 | 24 | -4 |

вершина $x_0 = \frac{-7}{2 \cdot 1} = \frac{-7}{2}$

$$y = x^2 + 15x + 54$$

| | | | | | |
|---|----|----|----|---|----|
| x | 0 | 1 | -1 | 9 | -6 |
| y | 54 | 70 | 40 | 0 | 0 |

вершина $x_0 = \frac{-15}{2 \cdot 1} = \frac{-15}{2}$

$y_0 = \frac{-9}{4}$

график имеет ровно 3 общие точки с прямой $y = m$ при $m = -\frac{9}{4}$ и $m = 0$ Ответ: $-\frac{9}{4}; 0$

Постройте график функции $y = 2|x - 4| - x^2 + 9x - 20$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки

$$y = 2|x-4| - x^2 + 9x - 20, \quad y = m, \quad 3 \text{ общ. точки}$$

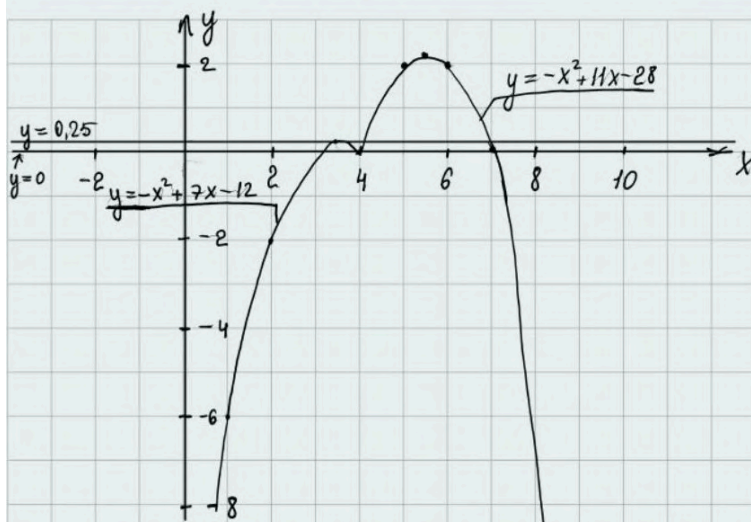
$$y = \begin{cases} -x^2 + 7x - 12, & \text{при } x < 4 \quad (1) \\ -x^2 + 11x - 28, & \text{при } x \geq 4 \quad (2) \end{cases}$$

1) $y = -x^2 + 7x - 12, \quad x < 4$ - квадратич. ф-я, график - парабола, ветви вниз
 $x_0 = -\frac{7}{-2} = 3,5, \quad y_0 = -(3,5)^2 + 7 \cdot 3,5 - 12 = 0,25$

| | | | | |
|---|----|----|------|---|
| x | 1 | 2 | 3,5 | 4 |
| y | -6 | -2 | 0,25 | 0 |

2) $y = -x^2 + 11x - 28, \quad x \geq 4$ - квадратич. ф-я, график - парабола, ветви вниз
 $x_0 = \frac{-11}{-2} = 5,5, \quad y_0 = -(5,5)^2 + 11 \cdot 5,5 - 28 = 2,25$

| | | | | | |
|---|---|---|------|---|---|
| x | 4 | 5 | 5,5 | 6 | 7 |
| y | 0 | 2 | 2,25 | 2 | 0 |



$y = m$ - семейство прямых,
 $\parallel O_x$

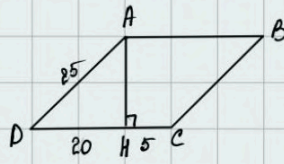
$y = m$ имеет с графиком
 3 общ. точки, при $m = 0,25$
 $m = 0$

Ответ: $m = 0; \quad m = 0,25$

23 задание

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 20$ и $CH = 5$.
 Найдите высоту ромба.

Дано: $ABCD$ -ромб,
 AH - высота ромба
 $DH = 20$, $CH = 5$



Решение: 1) $DC = DH + HC = 20 + 5 = 25 \Rightarrow$
 $\Rightarrow DA = AB = BC = DC = 25$ ($ABCD$ -ромб)

2) $\triangle DAH$ - п/у (AH - высота)

по т. Пифагора

$$AD^2 = DH^2 + HA^2$$

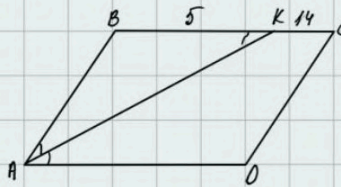
$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$$

Найти: AH - ?

