## Единый государственный экзамен
## по МАТЕМАТИКЕ
## Профильный уровень

### Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.


При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

***Желаем успеха!***

### Справочные материалы

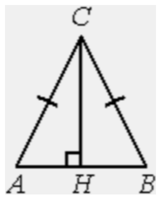
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

## Часть 1

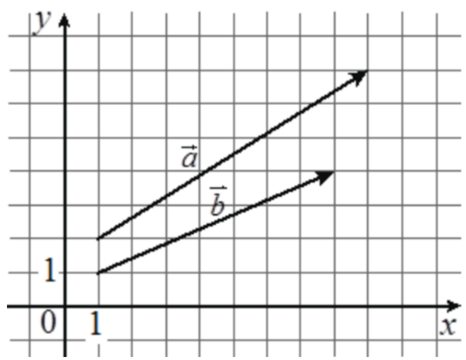
***Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.***

**1** В треугольнике $ABC$ $AC = BC$, высота $CH$ равна 19,2, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите $AC$.




Ответ: ___________________________.

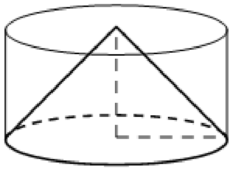
**2** На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.




Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

**3** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $5\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Ответ: ____________________________.

**4** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов меньше 2.

Ответ: ____________________________.

**5** Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: ____________________________.

**6** Найдите корень уравнения

$(x+12)^2 = 48x.$

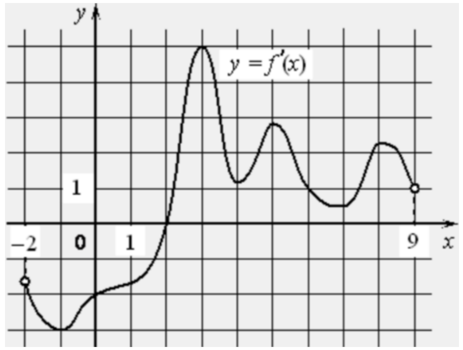
Ответ: ____________________________.

**7** Найдите значение выражения

$6\log_7 \sqrt[3]{7}.$

Ответ: ____________________________.

**8** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?




Ответ: ____________________________.

**9** Небольшой мячик бросают под острым углом $\alpha$ к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика $H$ (в м) вычисляется по формуле $H = \frac{{v_0}^2}{4g}(1-\cos\alpha)$, где $v_0 = 26$ м/с – начальная скорость мячика, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с$^2$). При каком наименьшем значении угла $\alpha$ мячик пролетит над стеной высотой 7,45 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

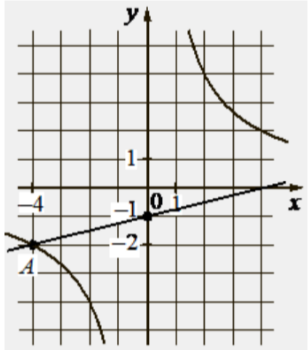
Ответ: ____________________________.

**10** Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,5 км от дома. Один идёт со скоростью 2,2 км/ч, а другой — со скоростью 4,4 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

**11** На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, пересекающиеся в точках $A$ и $B$. Найдите абсциссу точки $B$.




Ответ: ___________________________.

**12** Найдите наибольшее значение функции

$y = 25x - 25\operatorname{tg} x + 41$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ___________________________.

***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.***

## Часть 2

***Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.***

**13** а) Решите уравнение

$$10^{\sin x} = 2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

**14** Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.

а) Докажите, что ребро $SD$ перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.
б) Найдите расстояние между прямыми $AC$ и $SB$.

**15** Решите неравенство

$$2^{x+1} + 0{,}5^{x-3} \geq 17.$$

**16** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

**17** Периметр треугольника $ABC$ равен 36. Точки $E$ и $F$ — середины сторон $AB$ и $BC$ соответственно. Отрезок $EF$ касается окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

а) Докажите, что $AC = 9$.
б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если $\angle ACB = 90°$.

