Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8.

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

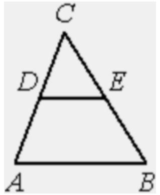
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

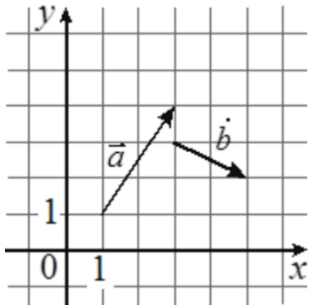
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ: ____________________________.

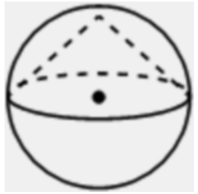
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a}+3\vec{b}$.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 25

3 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.



Ответ: ___________________________.

4 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\sqrt[3]{x-3} = 4.$

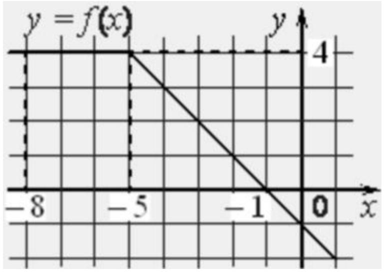
Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения

$\frac{7\sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}.$

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-8)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

9 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 20$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

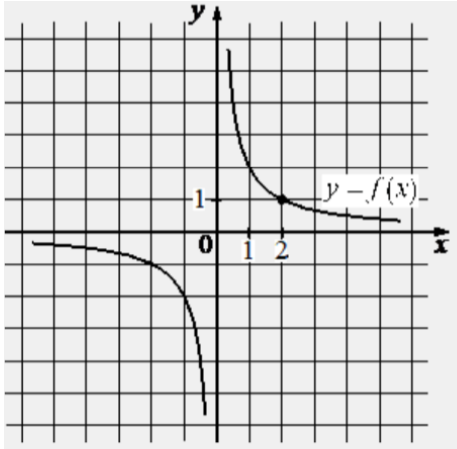
Ответ: ___________________________.

10 Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 25

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции

$y = 1{,}5x^2 - 30x + 48 \cdot \ln x + 4$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x\right) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8$, $SO = 14$.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}.$$

16 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад больше 5 млн рублей.

17 Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.
б) Найдите площадь трапеции.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-2ax+7|=|6a-x^2-2x-1|$$

имеет более двух различных корней.

19 На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 6 чисел, сумма которых равна 71?
б) Может ли на доске быть 9 чисел, сумма которых равна 71?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 7000?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 25

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	96	
2	8	
3	50	
4	0,97	
5	0,12	
6	67	
7	14	
8	20	
9	24	
10	15	
11	0,2	
12	8	
13	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$	
14	$\frac{88\sqrt{2}}{3}$	
15	$(0;1)\cup\{8\}\cup(64;+\infty)$	
16	9 млн	
17	60	
18	$(-\infty;-2\sqrt{10}-5)\cup\{-1\}\cup\left(2\sqrt{10}-5;\frac{8}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$	
19	а) да б) нет в) 2 или 3	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

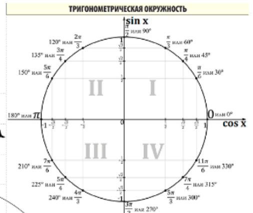
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



а) $4^x = 4^x - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x$

$6\sin^2 x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$

$6\cdot(1-\cos^2 x) + \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$

$6 - 6\cdot\cos^2 x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$

$-6\cos^2 x + \sqrt{3}\cdot\cos x + 6 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$-6\cdot t^2 + \sqrt{3}\cdot t + 6 = 0$

$D = (\sqrt{3})^2 - 4\cdot(-6)\cdot 6 = 147 = 49\cdot 3$

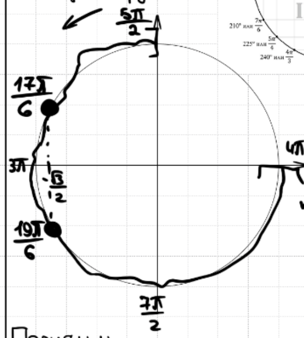
$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{-12}$

$t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad t = \frac{-8\sqrt{3}}{-12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ Нет реш.

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = \frac{3\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

$x = \frac{3\pi}{1} + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n\in Z$

б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2023
Основная волна 2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$

СТЕПЕНИ

1	$a^n\cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
4	$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE:EO = SF:FC = 2:1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8$, $SO = 14$.

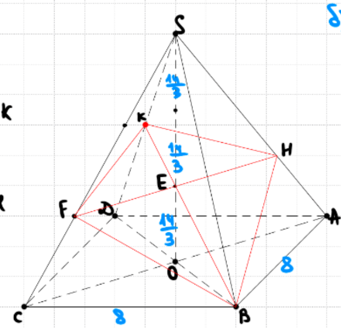
ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2021

а) ① Построение сеч.

Построим BF
BE
$BE\cap SD = K$
FK
FE
$FE\cap SA = H$
KH
BH

BFKH – сечение



② $\triangle BSD$ – р/б.

SO – мед.

E – точка пересеч. медиан, т.к. $\frac{SE}{EO} = \frac{2}{1}$ по усл.