Ответ: 15

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K .
 Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 14$.

Дано: $ABCD$ -параллелограмм
 AK - биссектриса; $K \in BC$
 $BK = 5$; $CK = 14$



Решение:

1) $\angle BAK = \angle KAD$ (AK - биссектриса),
 $\angle BKA = \angle KAD$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$; AK - секущая) \Rightarrow

$\Rightarrow \angle BAK = \angle BKA \Rightarrow \triangle ABK$ - р/б $\Rightarrow AB = 5$.

2) $BC = BK + KC = 19$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (5 + 19) = 48$$

Найти: Периметр - ?

Ответ: 48

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC .

| | | |
|---|---|--|
| <p>Дано: $\omega(O; R)$, $\omega \cap AB = K$; $\omega \cap AC = P$ B и $C \in \omega$ $AK = 18$; $AC = 1,2 BC$</p> | <p>Решение:</p> <p>1) $\angle BKC$ - центр, вписан в $\omega(O; R)$, \Rightarrow $\Rightarrow \angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$, $\angle KPC + \angle KPA = 180^\circ$ (смежные) \Rightarrow</p> <p>2) $\triangle KAP$ и $\triangle CAB$: $\angle A$ - общий $\angle KPA = \angle KBC$ (доказано) $\Rightarrow \triangle KAP \sim \triangle CAB$ (по 2-м углам)</p> <p>\downarrow</p> $\frac{AC}{AK} = \frac{BC}{KP} \quad (AC = 1,2 BC \text{ по условию})$ $\frac{1,2 BC}{18} = \frac{BC}{KP} \quad : BC$ $\frac{1,2}{18} = \frac{1}{KP} \Rightarrow KP = \frac{18}{1,2} = \frac{180}{12} = \frac{30}{2} = 15$ | |
| <p>КР-?</p> | | |
| <p>Ответ: 15.</p> | | |

24 задание

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

$\left\{ \begin{array}{l} AO = CO \text{ (точка пересек делит пополам)} \\ \angle AOE = \angle COF \text{ - вертикальные} \\ \angle 1 = \angle 2 \text{ - как при параллельных BC || AD и секущей AC} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle COF \Rightarrow AE = CF$

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 7 и 28 , $BD = 14$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

$\angle CBD = \angle BDA$ — накр. лежащие при $BC \parallel AD$
 и секущей BD
 Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$
 $\frac{BC}{BD} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$
 $\frac{BD}{AD} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BCD$ (по 2 сторонам пропорц. и углу между ними)

Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке N, лежащей на стороне AB. Докажите, что N - середина AB.

1) $ABCD$ - параллелограмм $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CNB = \angle NCD$ (накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей NC); $\angle CAN = \angle AND$
 (накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей ND).

2) $\triangle BCN$: $\angle BCN = \angle BNC \Rightarrow \triangle BCN - \text{р.б.} \Rightarrow BC = BN$
 $\triangle DNA$: $\angle CDN = \angle AND \Rightarrow \triangle DNA - \text{р.б.} \Rightarrow AN = AD$

3) $BN = BC = AD = AN \Rightarrow N$ - середина AB
 ч. т. д.

В четырёхугольнике ABCD биссектрисы углов C и D пересекаются в точке P лежащей на стороне AB, доказать что точка P равноудалена от всех сторон

Дано: ABCD - чет-к
 Биссектрисы C и D пересекаются в т. P,
 P ∈ AB.

