Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: $-0{,}8$. | 10 | - | 0 | , | 8 | Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

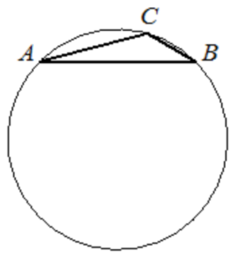
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC сторона AB равна $3\sqrt{2}$, угол C равен 135°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

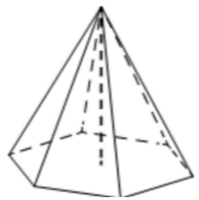


Ответ: ____________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\ (3; 4)$ и $\vec{b}\ (-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: ____________________________.

3 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 6,5, а сторона основания равна 2,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 34

4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ: ___________________________.

5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения

$3^{\log_{27}(2x-9)} = 3.$

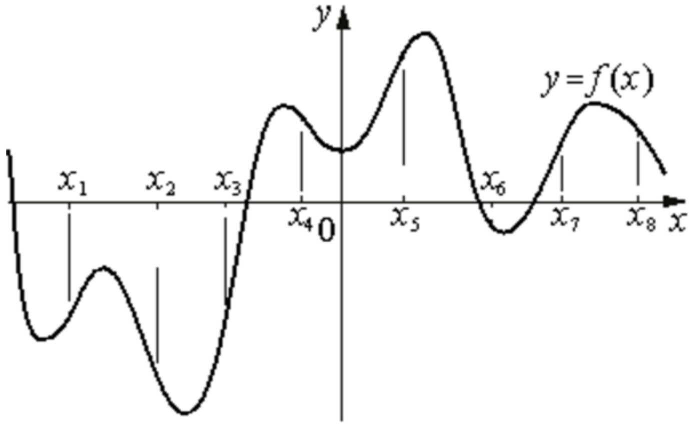
Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{21(\sin^2 66° - \cos^2 66°)}{\cos 132°}.$$

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: ___________________________.

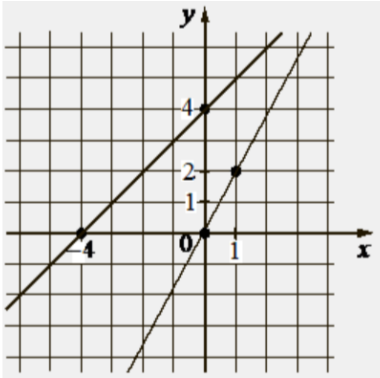
9 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускорено наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, прошедшее после начала работы лебёдки, $\omega = 50$ град./мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4$ град./мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Определите время, прошедшее после начала работы лебёдки, если известно, что за это время угол намотки φ достиг $2500°$. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

10 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 775 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 61 час. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображены графики двух линейных функций, пересекающиеся в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 69\cos x + 71x + 48$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра CC_1. На рёбрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK:KB = B_1N:NA_1$.

а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN, если $AB = BB_1 = 42$ и $BK:KA = 41:1$.

15 Решите неравенство

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \le 0.$$

16 Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.

Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

17 Дан треугольник ABC. Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC, при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC.

а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 34

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	3	
2	-0,96	
3	6	
4	0,5	
5	2	
6	18	
7	-21	
8	4	
9	25	
10	3	
11	4	
12	117	
13	а) $\pi + 2\pi n, \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n; n \in Z$ б) $-\frac{11\pi}{3}; -3\pi$	
14	$638\sqrt{3}$	
15	$(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$	
16	700000	
17	$\frac{\sqrt{1443}}{21}$	
18	$(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$	
19	а) нет б) нет в) 11,75	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

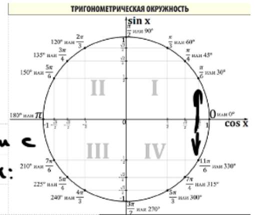
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



а) $\cos x - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$

$2\cos^2\frac{x}{2} - \cancel{1} - \sqrt{3}\cdot\cos\frac{x}{2} + \cancel{1} = 0$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\right) = 0$

$\cos\frac{x}{2} = 0$ $\qquad$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z \;|\cdot 2$ $\qquad$ $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

$x = \pi + 2\pi n; n \in Z$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью нер-ва:

Для $x = \pi + 2\pi n$

$-4\pi \le \pi + 2\pi n \le -\frac{5\pi}{2} \quad |:\pi$

$-4 \le 1 + 2n \le -\frac{5}{2} \quad |-1$

$-5 \le 2n \le -3{,}5 \quad |:2$

$-2{,}5 \le n \le -1{,}75$

$n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \pi + 2\pi\cdot(-2) = -3\pi$

