

- 4 Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: _____.

- 5 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения

$$(x + 9)^2 = 36x.$$

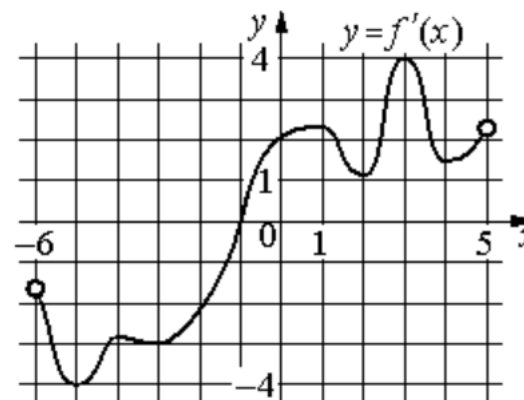
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_2 729}{\log_2 9}.$$

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 9 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = at^2 + bt + H_0, \text{ где } H_0 = 3 \text{ м — начальный уровень воды, } a = \frac{1}{768} \text{ м/мин}^2 \text{ и } b = -\frac{1}{8} \text{ м/мин — постоянные, } t \text{ — время в минутах, прошедшее с}$$

момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

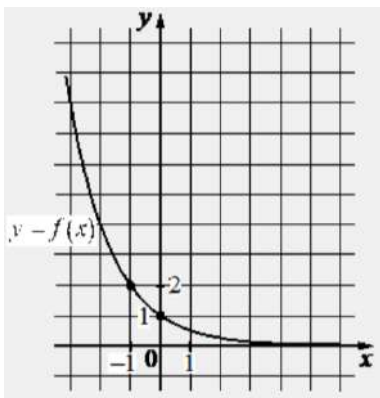
Ответ: _____.

- 10 Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: _____.



- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = 11 \cdot \ln(x + 4) - 11x - 5$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\log_6(2\sin^2x - 3\sin x - 1) = 0$.
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.
- 14 Точка M — середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M .
 а) Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из рёбер этой грани.
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении 1:5, считая от вершины A , $AC = 20$, $AA_1 = 32$.
- 15 Решите неравенство

$$\frac{2^{x+1} - 17 \cdot 2^{2-x}}{2^x - 2^{6-x}} \geq 1.$$



16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в конце 2030 года долг составит 200 тыс. руб;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите r , если общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей.

17 В треугольник ABC с углом A равным 60° вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке M .

- а) Докажите, что AM не больше утроенного радиуса вписанной окружности.
- б) Найдите синус большего из углов BAM и CAM , если AM равно 2,5 радиусам вписанной окружности.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$$

имеет на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

19 Имеется 10 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2 , -3 , 4, -5 , 7, -8 , 9, 10, -11 . Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2 , -3 , 4, -5 , 7, -8 , 9, 10, -11 . После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.




















СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	124	
2	10	
3	210	
4	0,11	
5	0,33	
6	9	
7	3	
8	-5	
9	48	
10	27	
11	16	
12	28	
13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{13\pi}{6}$	
14	10	
15	$(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$	
16	20	
17	$\frac{37 + 3\sqrt{77}}{80}$	
18	$(-\sqrt{6}; -2) \cup (-2; -1) \cup \{4\}$	
19	а) нет б) нет в) 4	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.





13 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2\sin^2 x - 3\sin x - 1) = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

а) $2\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 1$
 $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$
 Пусть $\sin x = t$
 $2t^2 - 3t - 2 = 0$
 $t = 2$ $t = -\frac{1}{2}$
 $\sin x = 2$ $\sin x = -\frac{1}{2}$
 нет реш. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) Ответим корни с помощью окружности

Получим $x = -\frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

ИСТОЧНИКИ
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Единая книга (Иванов) 2022
 Ященко 2018
 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА
 Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14 Точка M — середина ребра AA_1 треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и N , перпендикулярно прямой C_1M .

а) Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из рёбер этой грани.
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении 1:5, считая от вершины A , $AC = 20$, $AA_1 = 32$.

а) $BB_1 \perp C_1M$
 $BB_1 \parallel AA_1$
 значит $C_1M \perp AA_1$
 значит $\triangle AC_1A_1$
 C_1M — медиана и вис.
 значит $\triangle AC_1A_1$ — р/б.
 $A_1C_1 = AC_1$

б) $BB_1 \perp C_1M$
 $BB_1 \parallel AA_1$
 значит $C_1M \perp AA_1$
 значит $\triangle AC_1A_1$
 C_1M — медиана и вис.
 значит $\triangle AC_1A_1$ — р/б.
 $A_1C_1 = AC_1$

① Пусть K — точка перес. α и AC
 K — точка перес. α и AC
 тогда BB_1 и K — сегменты BB_1 и K

② $CC_1 \parallel \alpha$
 значит $S(C_1; \alpha) = S(C_1; \alpha)$
 $C_1M \cap \alpha = K$
 $C_1A \cap \alpha = E$

③ $C_1M \perp \alpha$ по усл.
 значит C_1K — искомого расст.

④ Рассмотрим $\triangle AC_1A_1$:

$AC = 20$
 $AA_1 = 32$
 $C_1A_1 = 20$
 $AM = 16$
 $AK = \frac{20}{6}$
 $KC = \frac{100}{6}$
 $C_1M = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$
 $C_1K = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$
 т.к. $\triangle C_1K_1E \sim \triangle AC_1A_1$ с $k = \frac{5}{6}$

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



15 Решите неравенство $\frac{2^{x+1} - 17 \cdot 2^{2-x}}{2^x - 2^{6-x}} \geq 1$.

$$\frac{2 \cdot 2^x - 17 \cdot \frac{2^2}{2^x}}{2^x - \frac{2^6}{2^x}} - \frac{1}{1} \geq 0$$

$$\frac{2 \cdot 2^x - \frac{68}{2^x} - 2^x + \frac{64}{2^x}}{2^x - \frac{64}{2^x}} \geq 0$$

$$\frac{2^x - \frac{4}{2^x}}{2^x - \frac{64}{2^x}} \geq 0 \quad | \cdot \frac{2^x}{2^x}$$

$$\frac{4^x - 4}{4^x - 64} \geq 0$$

Пусть $4^x = t$

$$\frac{t-4}{t-64} \geq 0$$

$\begin{cases} t \leq 4 \\ t > 64 \end{cases}$

$\begin{cases} 4^x \leq 4 \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4^x > 64 \\ x > 3 \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (3; \infty)$

ИСТОЧНИКИ

Основные вопросы (Резерв) 2022
Докладовый вопрос 2019

СПЕЦИА

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m = \left(\frac{a}{1}\right)^m$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

16 В январе 2025 года планируется взять кредит на сумму 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ (сложный процент) с начала предыдущего года;
– с февраля по июль каждого года необходимо выплачивать одинаковые части долга;
– в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на каждую дату оплаты на 10% больше предыдущего года;
– в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на каждую дату оплаты на 10% меньше предыдущего года;
– в январе 2035 года долг должен быть полностью погашен.

ИСТОЧНИКИ

Типовой банк
ФЭП
Догов
Догов
Служба

Пусть $(1+r)^5 = b$
 январь - февраль - июль - август - сентябрь - октябрь - ноябрь - декабрь
 x - величина уменьшения
 y - величина уменьшения
 z - величина уменьшения

Первые 5 и последние 5 выплат ариф. прогр.
 Воспользуемся Ф-лой $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
 О.С.В. = 1480
 $\frac{800b - 680 + 320b - 200}{2} \cdot 5 + \frac{800b - 160 + 40b}{2} \cdot 5 = 1480$

Догов
 25 800 тыс.
 26 $800 - x = 680$
 27 $800 - 2x = 560$
 28 $800 - 3x = 440$
 29 $800 - 4x = 320$
 30 $800 - 5x = 200$
 31 $200 - y = 160$
 32 $200 - 2y = 120$
 33 $200 - 3y = 80$
 34 $200 - 4y = 40$
 35 $200 - 5y = 0$

Ответ: 20.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

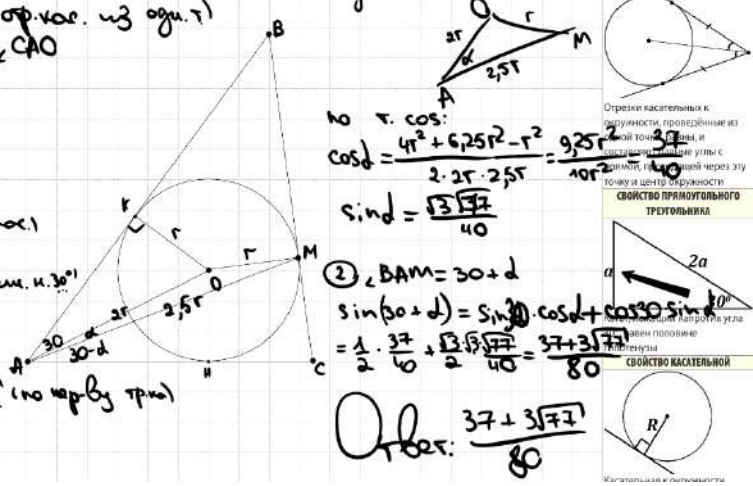


17 В треугольник ABC с углом A равным 60° вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке M .
 а) Докажите, что AM не больше утроенного радиуса вписанной окружности.
 б) Найдите синус большего из углов BAM и CAM , если AM равно $2,5$ радиусам вписанной окружности.

а) Пусть K, N - точки кас. с AB и AC соотв.
 б) $\triangle AOM$:
 Система $\angle OAM = d$

② $\triangle KAO$:
 $OK \perp KA$
 $\angle AKO = 90^\circ$
 (по св-ву кас.)
 $AO = 2r$
 (т.к. касет., тем. и 30°)

③ $\triangle AOM$:
 $AO + OM > AM$
 $AM < r + 2r$
 $AM < 3r$



по т. кос:
 $\cos d = \frac{4r^2 + 6,25r^2 - r^2}{2 \cdot 2r \cdot 2,5r} = \frac{9,25r^2}{10r^2} = \frac{37}{40}$
 $\sin d = \frac{\sqrt{37^2 - 40^2}}{40}$

② $\angle BAM = 30 + d$
 $\sin(30 + d) = \sin 30 \cdot \cos d + \cos 30 \cdot \sin d$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{37}{40} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{37^2 - 40^2}}{40} = \frac{37 + 3\sqrt{37}}{80}$

Ответ: $\frac{37 + 3\sqrt{37}}{80}$

ИСТОЧНИКИ
 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Всероссийский экзамен (Решар) 2024
 Основные вольта 2016

СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, и образуют равные углы с радиусом, проведенным через эту точку и центр окружности

СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В любом положении: сумма углов при вершине касательной и радиуса

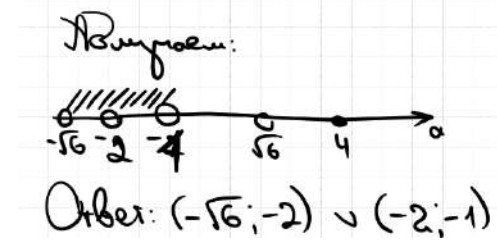
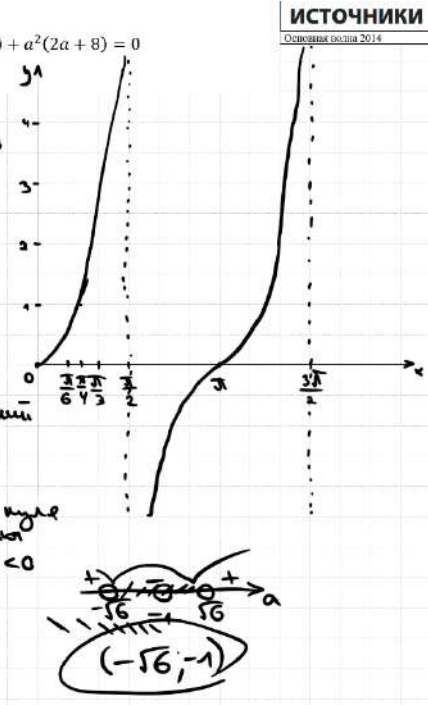
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18 Найдите все значения a , при которых уравнение $(tg x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(tg x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$

имеет на отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$ ровно два решения.
 Пусть $(tg x + 6) = t$
 $t^2 - (a^2 + 2a + 8)t + a^2(2a + 8) = 0$
 $t_1 + t_2 = a^2 + 2a + 8$
 $t_1 \cdot t_2 = a^2(2a + 8)$
 $t_1 = a^2$ $t_2 = 2a + 8$
 $\begin{cases} tg x + 6 = a^2 \\ tg x + 6 = 2a + 8 \end{cases}$
 1 случай

$a^2 = 2a + 8$
 $a^2 - 2a - 8 = 0$
 $a = 4$ $a = -2$
 $a = 4$ $a = -2$
 2 случая

когда обе функции имеют общее значение
 $\begin{cases} a^2 - 6 < 0 \\ 2a + 8 - 6 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a - \sqrt{6})(a + \sqrt{6}) < 0 \\ a < -1 \end{cases}$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4





19 Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их лицевых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

ИСТОЧНИКИ
 ГЭР (старый банк)
 ГЭР (новый банк)
 Досрочная яхта 2012
 Яхтенко 2022 (16 вер)
 Яхтенко 2021 (16 вер)
 Яхтенко 2020 (16 вер)
 Яхтенко 2020 (16 вер)
 Яхтенко 2020 (10 вер)
 Яхтенко 2019 (16 вер)
 Яхтенко 2019 (16 вер)
 Яхтенко 2018
 Егоров 2015

а) Может ли в результате получиться 0?
 б) Может ли в результате получиться 1?
 в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

а) $1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot 7 \cdot (-8) \cdot 9 \cdot 10 \cdot (-11) = 0$
 Среди данных чисел нет противоположных
 значит ни одна сумма не равна 0
 значит произв. не равно 0
 Ответ: а) нет.

б) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
 н н н н н н н н н н
 з з з з н н н н н н
 " " " " " " " " " "
 2 2
 :2 :2
 Из 10 сумм как минимум 2 четные
 каждая не меньше 1, т.к. резу-т
 как минимум 4.
 Ответ: б) нет

в) Как минимум 2 суммы из 10
 сумм являются четными (ср. п. б)
 значит исконое число не м.б. = 4
 Покажем, что 4 можно достичь

$1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot 7 \cdot (-8) \cdot 9 \cdot 10 \cdot (-11)$
 $-2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 7 \cdot (-5) \cdot 9 \cdot 8 \cdot (-14) \cdot 10$
 $-1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -1 = 4$
 Ответ: в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