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 5x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

**19** Про некоторый набор, состоящий из 15 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 2015?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 24?
в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

| **СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:** | |
|---|---|
| **ФИО:** | Евгений Пифагор |
| **Предмет:** | Математика |
| **Стаж:** | 14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ |
| **Регалии:** | Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль<br>Результаты моих учеников<br>Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014<br>Победитель трёх олимпиад по высшей математике |
| **ВК:** | https://vk.com/shkolapifagora |
| **Ютуб:** | https://www.youtube.com/c/pifagor1 |

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

## Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

| Номер задания | Правильный ответ | Видео решение |
|---|---|---|
| 1 | 20 | |
| 2 | 71 | |
| 3 | 5 | |
| 4 | 0,5 | |
| 5 | 0,0009 | |
| 6 | 12 | |
| 7 | 2 | |
| 8 | 2 | |
| 9 | 60 | |
| 10 | 1 | |
| 11 | 8 | |
| 12 | 41 | |
| 13 | а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n; n \in Z$<br>б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$ | |
| 14 | $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ | |
| 15 | $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ | |
| 16 | 1400 тыс. | |
| 17 | 54 | |
| 18 | $\left\{-\frac{21}{16}\right\} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{19}{16}\right\} \cup \left\{\frac{25}{4}\right\}$ | |
| 19 | а) да<br>б) нет<br>в) 480 | |



## Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

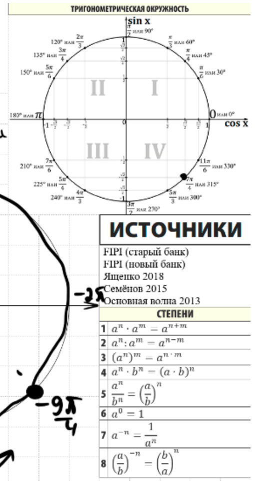
**Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.**

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

**13** а) Решите уравнение

$$10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.



а) $2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} - 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} = 0$

$2^{\sin x} \cdot \left(5^{\sin x} - 5^{-\cos x}\right) = 0$

$2^{\sin x} = 0$ нет реш.

$5^{\sin x} - 5^{-\cos x} = 0$

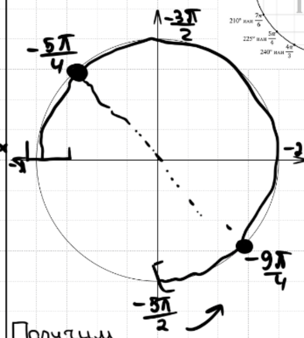
$5^{\sin x} = 5^{-\cos x}$

$\sin x = -\cos x \quad | :\cos x$

$\operatorname{tg} x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = -\frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**14** Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.

а) Докажите, что ребро $SD$ перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние между прямыми $AC$ и $SB$.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2023

Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.

а) Докажите, что ребро $SD$ перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние между прямыми $AC$ и $SB$.

Основная волна 2023

а) ① Пусть $AC \cap BD = O$

$BO = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} = DO$

② $\triangle SAC$ – р/б.

$SO$ – медиана и выс.

$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = 5\sqrt{7}$

③ $\triangle SOB$:

по т. cos:

$\cos\alpha = \frac{20^2 + (5\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{7})^2}{2 \cdot 20 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{300}{20 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\triangle SBD$:

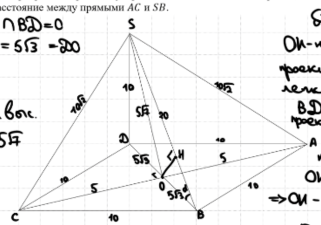
по т. cos:

$SD = \sqrt{20^2 + (10\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}}} = 10$

⑤ Заметим, что в $\triangle SCD$ и $\triangle SAD$ вып. т. Пиф.