Доказать: P - равноудалена от BC, CD и AD
 Док-во:

1) Проведем $PM \perp CD$, $PL \perp BC$ и $PN \perp AD$
 2) $\triangle PDM$ и $\triangle PND$
 DP - общая
 $\angle PDM = \angle PDN$ (DP-биссектриса) $\Rightarrow \triangle PDM = \triangle PND \Rightarrow PM = PN$
 $\angle PDM = \angle PND = 90^\circ$ (по ПОУ)

3) $\triangle PCM$ и $\triangle PLC$
 PC - общая
 $\angle PCM = \angle PCL$ (CP-биссектриса) $\Rightarrow \triangle PMC = \triangle PLC \Rightarrow PM = PL \Rightarrow PL = PN = PM$
 $\angle PMC = \angle PLC = 90^\circ$ (по ПОУ)

\Downarrow
 P, равноудалена от
 BC, CD и AD *з.м.г*

25 задание

В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 15$, $AC = 25$, точка O - центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD

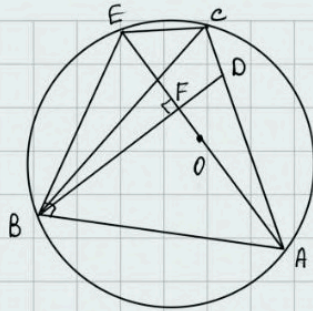
Дано: $\omega(O; R)$, $\triangle ABC$

$$AB = 15; AC = 25$$

ω описана около $\triangle ABC$

$$BD \perp AD; BD \cap AC = D$$

CD = ?



Решение:

1) $\angle ABE$ - вписанный, опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ABE = 90^\circ$

$\triangle AEB$ и $\triangle ABF$:

$\angle BAE$ - общий,
 $\angle ABE = \angle AFB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ABF$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF$$

2) $\angle ECA$ - вписанный, опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ECA = 90^\circ$

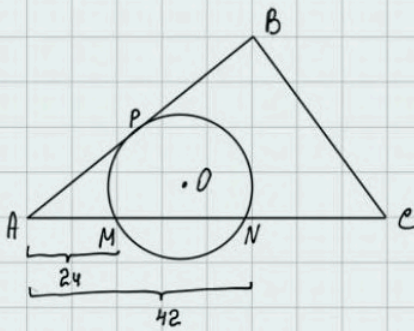
$\triangle AEC$ и $\triangle AFD$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAE - \text{общий;} \\ \angle ECA = \angle DFA = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AD = \frac{AE \cdot AF}{AC} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{225}{25} = \frac{15 \cdot 15}{25} = 9$$

$$CD = AC - AD = 25 - 9 = 16$$

Ответ: 16

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 24 и 42 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$



Дано: $\triangle ABC$

$$\omega \cap AC = M \cup N, AM = 24; AN = 42$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Найти: R = ?

Решение:

Пусть O - центр окружности, а P - точка касания с AB

По т. о касательной и секущей: $AM \cdot AN = AP^2$

$$AP^2 = 24 \cdot 42$$

$$AP = \sqrt{24 \cdot 42} = 12\sqrt{7}$$

По т. косинусов в $\triangle APM$:

$$PM^2 = AP^2 + AM^2 - 2 \cdot AP \cdot AM \cdot \cos \angle PAM$$

$$PM^2 = 1008 + 576 - 2 \cdot 12\sqrt{7} \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$PM = \sqrt{576} = 24$$

по т. косинусов для $\triangle APE$

$$PE^2 = AP^2 + AE^2 - 2 \cdot AP \cdot AE \cdot \cos \angle PAE$$

$$PE^2 = 1008 + 1764 - 2 \cdot 12\sqrt{7} \cdot 42 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$PE = \sqrt{1008} = 12\sqrt{7}$$

$$\downarrow$$

$$AP = PE \Rightarrow \triangle APE - \text{р/с}$$

$$\text{Из } \triangle APE \sim PB \Rightarrow \angle PAE = \angle PEA, \cos \angle PEA = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

По основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 \angle PEA = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$$

$$\sin^2 \angle PEA = \frac{16-7}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow \sin \angle PEA = \frac{3}{4}$$

по теореме синусов в $\triangle PNM$

$$\frac{PM}{\sin \angle PEM} = 2 \cdot R, \text{ где } R - \text{ радиус описанной окружности}$$

$$\frac{24}{\frac{3}{4}} = 2R$$

$$R = \frac{24 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 16$$

Ответ: 16

АНАЛОГ: Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 35 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча AB, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{35}}{6}$