значит BK – мед.

K – сер. SD ■

б) $S_{BFKH} = \frac{FH\cdot BK}{2}\cdot\sin\angle FEK$

① Найдём FH:

$\triangle SEF \sim \triangle SOC$ (...)

значит $FE \parallel CO$

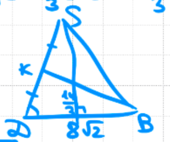
$FH \parallel AC$

$\triangle SFH \sim \triangle SAC$ (...)

$k = \frac{2}{3}$

$FH = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\cdot 8\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

② $\triangle BDS$:



$BS = \sqrt{14^2 + (4\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{57}$

$DK = \sqrt{57}$

$\cos\angle D = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{57}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}$

по т. cos в $\triangle BDK$

$BK^2 = 57 + (8\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{57}\cdot 8\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}$

$BK = 11$

③ BD – проекция для накл. BK

$BD_{\text{проекция}} \perp AC$

$BK_{\text{накл}} \perp AC$ по ТТП

$FH \parallel AC$

Тогда $BK \perp FH$

$S_{BFKH} = \frac{16\sqrt{2}\cdot 11}{3\cdot 2}\cdot\sin 90° = \frac{88\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}.$$

$$\frac{\log_8 x}{\log_8 x - \log_8 64} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - 2\log_8 |x|}$$ "x, т.к. x>0

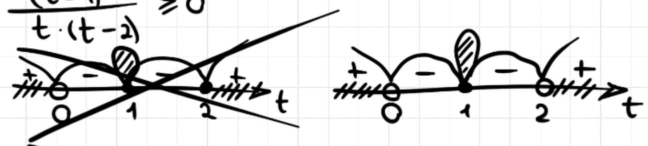
Пусть $\log_8 x = t$

$$\frac{t^{(t}}{t-2} - \frac{2^{(t-2}}{t} - \frac{3^{(1}}{t^2-2t} \geq 0$$

$$\frac{t^2-2t+4-3}{t\cdot(t-2)} \geq 0$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t\cdot(t-2)} \geq 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t\cdot(t-2)} \geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<0 \\ t=1 \\ t>2 \end{array}\right.$$

$\log_8 x < \log_8 1$ $\log_8 x = \log_8 8$ $\log_8 x > \log_8 64$

$0<x<1$ $x=8$ $x>64$

Ответ: $(0;1) \cup \{8\} \cup (64;+\infty)$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2017

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1	$\log_a b + \log_a c = \log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

ФСУ

1	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 25

16 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад больше 5 млн рублей.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (новый банк)
Пересдача 2025
Резервная волна (Резерв) 2025
Основная волна (резерв) 2020
Ященко 2018
Досрочная волна 2016

Пусть S – сумма вклада
янв 21 – месяц откр. вкл.
дек – месяц начисл. %
янв – месяц пополн. вклада

Дата	Сумма вклада
я21	S
д21	$1{,}1\cdot S$
я22	ничего не происходит
д22	$1{,}1^2\cdot S$
я23	$1{,}1^2\cdot S+3$
д23	$1{,}1^3\cdot S+1{,}1\cdot 3$
я24	$1{,}1^3\cdot S+1{,}1\cdot 3+3$
д24	$1{,}1^4\cdot S+1{,}1^2\cdot 3+3\cdot 1{,}1$

$$\frac{11^4}{10^4}\cdot S+\frac{11^2}{10^2}\cdot 3+3\cdot\frac{11}{10}-S-\frac{2\cdot 3}{1}>\frac{5}{1}$$

$$\frac{14641\cdot S-10000S}{10^4}>\frac{6\cdot 10^2+5\cdot 10^2-3\cdot 11^2-330}{10^2}$$

$$\frac{4641\cdot S}{10^4}>\frac{407}{10^2}\quad \Big|:\frac{4641}{10^4}$$

$$S>\frac{407\cdot\cancel{10^4}\cdot 10^2}{\cancel{10^2}\cdot 4641}$$

$$S>\frac{40700}{4641}$$

$$S>8\,\frac{3572}{4641}$$

$$\begin{array}{r|l} 40700 & 4641 \\ -37128 & 8 \\ 3572 & \end{array}$$

$$S_{\text{наим.цел}}=9$$

Ответ: 9 млн

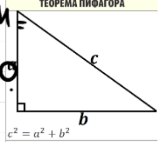
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

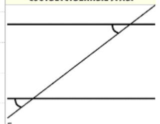
а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.
б) Найдите площадь трапеции.

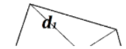
ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2017

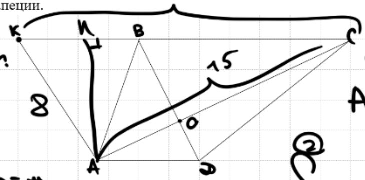
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
Если две стороны равны и параллельны
Если противоположные стороны попарно равны
Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА


$c^2=a^2+b^2$

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ

Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА




$AC\cap BD=O$

а) Пусть ABCD – трап.
$BD=8$
$AC=15$
Пусть $AK\parallel BD$
Тогда AKBD – пар-м
$CK=17$

$\triangle ACK$:
$AK=BD=8$
$AC=15$ по усл.
$KC=17$
Заметим, что в $\triangle ACK$ вып. т. Пиф.
$17^2=15^2+8^2$
значит $\angle CAK=90^\circ$
$\angle BOC=\angle CAK=90^\circ$ (соотв.)
$AC\perp BD$

б) ① Пусть AH – высота
$$AH=\frac{AK\cdot AC}{KC}=\frac{8\cdot 15}{17}$$
② $$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot AH=\frac{\cancel{17}}{2}\cdot\frac{8\cdot 15}{\cancel{17}}=60$$

Ответ: 60.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 25

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$$

имеет более двух различных корней.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Основная волна 2014

78A5D4

$$\sqrt{(x^2-2ax+7)^2} = \sqrt{(6a-x^2-2x-1)^2}$$
$$(x^2-2ax+7)^2 = (6a-x^2-2x-1)^2$$
$$(x^2-2ax+7)^2 - (6a-x^2-2x-1)^2 = 0$$
$$(x^2-2ax+7-6a+x^2+2x+1)\cdot(x^2-2ax+7+6a-x^2-2x-1) = 0$$
$$(2x^2-2ax+2x+8-6a)\cdot(-2ax-2x+6+6a) = 0 \quad |:2 \quad |:2$$
$$(x^2-ax+x+4-3a)\cdot(-ax-x+3+3a) = 0$$
$$(x^2-ax+x+4-3a)\cdot(-x\cdot(a+1)+3\cdot(a+1)) = 0$$
$$(x^2-ax+x+4-3a)\cdot(a+1)\cdot(3-x) = 0$$

$x=3$ — первый корень

При $a=-1$ корней бесконечно много

Если $a \neq -1$, то корней у уравнения может быть максимум 3

3 корня у ур-я будет только если кв. ур. $x^2-ax+x+4-3a=0$ имеет 2 разл. корня и эти не равны 3.

$$\begin{cases} ① \ D > 0 \\ ② \ 3^2 - a\cdot 3 + 3 + 4 - 3\cdot a \neq 0 \end{cases}$$

① $x^2+(1-a)\cdot x+4-3a=0$

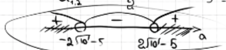
$D=(1-a)^2-4\cdot1\cdot(4-3a)>0$

$1-2a+a^2-16+12a>0$

$a^2+10a-15>0$

$D_a=100-4\cdot1\cdot(-15)=160=(4\sqrt{10})^2$

$a_{1,2}=\dfrac{-10\pm4\sqrt{10}}{2}=-5\pm2\sqrt{10}$

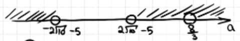


② $9-3a+7-3a\neq0$

$16\neq6a$

$a\neq\frac{16}{6}\neq\frac{8}{3}$

Найдём пересечение ① и ②.



Объединим с $a=-1$

Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{10}-5)\cup\{-1\}\cup(2\sqrt{10}-5; \frac{8}{3})\cup(\frac{8}{3}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 6 чисел, сумма которых равна 71?
б) Может ли на доске быть 9 чисел, сумма которых равна 71?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 7000?

ИСТОЧНИКИ
Досрочная волна (Резерв) 2017

а) 8 9 10 11 12 21

Ответ: а) да

б) Пусть

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 \leq a_8 \leq a_9$

$\dfrac{a_9}{a_1} \leq 3 \quad |\cdot a_1$

$a_9 \leq 3a_1$

$a_9 - a_1 \geq 8$

$a_9 \geq a_1 + 8$

$a_1 + 8 \leq a_9$

$a_1 + 8 \leq a_9 \leq 3a_1$

$a_1 + 8 \leq 3a_1$

$8 \leq 2\cdot a_1$

$a_1 \geq 4$

$S \geq 4+5+6+7+8+9+10+11+12$

$S \geq \dfrac{4+12}{2}\cdot 9$

$S \geq 72$

$S \neq 71$

Ответ: б) нет.

в) ① Разложим 7000 на простые мн-ли:

$7000 = 2^3\cdot5^3\cdot7 = 2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot7$

7000	2
3500	2
1750	2
875	5
175	5
35	5
7	7
1	

② Может ли быть 2 числа?

$125\cdot56=7000$

$\Rightarrow$ да, может

③ Может ли быть 3 числа?

$10\cdot25\cdot28=7000$

$\Rightarrow$ да, может

④ Докажем, что 4 и более чисел быть не может.

Если есть число, кратное 25, то

$\underbrace{k\cdot25}\cdot\underbrace{>8}\cdot\underbrace{>8}\cdot\underbrace{>8}=7000$

каждое из оставшихся чисел должно быть больше 8, но тогда итоговое произведение будет больше 7000, что невозможно.

Если нет числа, кратного 25, то

$\underbrace{k\cdot5}\cdot\underbrace{m\cdot5}\cdot\underbrace{n\cdot5}\cdot\underbrace{\quad}=7000$

ровно три числа кратны пяти и тогда одно из них больше, чем в 3 раза больше другого, что невозможно.

Ответ: в) 2 или 3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 25