$\triangle SCD$ и $\triangle SAD$ – прямоуг по т., обр. т. Пиф.

$SD \perp AD$, $SD \perp CD$ $\Rightarrow$ $SD \perp$ пл. осн. по пр. перп. прямой и пл-ти.



б) ① 1 способ ТТП

$OH$ – наклонная

проекция этой накл. лежит на прямой $BD$

$BD \perp AC$ по св-ву ромба

$OH \perp AC$

$OH \perp SB$ по постр

$\Rightarrow OH$ – искомое расст.

2 способ

$AC \perp BD$

$AC \perp SD$

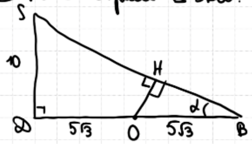
$\Rightarrow AC \perp (BSD)$

$AC \perp OH$

$SB \perp OH$ по постр.

$\Rightarrow OH$ – иск. расст.

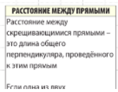
② Рассмотрим $\triangle SBD$:



$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2} = \frac{OH}{5\sqrt{3}}$

$OH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.




Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

**15** Решите неравенство

$2^{x+1} + 0{,}5^{x-3} \geq 17.$

**ИСТОЧНИКИ**

Основная волна (Резерв) 2018

| СТЕПЕНИ | |
|---|---|
| 1 | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ |
| 2 | $a^n : a^m = a^{n-m}$ |
| 3 | $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ |
| 4 | $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ |
| 5 | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ |
| 6 | $a^0 = 1$ |
| 7 | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ |
| 8 | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ |

$2^x \cdot 2^1 + \left(2^{-1}\right)^{x-3} - 17 \geq 0$

$2 \cdot 2^x + 2^{3-x} - 17 \geq 0$

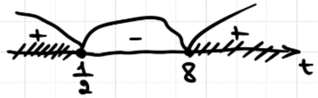
$\frac{2 \cdot 2^x}{1}{}^{(2^x} + \frac{2^3}{2^x}{}^{(1} - \frac{17}{1}{}^{(2^x} \geq 0$

$\frac{2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8}{2^x} \geq 0$

$2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 \geq 0$

Пусть $2^x = t$

$2t^2 - 17t + 8 \geq 0$



$\left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{2} \\ t \geq 8 \end{array}\right.$

$2^x \leq 2^{-1}$ $\qquad$ $2^x \geq 2^3$

$x \leq -1$ $\qquad$ $x \geq 3$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**16** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

**ИСТОЧНИКИ**

Основная волна 2021

Ященко 2022 (36 вар)

Пусть $a = 1{,}19$

$b = 1{,}16$

мфт – месяц платежа

| Дата | Сумма долга | |
|---|---|---|
| и 25 | 700 тыс | |
| я 26 | $700 \cdot a$ | |
| м 26 | | ⇒ Сумма выплата $700 \cdot a - 630$ |
| и 26 | 630 | |
| я 27 | $630 \cdot a$ | |
| м 27 | | ⇒ С.В. $630 \cdot a - 560$ |
| и 27 | 560 | |
| я 28 | $560 \cdot a$ | |
| м 28 | | ⇒ С.В. $560 \cdot a - 490$ |
| и 28 | 490 | |
| я 29 | $490 \cdot a$ | |
| м 29 | | ⇒ С.В. $490 \cdot a - 420$ |
| и 29 | 420 | |
| я 30 | $420 \cdot a$ | |
| м 30 | | ⇒ С.В. $420 \cdot a - 350$ |
| и 30 | 350 | |
| я 31 | $350 \cdot b$ | |
| м 31 | | ⇒ С.В. $350 \cdot b - 280$ |
| и 31 | 280 | |
| я 32 | $280 \cdot b$ | |
| м 32 | | ⇒ С.В. $280 \cdot b - 210$ |
| и 32 | 210 | |
| я 33 | $210 \cdot b$ | |
| м 33 | | ⇒ С.В. $210 \cdot b - 140$ |
| и 33 | 140 | |
| я 34 | $140 \cdot b$ | |
| м 34 | | ⇒ С.В. $140 \cdot b - 70$ |
| и 34 | 70 | |
| я 35 | $70 \cdot b$ | |
| м 35 | | ⇒ С.В. $70 \cdot b$ |
| и 35 | 0 | |

Первые 5 и последние 5 платежей обр. арифм. прогр.