Для $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$

$-4\pi \le \frac{\pi}{3} + 4\pi n \le -\frac{5\pi}{2} \quad |:\pi$

$-4 \le \frac{1}{3} + 4\cdot n \le -\frac{5}{2} \quad |-\frac{1}{3}$

$-\frac{13}{3} \le 4\cdot n \le -\frac{17}{6} \quad |:4$

$-\frac{13}{12} \le n \le -\frac{17}{24}$

$n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{1} = -\frac{11\pi}{3}$

Для $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi n$

$-4\pi \le -\frac{\pi}{3} + 4\pi n \le -\frac{5\pi}{2} \quad |:\pi$

$-4 \le -\frac{1}{3} + 4\cdot n \le -\frac{5}{2} \quad |+\frac{1}{3}$

$-\frac{11}{3} \le 4\cdot n \le -\frac{13}{6} \quad |:4$

$-\frac{11}{12} \le n \le -\frac{13}{24}$

Целых n на этом отрезке нет

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$

б) $-\frac{11\pi}{3}$; -3π.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2014

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π, то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

4 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

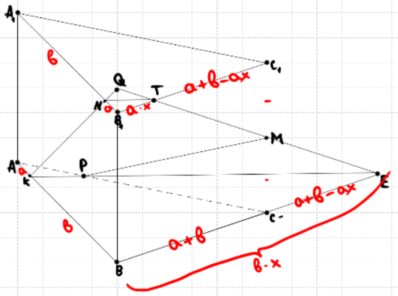
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра CC_1. На рёбрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK:KB = B_1N:NA_1$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2022

а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN, если $AB = BB_1 = 42$ и $BK:KA = 41:1$.

а) ① Пусть $KN \cap BB_1 = Q$
$QM \cap B_1C_1 = T$
$QM \cap BC = E$
$KE \cap AC = P$
$KPMTN$ – сеч.



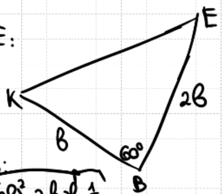
② Пусть $AK = a$
$BK = b$
Тогда $AB = a+b$
$B_1N = a$
$A_1N = b$

③ $\triangle QB_1N \sim \triangle QBK$ по 2 углам
$\triangle QB_1T \sim \triangle QBE$ по 2 углам
$\frac{B_1T}{BE} = \frac{QB_1}{QB} = \frac{B_1N}{BK} = \frac{a}{b}$
Тогда $B_1T = a \cdot x$
$BE = b \cdot x$
$C_1T = a+b-ax$

④ $\triangle C_1TM = \triangle CME$ по УСУ
$CE = a+b-ax = C_1T$

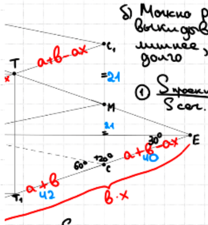
⑤ $BE = b \cdot x = a+b+a+b-ax$
$b \cdot x + ax = 2a+2b$
$x \cdot (a+b) - 2 \cdot (a+b) = 0$
$(a+b)(x-2) = 0$
$x = 2$ $\quad a = -b$
$BE = 2b$ $\quad$ нет реш.

⑥ $\triangle KBE$:



по т. cos:
$KE = \sqrt{b^2 + (2b)^2 - 2 \cdot b \cdot 2b \cdot \frac{1}{2}}$
$= \sqrt{3} \, b$
Заметим, что b $\triangle KBE$ вып. т. Пиф.
$\angle PKB = 90°$
$PK \perp AB$
$PK \perp AA_1$
$PK \perp (AA_1B)$
$(MKN) \perp (AA_1B)$ ■

б) Можно решать, выкидывая из $\triangle KQE$ лишнее, но это очень долго



① $\frac{S_{проекции}}{S_{сеч.}} = \cos\alpha$

$\frac{S_{KPCT_1N_1}}{S_{KPMTN}} = \cos\alpha$, где α – это угол между (MKN) и (ABC)
α – линейный угол искомого двугранного угла

② $S_{KBE} = \frac{BK \cdot KE}{2} = \frac{41 \cdot 41\sqrt{3}}{2}$
$KE = \sqrt{82^2 - 41^2} = \sqrt{2^2 \cdot 41^2 - 41^2} = 41\sqrt{3}$

③ $\triangle AKP$:

$PE = 41\sqrt{3} - \sqrt{3} = 40\sqrt{3}$
$S_{PCE} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot CE \cdot \sin 30° = 10\sqrt{3} \cdot 40$

④ $S_{BN_1T_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$a \cdot x$

⑤ $\cos\alpha = \frac{KN_1}{KN} = \frac{40}{58}$
$KN = \sqrt{40^2 + 42^2} = \sqrt{2^2 \cdot 20^2 + 2^2 \cdot 21^2} = \sqrt{841 \cdot 2^2} = 29 \cdot 2 = 58$

