Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

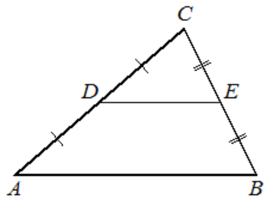
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь треугольника ABC равна 24. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

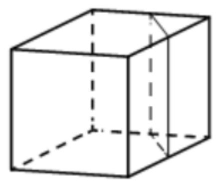


Ответ: ___________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\ (1;2)$, $\vec{b}\ (-3;6)$ и $\vec{c}\ (4;-2)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Ответ: ___________________________.

3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1,5. Найдите объём куба.



Ответ: ___________________________.

4 В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: ____________________________.

5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$

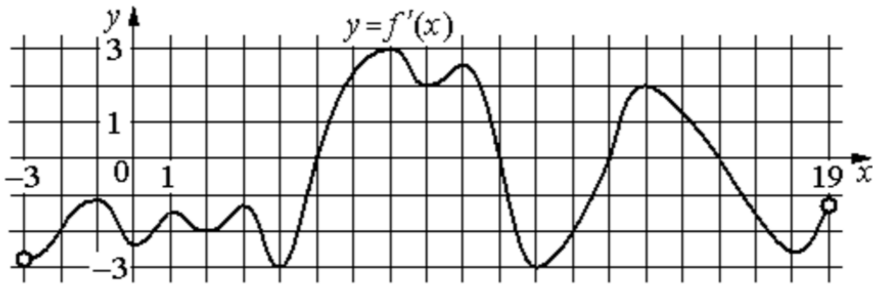
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}.$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x) -$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



Ответ: ____________________________.

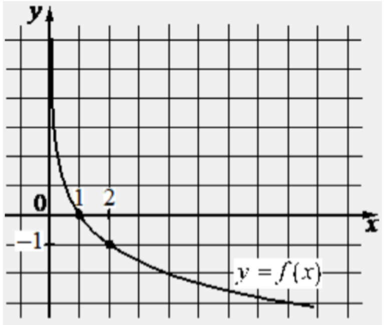
9 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 8 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 34$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}8 -$ постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 76,8 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

Ответ: ____________________________.

10 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Ответ: ____________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = (x^2 - 39x + 39) \cdot e^{2-x}$ на отрезке $[0; 6]$.

Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

15 Решите неравенство

$$\frac{6^x - 4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x - 5\cdot 2^x - 4x + 20} \le \frac{1}{x-5}.$$

16 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

17 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2+y^2) - ax + (a-3)y + 1 = 0, \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	6	
2	10	
3	12	
4	0,75	
5	0,6	
6	0,4	
7	-0,5	
8	1	
9	8,5	
10	20	
11	-3	
12	-35	
13	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{3}+\pi n; n \in Z$ б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{11\pi}{3}; \frac{15\pi}{4}$	
14	$\frac{12\sqrt{26}}{13}$	
15	$[0; 2) \cup (2; 5)$	
16	200	
17	$2:3$	
18	$(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$	
19	а) $-56; -16$ б) 64 в) $6; 8$	

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

а) $tg^2x + tgx + \sqrt{3}\cdot tgx + \sqrt{3} = 0$

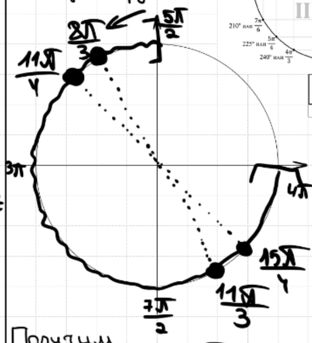
$tgx\cdot(tgx+1) + \sqrt{3}\cdot(tgx+1) = 0$

$(tgx+1)\cdot(tgx+\sqrt{3}) = 0$

$tgx = -1$ $\quad$ $tgx = -\sqrt{3}$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = 3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

$x = 3\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

$x = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$

$x = 4\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in Z$

б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{11\pi}{3}; \frac{15\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29

14 На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

ИСТОЧНИКИ
Сергеев 2018
Основная волна (Резерв) 2016

а) Пусть $AP \cap BC = R$

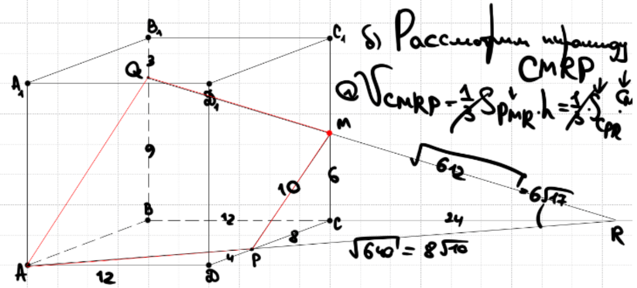
Постр. сеч.