Воспользуемся ф-лой $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

О.С.В. = первые 5 выплат + посл. 5 выплат =

$= \frac{700 \cdot a - 630 + 420 \cdot a - 350}{2} \cdot 5 + \frac{350b - 280 + 70b}{2} \cdot 5 =$

$= (560 \cdot a - 490) \cdot 5 + (210b - 140) \cdot 5 =$

$= \frac{\cancel{560}^{28} \cdot 119}{\cancel{100}_{2}} \cdot \cancel{5} - 2450 + \frac{\cancel{210} \cdot \cancel{116}^{58}}{\cancel{100}_{2}} \cdot \cancel{5} - 700 =$

$= 3332 - 2450 + 1218 - 700 =$

$= 182 + 1218 = 1400$ тыс.

Ответ: 1400 тыс.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

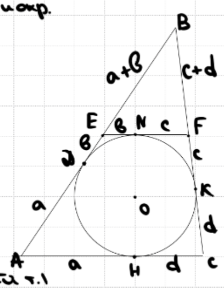
**17** Периметр треугольника $ABC$ равен 36. Точки $E$ и $F$ — середины сторон $AB$ и $BC$ соответственно. Отрезок $EF$ касается окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

а) Докажите, что $AC = 9$.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если $\angle ACB = 90°$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2024

а) ① Пусть N – т. кас. EF и окр.
D – т. кас. AB
K – т. кас. BC
Н – т. кас. AC
O – центр. окр.

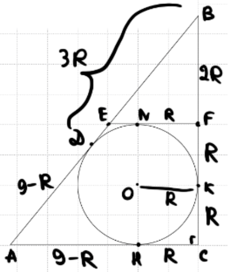



Пусть $AD = a = AH$
$DE = b = EN$
$NF = c = FK$
$CK = d = CH$
(по св. отр. кас. из одной т.)
Тогда $BE = a+b = AE$
$BF = c+d = CF$
т.к. E и F - середины AB и BC

② $P_{ABC} = 3a + 3d + 2b + 2c = 36$
$AC = 2EF$ (т.к. EF – ср. линия)
$a + d = 2b + 2c$

③ Треб. найти AC, т.е. $a+d$
$$\begin{cases} 3a + 3d + 2b + 2c = 36 \\ a + d = 2b + 2c \end{cases}$$
$4a + 4d = 36$
$a + d = 9$
$AC = 9$ ■

б)




① Пусть $CK = R = KF = CH$
(т.к. OHCK – квадрат и OKFN)
Тогда $AH = 9 - R = AD$
$BF = 2R = CF$
$BD = 3R = BK$
(по св-ву отр. кас., пров. из одной т.)

② $\triangle ABC$:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$(9+2R)^2 = 9^2 + (4R)^2$
$81 + 36R + 4R^2 = 81 + 16R^2$
$12R^2 - 36R = 0$
$R^2 - 3R = 0$
$R \cdot (R-3) = 0$
$R = 0$ (пост. кор.) $\quad R = 3$
$BC = 4R = 12$

$S_{ABC} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$

Ответ: 54

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 26

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 5x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