⑥ $S_{сеч.} = S_{проекц.} : \cos\alpha =$
$= \left(\frac{41^2\sqrt{3}}{2} - \frac{400\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \frac{40}{58} =$
$= \frac{440\sqrt{3} \cdot 58}{40} = 638\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 34

15 Решите неравенство

$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0.$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2020

СТЕПЕНИ	
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$27 \cdot 45^x - 27 \cdot 27^x - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$

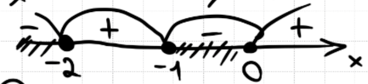
$27 \cdot 9^x \cdot (5^x - 3^x) - 12 \cdot 3^x (5^x - 3^x) + 1(5^x - 3^x) \leq 0$

$(5^x - 3^x) \cdot (27 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^x + 1) \leq 0$

$(5^x - 3^x) \cdot 27 \cdot \left(3^x - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(3^x - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \quad \Big| : 3^x \; : 27$

$\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{5}{3}\right)^0\right) \cdot (3^x - 3^{-2}) \cdot (3^x - 3^{-1}) \leq 0$

$\cancel{\left(\frac{5}{3} - 1\right)}(x - 0) \cdot \cancel{(3 - 1)} \cdot (x + 2) \cdot \cancel{(3 - 1)} \cdot (x + 1) \leq 0$



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.

Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2017

ПРОИЗВОДНЫЕ	
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

	часы	единица товара
I з.	x^2	x
II з.	y^2	y

① $70 = x + y$

Выразим $y = 70 - x$, где $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 70 - x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 70 \end{cases}$

$x \in [0; 70]$

② Сумма денег на оплату труда рабочих $= 500 \cdot x^2 + 200 \cdot y^2$

Найдём наименьшее знач. этого выраж.

$f(x) = 500x^2 + 200 \cdot (70 - x)^2$

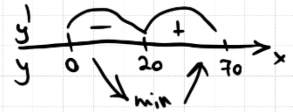
$= 500x^2 + 200 \cdot (70^2 - 140x + x^2)$

$= 500x^2 + 200 \cdot 70^2 - 28000x + 200x^2$

$= 700x^2 - 28000x + 200 \cdot 70^2$

$f'(x) = 1400x - 28000 = 0$

$x = 20$



$f(20)_{наим} = 500 \cdot 20^2 + 200 \cdot 50^2 = 200000 + 500000 = 700000$ р.

Ответ: 700 000 р.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 34

17 Дан треугольник ABC. Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC, при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC.

а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.

а) по т. cos:

$\cos A = \frac{3^2+4^2-37}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1}{2}$

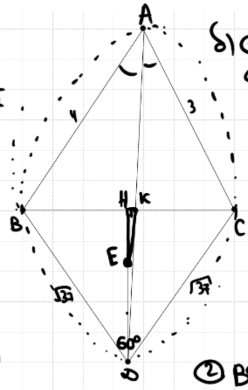
$\angle A = 120^\circ$

$\angle D = 60^\circ$

(т.к. $\triangle BDC$ – р/с по усл.)

$\angle A + \angle D = 180^\circ$

Значит около $ABDC$ можно опис. окр. ■



б) ① Окружность, описывающая $ABDC$ описывает и $\triangle BDC$

Значит центр этой опис. окр-ти – точка на высоте $\triangle BDC$

Пусть DH – высота $\triangle BDC$

$EH = \frac{1}{3}\cdot DH$

$AD \cap BC = K$

EK – иск. расстояние.

② $BD = CD$

$\smile BD = \smile CD$

$\angle BAK = \angle CAK$ опир. на равные дуги

AK – бисс.

по т. о бис в $\triangle ABC$:

$\frac{4}{3} = \frac{BK}{CK}$

$BK = \frac{4}{7}\cdot BC = \frac{4}{7}\sqrt{37}$

$BH = \frac{1}{2}\cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{37}$

$HK = \frac{4}{7}\sqrt{37} - \frac{1}{2}\sqrt{37} = \frac{1}{14}\sqrt{37}$

$HE = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{37} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{37}}{6}$

по т. Пиф.

$KE^2 = \frac{37}{14^2} + \frac{3\cdot 37}{36}$ (36 (196

$KE^2 = \frac{624\cdot 37}{196\cdot 36} = \frac{39\cdot 16\cdot 37}{196\cdot 36}$

$KE = \frac{\sqrt{481}}{7\sqrt{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

$$\begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a) = 0 \\ (x+4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ (x+4-a)(x+4+a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \end{array}\right. \\ x \neq a-4 \\ x \neq -a-4 \end{cases}$$

$x = \frac{a}{3}$ и $x = -\frac{a}{3}$ должны быть разл.

$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3}$

$\frac{2a}{3} \neq 0$

$a \neq 0$

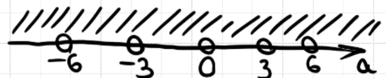
$X = \frac{a}{3}$ не должен быть равен $\begin{array}{l} a-4 \\ -a-4 \end{array}$

$\begin{cases} \frac{a}{3} \neq a-4 \\ \frac{a}{3} \neq -a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{3}a \neq 4 \\ \frac{4}{3}a \neq -4 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 6 \\ a \neq -3 \end{cases}$

$X = -\frac{a}{3}$ не должен быть равен $\begin{array}{l} a-4 \\ -a-4 \end{array}$

$\begin{cases} -\frac{a}{3} \neq a-4 \\ -\frac{a}{3} \neq -a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4}{3}a \neq 4 \\ \frac{2}{3}a \neq -4 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -6 \end{cases}$

Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Демо 2021
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

а) Пусть

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$

$\leq 7 \quad \leq 8 \quad \leq 9 \quad \leq 10 \quad \leq 11 \quad \leq 12 \quad \leq 13 \quad \leq 14 \quad \leq 15 \quad \leq 16 \quad \leq 17 \quad = 18$

Ср.ар. семи наиб. $\leq \frac{12+13+14+15+16+17+18}{7}$

Ср.ар. семи наиб. ≤ 15, т.е. 16 невозможно

Ответ: а) нет.

б)

На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

б) ① Ср.ар. $= \frac{\text{Сумма 12-ти чисел}}{12} = 11$

$\Rightarrow$ Сумма 12-ти чисел $= 132$

② $\overbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5}^{132-112=20}\ \overbrace{a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}^{7 \cdot 16 = 112}$

$\underbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7}_{7 \cdot 8 = 56}\ \underbrace{a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}_{132-56=76}$

Получаем, что $a_6 + a_7 = 56 - 20 = 36$
$a_6 + a_7 = 112 - 76 = 36$

Заметим, что $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} > 2{,}5 \cdot (a_6 + a_7)$
$76 > 2{,}5 \cdot 36$
$76 > 90$

НО $76 < 90$, т.е. $a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ оказалась меньше, чем $2{,}5 \cdot (a_6 + a_7)$, что невозможно.

Ответ: б) нет.

На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

в) ① Ср.ар.$_{\text{наим.}}$ – ?
Сумма чисел$_{\text{наим.}}$ – ?

Пусть S – сумма всех 12-ти чисел
Тогда

$\overbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5}^{S-112}\ \overbrace{a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}^{7 \cdot 16 = 112}$

$\underbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7}_{7 \cdot 8 = 56}\ \underbrace{a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}_{S-56}$

Получаем, что
$a_6 + a_7 = S - (S-112) - (S-56)$
$a_6 + a_7 = 168 - S$
$S = 168 - (a_6 + a_7)$
S будет наименьшей при наибольшем возможном значении $a_6 + a_7$

② Найдём $(a_6 + a_7)_{\text{наиб.}}$:

$a_8 - a_7 \geq 1$ + $a_8 - a_6 \geq 2$
$a_9 - a_7 \geq 2$ + $a_9 - a_6 \geq 3$
$a_{10} - a_7 \geq 3$ + $a_{10} - a_6 \geq 4$
$a_{11} - a_7 \geq 4$ + $a_{11} - a_6 \geq 5$
$a_{12} - a_7 \geq 5$ + $a_{12} - a_6 \geq 6$

$2a_8 + 2a_9 + 2a_{10} + 2a_{11} + 2a_{12} - 5 \cdot a_6 - 5 \cdot a_7 \geq 35$
$5(a_6 + a_7) \leq 2 \cdot (a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}) - 35 \quad | + 2a_6 + 2a_7$
$7(a_6 + a_7) \leq 2 \cdot (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}) - 35$
$7 \cdot (a_6 + a_7) \leq 2 \cdot 112 - 35$
$a_6 + a_7 \leq 27$
Получаем
$S \geq 168 - 27$
$S \geq 141$
Получаем
Ср.ар. $\geq \frac{141}{12}$
Ср.ар. $\geq 11{,}75$

③ Покажем, что ср.ар. $= 11{,}75$ может быть
$S = 141$
$a_6 + a_7 = 27$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	11	12	13	14	15	16	17	18	19

$\underbrace{1\ 2\ 3\ 11\ 12}_{56-27=29}$

Ответ: в) 11,75.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 34

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 34