...

① $\triangle ADP \sim \triangle CPR$ по 2 углам (...)

$k = 2$

$CR = 2 \cdot AD = 24$



② $\triangle CMR \sim \triangle RBQ$ по 2 углам (...)

$k = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

$CM = \frac{2}{3} \cdot BQ = 6$

M – середина CC_1 ■

б) Рассмотрим пирамиду CMRP

① $V_{CMRP} = \frac{1}{3} S_{PMR} \cdot h = \frac{1}{3} S_{CPR} \cdot CM$

② $\triangle PMR$:

...

по т. cos:

$\cos\angle R = \frac{612 + 640 - 100}{2 \cdot 8\sqrt{10} \cdot 6 \cdot \sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{170}}$

$\sin\angle R = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}$

$S_{PMR} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{17} \cdot \frac{8\sqrt{10} \cdot \sqrt{26}}{\sqrt{170}} = 24\sqrt{26}$

$h = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство
$$\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \le \frac{1}{x-5}.$$

ИСТОЧНИКИ
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2018

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$$\frac{3^x \cdot (2^x - 4)}{2^x \cdot (x-5) - 4 \cdot (x-5)} - \frac{1}{x-5} \le 0$$

$$\frac{3^x \cdot (2^x - 4)}{(x-5) \cdot (2^x - 4)} - \frac{1^{\,(2^x-4)}}{(x-5)} \le 0$$

$$\frac{3^x \cdot (2^x - 4) - 1 \cdot (2^x - 4)}{(x-5) \cdot (2^x - 4)} \le 0$$

$$\frac{(2^x - 2^2) \cdot (3^x - 3^0)}{(x-5) \cdot (2^x - 2^2)} \le 0$$

$$\frac{(\cancel{2-1})(x-2)(\cancel{3-1})(x-0)}{(x-5) \cdot (\cancel{2-1}) \cdot (x-2)} \le 0 \qquad | : 2$$

Ответ: $[0; 2) \cup (2; 5)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29

16 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2017
Основная волна (Резерв) 2016

Пусть март - месяц платежа

Дата	Сумма долга
и 16	S
я 17	$1{,}15\cdot S$ б.в.
м	$\Rightarrow 0{,}45\cdot S$
и	$0{,}7\cdot S$
я 18	$0{,}7\cdot S\cdot 1{,}15 = 0{,}805\cdot S$ б.в.
м	$\Rightarrow 0{,}405\cdot S$
и	$0{,}4\cdot S$
я 19	$0{,}4\cdot S\cdot 1{,}15 = 0{,}46\cdot S$ б.в.
м	$\Rightarrow 0{,}46\, S$
и	0

$$\begin{cases} \frac{\cancel{45}^{9}\cdot S}{\cancel{100}_{20}} \in \mathbb{Z} \\ \frac{\cancel{405}^{81}\cdot S}{\cancel{1000}_{200}} \in \mathbb{Z} \\ \frac{46\cdot S}{100} \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{9\cdot S}{20} \in \mathbb{Z} \\ \frac{81\cdot S}{200} \in \mathbb{Z} \\ \frac{23\cdot S}{50} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

S должно делиться без остатка на 20, 50 и 200 одновременно

$S_{\text{наим. цел.}} = 200$

Ответ: 200.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

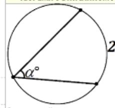
17 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK:KA$.

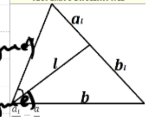
ИСТОЧНИКИ
Ященко 2018
Основная волна 2017

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ



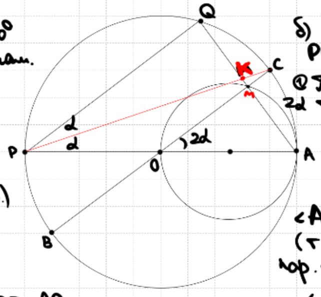
$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ

Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$



а) ① $\angle AQP = 90°$ (опир. на AP-диам. бол. окр.)

$\angle AMO = 90°$ (опир. на AO-диам. мал. окр.)