**ИСТОЧНИКИ**
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

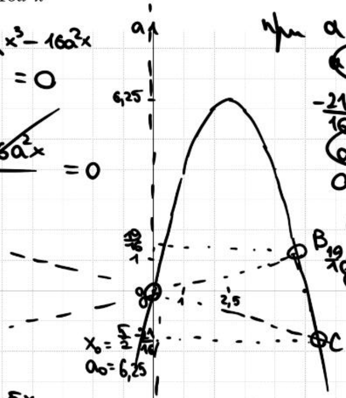
$$\frac{x^3+x^2-16a^2x-5x+a}{x^3-16a^2x} - \frac{1}{1}^{(x^3-16a^2x} = 0$$

$$\frac{\cancel{x^3}+x^2-\cancel{16a^2x}-5x+a-\cancel{x^3}+\cancel{16a^2x}}{x^3-16a^2x} = 0$$

$$\frac{x^2-5x+a}{x\cdot(x^2-16a^2)} = 0$$

$$\frac{x^2-5x+a}{x\cdot(x-4a)(x+4a)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2-5x+a=0 \\ x\neq 0 \\ x\neq 4a \\ x\neq -4a \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-x^2+5x \\ x\neq 0 \\ a\neq \frac{1}{4}\cdot x \\ a\neq -\frac{1}{4}\cdot x \end{cases}$$



при $a<-\frac{21}{16}$ 2 реш
$a=-\frac{21}{16}$ 1 реш
$-\frac{21}{16}<a<0$ 2 реш
$a=0$ 1 реш
$0<a<\frac{19}{16}$ 2
$a=\frac{19}{16}$ 1
$\frac{19}{16}<a<6{,}25$ 2
$a=6{,}25$ 1
$a>6{,}25$ 0

Найдём ординату т.B:
$-x^2+5x=\frac{1}{4}x$
$x^2-4{,}75x=0$
$x\cdot(x-4{,}75)=0$
$x=0$ $x=4{,}75$
$a_B=\frac{1}{4}\cdot\frac{19}{4}=\frac{19}{16}$

Найдём ординату т. C:
$-x^2+5x=-\frac{1}{4}x$
$x^2-5{,}25x=0$
$x=0$ $x=5{,}25$
$a_C=\frac{1}{4}\cdot\frac{21}{4}=-\frac{21}{16}$

Ответ: $\left\{-\frac{21}{16}; 0; \frac{19}{16}; \frac{25}{4}\right\}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого конечным числом точек | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$ | 2 |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** Про некоторый набор, состоящий из 15 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 2015?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 24?
в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

**ИСТОЧНИКИ**
FIPI (новый банк)
Семёнов 2018
Семёнов 2015

а) 2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015

Сумма двух самых больших $<$ Сумма трёх самых меньших
4029 6006

Ответ: а) да

б) ① Пусть
$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}<a_{11}<a_{12}<a_{13}<a_{14}<a_{15}$

Известно
$a_{14}+a_{15}<a_1+a_2+a_3$
$a_1\leq 24$
$a_{14}\geq a_2+12$
$a_{15}\geq a_3+12$
$24\geq a_1$
$\cancel{24}+a_{14}+a_{15}\geq a_1+a_2+a_3+\cancel{24}$,
что противоречит условию
значит среди чисел нет 24
Ответ: б) нет.

в) ① Может ли число 23 быть в наборе?
$23>a_1$
$+\ a_{14}\geq a_2+12$
$a_{15}\geq a_3+12$

$a_{14}+a_{15}\geq a_1+a_2+a_3+1$, что противоречит условию
Заметим, что и чисел меньше 23 в набре быть неможет, т.к. не будет воплняться условие $a_{14}+a_{15}<a_1+a_2+a_3$

② Получаем, что набор 25, 26, 27 … 38, 39 – из наименьших возможных ряд натур. чисел.
$38+39 < 25+26+27$
$77 < 78$
$\Rightarrow$ Сумма любых двух $<$ Сумма любых трёх

Сумма чисел такого набора $=\frac{25+39}{2}\cdot 15 = 32\cdot 15 = 480$
Ответ: в) 480

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в* | 4 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |