Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

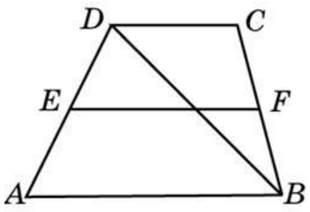
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

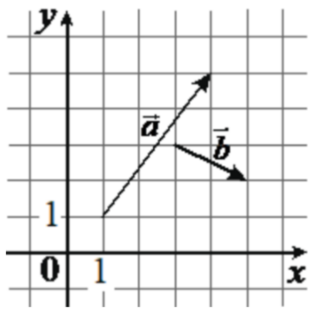
Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания трапеции равны 2 и 4. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: ____________________.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$.



Ответ: ____________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №4

3 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 2 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз меньше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: ____________________________.

4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до тысячных.

Ответ: ____________________________.

5 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\frac{2}{9}x = -3\frac{7}{9}$.

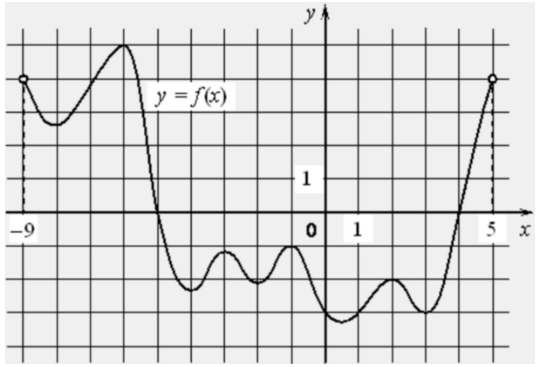
Ответ: ____________________________.

7 Найдите

$\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ____________________________.

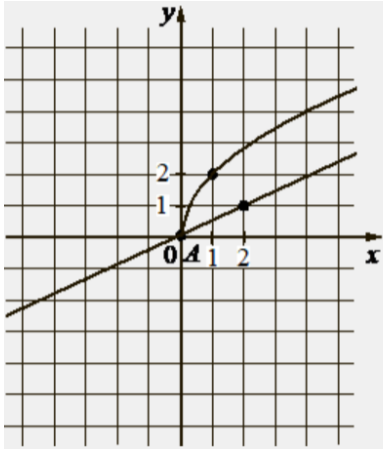
9 Водолазный колокол, содержащий $v = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13{,}3\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – постоянная, $T = 300$ К – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

Ответ: ____________________________.

10 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 384 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

11 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y = \ln(x+3)^7 - 7x - 9.$

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причём $B_1K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N — середина BC.
б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12, а её высота равна 2.

15 Решите неравенство

$$(x-7)\log_{x+3}(x+1)\cdot\log_3(x+3)^3 \le 0.$$

16 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400 000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 330 000 рублей, а во второй год – 121 000 рублей.

17 В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM:MB = CN:NB = 1:2$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка MN в точке L.

а) Докажите, что $AB + BC = 5AC$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $ML = 1$, $LN = 3$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

19 Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 3 и 8, либо только одну из этих цифр.

а) Может ли сумма всех чисел быть равной 94?
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 248?
в) Какое наименьшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 2659?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 4

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	2	▶
2	11	▶
3	50	▶
4	0,167	▶
5	0,488	▶
6	-17	▶
7	-0,96	▶
8	9	▶
9	7	▶
10	20	▶
11	16	▶
12	-2	▶
13	а) $\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$	▶
14	$\frac{5\sqrt{37}}{6}$	▶
15	$[0; 7]$	▶
16	10	▶
17	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	▶
18	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$	▶
19	а) да б) нет в) 8	▶

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

а) $2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0$

$2\sin x \cdot (\cos x + 1) - \sqrt{3} \cdot (\cos x + 1) = 0$

$(\cos x + 1) \cdot (2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

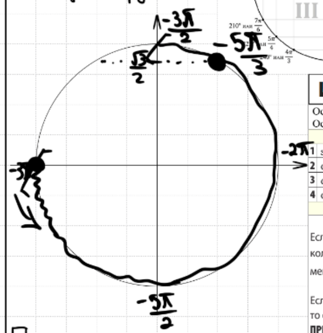
$\cos x + 1 = 0$ $\quad$ $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$\cos x = -1$ $\quad$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pi + 2\pi n;\ n \in Z$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

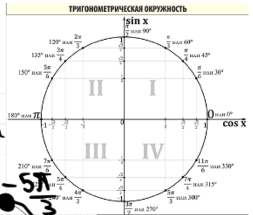
$x = -3\pi$

$x = -2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б) -3π; $-\frac{5\pi}{3}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2023

Основная волна (Резерв) 2016

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

4 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π, то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №4

14 Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причём $B_1K:KC_1 = 1:2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N — середина BC.

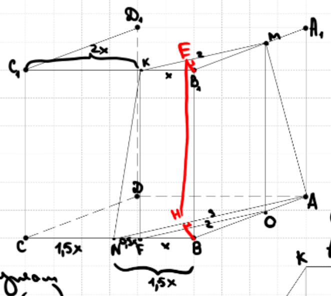
б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12, а её высота равна 2.

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2023

а) ① Пусть $B_1K = x$
$C_1K = 2x$

Построим $KF \parallel AA_1$
$OM \parallel AA_1$

$KMOF$ – трапеция.
$OF \parallel AN$



② $\triangle BOF \sim \triangle ABN$ по углам (...)

$k = \frac{3}{2} = \frac{AN}{OF}$

Тогда $BN = \frac{3}{2}\cdot BF = 1{,}5x$

т.е. BN – половина BC

N – середина BC ■

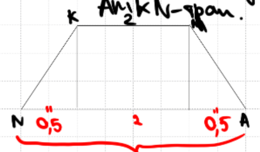
б) ① $V_{пр.} = S_{осн.пр.}\cdot h_{пр.}$

$12 = S_{осн.пр.}\cdot 2$

$S_{осн.пр.} = 6$

$S_{ABCD} = 6$

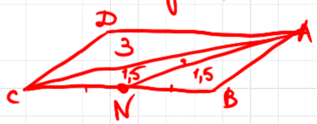
② Рассмотрим $AMKN$-трап.



Пусть $BИ$ - перп. к AN
B_1E - перп. к KM
$ИE$ – наклонная
$BИ$ - проекция

$BИ \perp AN$
значит $ИE \perp AN$ по ТТП

③ Рассмотрим $ABCD$:

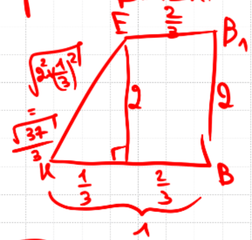


$S_{ABN} = 1{,}5 = \frac{1}{2}\cdot AN\cdot BИ$

$BИ = 1$

$B_1E = \frac{2}{3}BИ$

④ Рассмотрим $BB_1EИ$.



$S_{AMKN} = \frac{2+3}{2}\cdot\frac{\sqrt{37}}{3} = \frac{5}{6}\sqrt{37}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №4

15 Решите неравенство
$(x-7)\log_{x+3}(x+1)\cdot\log_3(x+3)^3 \le 0.$

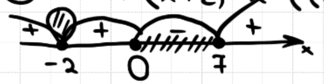
ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2016
Ященко 2018

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f-\log_a g$	$(a-1)(f-g)$
a^f-a^g	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f}-\sqrt{g}$	$(f-g)$

$(x-7)\cdot\left(\log_{x+3}(x+1)-\log_{x+3}1\right)\cdot\left(\log_3(x+3)^3-\log_3 1\right)\le 0$

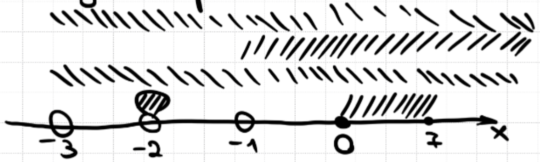
$$\begin{cases} ①\ (x-7)\cdot(x+3-1)\cdot(x+1-1)\cdot\cancel{(3-1)}\cdot((x+3)^3-1)\le 0 \quad |:2 \\ ②\ x+3>0 \\ ③\ x+3\ne 1 \\ ④\ x+1>0 \\ ⑤\ (x+3)^3>0 \end{cases}$$

① $(x-7)\cdot(x+2)\cdot x\cdot((x+3)^3-1)\le 0$



② $x>-3$
③ $x\ne-2$
④ $x>-1$
⑤ $x>-3$

Найдём пересечение:



Ответ: $[0;7]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400 000 рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года; $\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 330 000 рублей, а во второй год – 121 000 рублей.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2020
Основная волна 2017
Основная волна 2015

Пусть $\left(1+\frac{r}{100}\right)=b$
март - месяц платежа

Дата	Сумма долга
и20	400 тыс.
я21	$400\cdot b$
м21	$400b-330$
я22	$400b^2-330b$
м22	$400b^2-330b-121=0$

$D=108900-4\cdot400\cdot(-121)=$
$=108900+193600=302500=550^2$

$b=\dfrac{330\pm550}{800}$

$b=\dfrac{88\cancel{0}}{8\cancel{0}\cancel{0}}=\dfrac{11}{10}$ $\qquad b=\dfrac{-22\cancel{0}}{80\cancel{0}}$ – пост. корень

$1+\frac{r}{100}=1{,}1$

$\frac{r}{100}=0{,}1$

$r=10\%$

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №4

17 В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM:MB = CN:NB = 1:2$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка MN в точке L.

а) Докажите, что $AB + BC = 5AC$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $ML = 1$, $LN = 3$.

а) Пусть Q – центр окр-ти

E, K, O – точки кас.

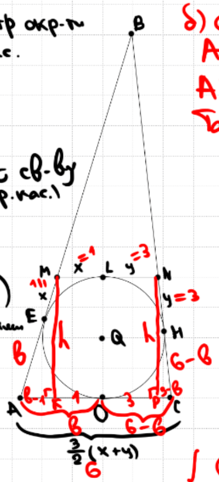
① Пусть $ML = x$, $LN = y$

Тогда $EM = x$, $NH = y$ (по св-ву отр. кас.)

② $\triangle BMN \sim \triangle ABC$ по 2 проп. ст. (...) и углу между ними

$k = \frac{AB}{BM} = \frac{3}{2}$

$AC = \frac{3}{2} BM = \frac{3}{2}(x+y)$



③ $AE = AO$

$CH = OC$

по св-ву отр. кас. ...

$AE + CH = \frac{3}{2}(x+y) = AC$

Тогда $BM + BN = 2 \cdot (AM + CN) = 5x + 5y$

$AB + BC = 1{,}5x + 1{,}5y + x + y + 5x + 5y = 7{,}5x + 7{,}5y$

$AC = 1{,}5x + 1{,}5y$

$AB + BC = 5AC$ ■

б) ① Пусть MK и NP – перпендикуляры

$AC = \frac{3}{2} \cdot (1+3) = 6$

$AE = b$

Тогда $AD = b$

$OC = 6 - b$

$CH = 6 - b$

$OP = 3 = LN$

$KO = 1 = ML$

$AK = b - 1$

$PC = 3 - b$

② по т. Пиф.:

$\triangle AMK$: $AM^2 = AK^2 + MK^2$

$\triangle NPC$: $NC^2 = PC^2 + NP^2$

$$\begin{cases} (b+1)^2 = (b-1)^2 + h^2 \\ (9-b)^2 = (3-b)^2 + h^2 \end{cases}$$

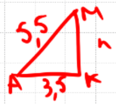
Выразим h^2

$(b+1)^2 - (b-1)^2 = h^2$

$(9-b)^2 - (3-b)^2 = h^2$

$(b+1)^2 - (b-1)^2 = (9-b)^2 - (3-b)^2$

$b = 4{,}5$



$h = 3\sqrt{2}$

$r = \frac{h}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2022

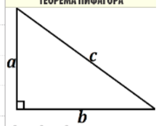
СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ

По двум углам

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$c^2 = a^2 + b^2$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №4

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

16B718

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2022
СтатГрад 29.01.2020
СтатГрад 24.01.2019
Сергеев 2018
СтатГрад 26.01.2017
Основная волна 2016

$$\begin{cases} ①\ x^2 + x - a \geq 0 \\ ②\ x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + (x-a))^2 \end{cases}$$

Решим ур-е ②

$\cancel{x^4} - x^2 + \cancel{a^2} = \cancel{x^4} + 2x^2\cdot(x-a) + (x-a)^2$

$-x^2 + \cancel{a^2} = 2x^3 - 2a\cdot x^2 + x^2 - 2ax + \cancel{a^2}$

$-2x^2 - 2x^3 + 2a\cdot x^2 + 2ax = 0 \quad |:(-2)$

$x^2 + x^3 - ax^2 - ax = 0$

$x\cdot(x + x^2 - ax - a) = 0$

$x\cdot(x\cdot(x+1) - a\cdot(x+1)) = 0$

$x\cdot(x+1)\cdot(x-a) = 0$

$x = 0 \quad x = -1 \quad x = a$

$\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$ т.к. иначе не будет 3 разл. корня.

Найдём при каких a каждый из трёх корней удовл. нер-ву ①

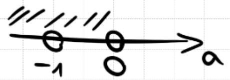
$x^2 + x - a \geq 0$

$x = 0$: $0^2 + 0 - a \geq 0$, $a \leq 0$

$x = -1$: $(-1)^2 - 1 - a \geq 0$, $a \leq 0$

$x = a$: $a^2 + \cancel{a} - \cancel{a} \geq 0$, a - любое

Получаем $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \leq 0 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 3 и 8, либо только одну из этих цифр.

а) Может ли сумма всех чисел быть равной 94?
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 248?
в) Какое наименьшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 2659?

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Основная волна 2020

Даны числа:
3, 8, 33, 38, 83, 88, 333, 338, 383, 388, 833, 838, 883, 888, 3333 и т.д.

а) $83 + 8 + 3 = 94$ например.
Ответ: а)

б) ① Наибольшим из слагаемых не может быть 333 и больше, значит надо набрать 248, используя 3, 8, 33, 38, 83, 88

② Сумма всех этих шести слагаемых 253
Если убрать 3, то будет 250
Если убрать любое другое число (или несколько чисел), то сумма будет <248
Ответ: б) нет.

19 Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 3 и 8, либо только одну из этих цифр.

а) Может ли сумма всех чисел быть равной 94?
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 248?
в) Какое наименьшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 2659?

в) ① Все слагаемые, которые можно использовать, при делении на 5 дают остаток 3
② 2659 при делении на 5 даёт остаток 4
③ 1 слагаемое использовать нельзя, т.к. 2659 не подходит
2 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 1
3 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 4
числа 3333 и больше использовать нельзя

$S_{\max\ 3\text{ слагаемых}} = 888+883+838=2609$, т.е. меньше, чем 2659

$\Rightarrow$ слагаемых нужно ≥ 4

4 слагаемых 2
5 слаг. 0
6 слаг 3
7 слаг. 1
8 слаг 4

$\Rightarrow$ слагаемых нужно ≥ 8

Покажем, что 8 слагаемых может быть

$\cancel{888}$ 838 $+ 883 + 388 + 383 + 88 + 38 + 33 + 8 = 2659$

Ответ: в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4