$PQ \parallel BC$ (т.к. обе прямые перпенд. общей AQ)

б) Докажем, что PK - биссектриса:

① Пусть $\angle COA = 2\alpha$
Тогда $\smile AC = 2\alpha$ (по т. о ц. угле)
$\angle APC = \alpha$ (по т. о впис. угле)
$\angle AOC = \angle APQ = 2\alpha$ (т.к. это соответственные при пар. прямых PQ и BC)
$\angle CPQ = 2\alpha - \alpha = \alpha$

② $\triangle PAQ$:
по т. о бис.:
$\frac{QK}{KA} = \frac{PQ}{AP} = \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)-ax+(a-3)y+1=0, \\ xy-1=y-x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

Упростим 2-е ур-е системы:

$x\cdot y-1-y+x=0$

$y(x-1)+1(x-1)=0$

$(x-1)\cdot(y+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Получаем $\begin{cases} ax^2+a\cdot y^2-a\cdot x+a\cdot y-3y+1=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} x=1 \\ \cancel{a}+a\cdot y^2-\cancel{a}+a\cdot y-3\cdot y+1=0 \end{cases} \\ ② \begin{cases} y=-1 \\ ax^2+\cancel{a}-a\cdot x-\cancel{a}+4=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Если $a=0$, то $\left[\begin{array}{l} \text{1 реш} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{нет} \begin{cases} y=-1 \\ 4=0 \end{cases} \end{array}\right.$ 1 реш.

значит $a\neq 0$

Если $a\neq 0$, то ур-е ① и ② должны иметь по 2 реш. каждое.

Получаем

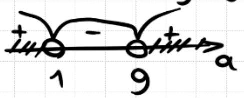
$\begin{cases} D_① > 0 \\ D_② > 0 \\ a\neq 0 \end{cases}$

$D_① > 0$

$(a-3)^2-4\cdot a\cdot 1>0$

$a^2-6a+9-4a>0$

$a^2-10\cdot a+9>0$

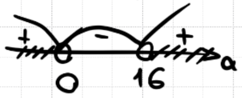


$D_② > 0$

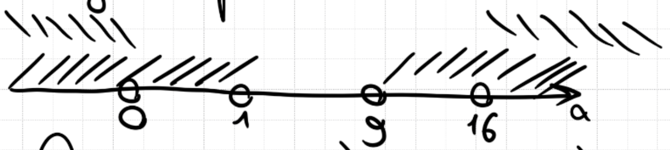
$(-a)^2-4\cdot a\cdot 4>0$

$a^2-16a>0$

$a(a-16)>0$



Найдём пересеч.:



Ответ: $(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2019

а) $x^2 + p \cdot x + 55 = 0$
по т. Виета:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 55 \end{cases}$

$x_1 = 1$, $x_2 = 55$. Тогда $p = -56$

$x_1 = 5$, $x_2 = 11$. Тогда $p = -16$

Ответ: -56 и (-16).

б) по т. Виета:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \quad (\cdot(-1)) \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$+\begin{cases} -x_1 - x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = p + q = 30$
$x_1 \cdot (x_2 - 1) - x_2 + 1 = p + q + 1$
$x_1 \cdot (x_2 - 1) - 1 \cdot (x_2 - 1) = 31$
$(x_2 - 1) \cdot (x_1 - 1) = 31$

Учитывая, что X_1 и X_2 – нат. число
Получаем

$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 31 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 32 \end{cases}$ $q = 2 \cdot 32 = 64$

$\begin{cases} x_1 - 1 = 31 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 32 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $q = 32 \cdot 2 = 64$

Ответ: б) 64.

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

в) ① $(q - p)(q + p) = 2108$

② Разложим 2108 на простые множители:
$2108 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$

2108	2
1054	2
527	17
31	31
1	

③ по т. Виета:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$+\begin{cases} -x_1 - x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$(q - p) \cdot (q + p) = 2108$
$(x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2) = 2108$
Множители в левой части уравнения отличаются друг от друга на чётное число $(2x_1 + 2x_2)$
=> множители одной чётности, т.е. оба чётные, либо оба нечётные
НО 2108 – чётное => множители чётные.

Также первый множитель больше.

④ Получаем:
$(x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2) = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$

$(2 \cdot 31) \cdot (2 \cdot 17) = 2108$
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 62 \quad |+1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 34 \quad |+1 \end{cases}$
$\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 63 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 35 \end{cases}$
Если $x_1 = 2$, $x_2 = 36$ ×
Если $x_1 = 6$, $x_2 = 8$ ✓
Если $x_1 = 8$, $x_2 = 6$ ✓
Если $x_1 = 36$, $x_2 = 2$ ×

Или

$(2 \cdot 31 \cdot 17) \cdot (2) = 2108$
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 1054 \quad |+1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 2 \quad |+1 \end{cases}$
$\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1055 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 \end{cases}$
Если $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ×
Если $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ ×

Ответ: в) 6 и 8

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 29