Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8.

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

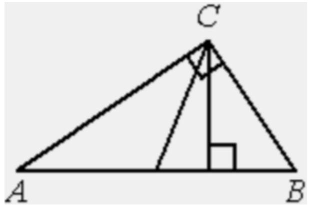
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

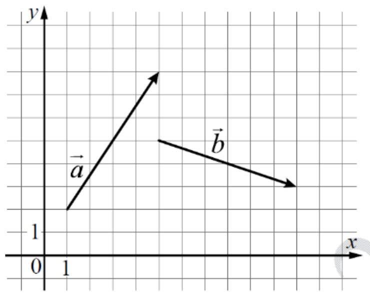
Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Острые углы прямоугольного треугольника равны 84° и 6°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ____________________________.

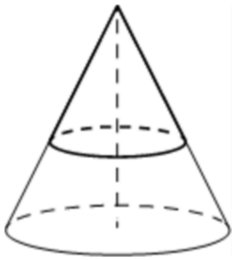
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №1

3 Площадь полной поверхности конуса равна 35. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 3:2, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



Ответ: ___________________________.

4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,81. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 19.

Ответ: ___________________________.

5 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\sqrt{6+5x} = x.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

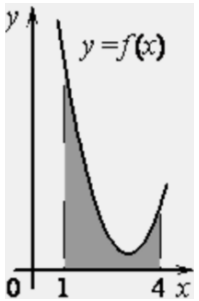
Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{24}{\sin^2 127° + 4 + \sin^2 217°}.$$

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ___________________________.

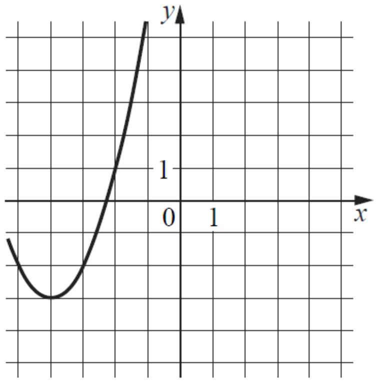
9 Автомобиль, масса которого равна $m = 2000$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $S = 600$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 1500 Н. Ответ выразите в секундах.

Ответ: ___________________________.

10 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c – целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина ребра CC_1. На рёбрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK:KB = B_1N:NA_1$.

а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN, если $AB = BB_1 = 42$ и $BK:KA = 41:1$.

15 Решите неравенство

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3.$$

16 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

17 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

19 а) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена
x^2+mx+n равен 33?
б) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена
x^2+mx+n равен 26?
в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трёхчлена
$x^2+(5m+n)x+(8n+m)$, если известно, что числа m, n и D – натуральные?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 1

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	78	
2	12	
3	12,6	
4	0,25	
5	0,33	
6	6	
7	4,8	
8	6	
9	40	
10	90	
11	61	
12	4	
13	а) $\pi + 2\pi n, \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n; n \in Z$ б) $-\frac{11\pi}{3}$; -3π	
14	$638\sqrt{3}$	
15	$(-\infty; -1 - \log_3 5] \cup [1; +\infty)$	
16	3 млн	
17	$3:4$	
18	$[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$	
19	а) да б) нет в) 21	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

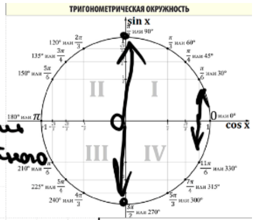
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



а) $\cos x - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$

$2\cos^2\frac{x}{2} - \cancel{1} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + \cancel{1} = 0$

$\cos\frac{x}{2}\cdot\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right) = 0$

$\cos\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n\in Z \quad |\cdot 2$

$x = \pi + 2\pi n; n\in Z$

$2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$

$2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3}$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n\in Z \quad |\cdot 2$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n; n\in Z$

б) Отберём корни с помощью двойного нер-ва:

Для $x = \pi + 2\pi n; n\in Z$

$-4\pi \le \pi + 2\pi n \le -\frac{5\pi}{2} \quad |-\pi$

$-5\pi \le 2\pi n \le -3{,}5\pi \quad |:\pi$

$-5 \le 2\cdot n \le -3{,}5 \quad |:2$

$-2{,}5 \le n \le -1{,}75$

Получаем $n = -2$

$x = \pi + 2\pi\cdot(-2) = -3\pi$

Для $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n; n\in Z$

$-4\pi \le \frac{\pi}{3} + 4\pi n \le -\frac{5\pi}{2} \quad |-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{13\pi}{3} \le 4\pi n \le -\frac{17\pi}{6} \quad |:\pi$

$-\frac{13}{3} \le 4n \le -\frac{17}{6} \quad |:4$

$-\frac{13}{12} \le n \le -\frac{17}{24}$

Получаем $n = -1$

$x = \frac{\pi}{3} - 4\pi^{(3)} = -\frac{11\pi}{3}$

Для $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi n; n\in Z$

$-4\pi \le -\frac{\pi}{3} + 4\pi n \le -\frac{5\pi}{2} \quad |:\pi$

$-4 \le -\frac{1}{3} + 4n \le -\frac{5}{2} \quad |+\frac{1}{3}$

$-\frac{11}{3} \le 4\cdot n \le -\frac{13}{6} \quad |\cdot\frac{1}{4}$

$-\frac{11}{12} \le n \le -\frac{13}{24}$

$n \notin Z$

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n$; $n\in Z$
б) $-\frac{11\pi}{3}$; -3π

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2014

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π, то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

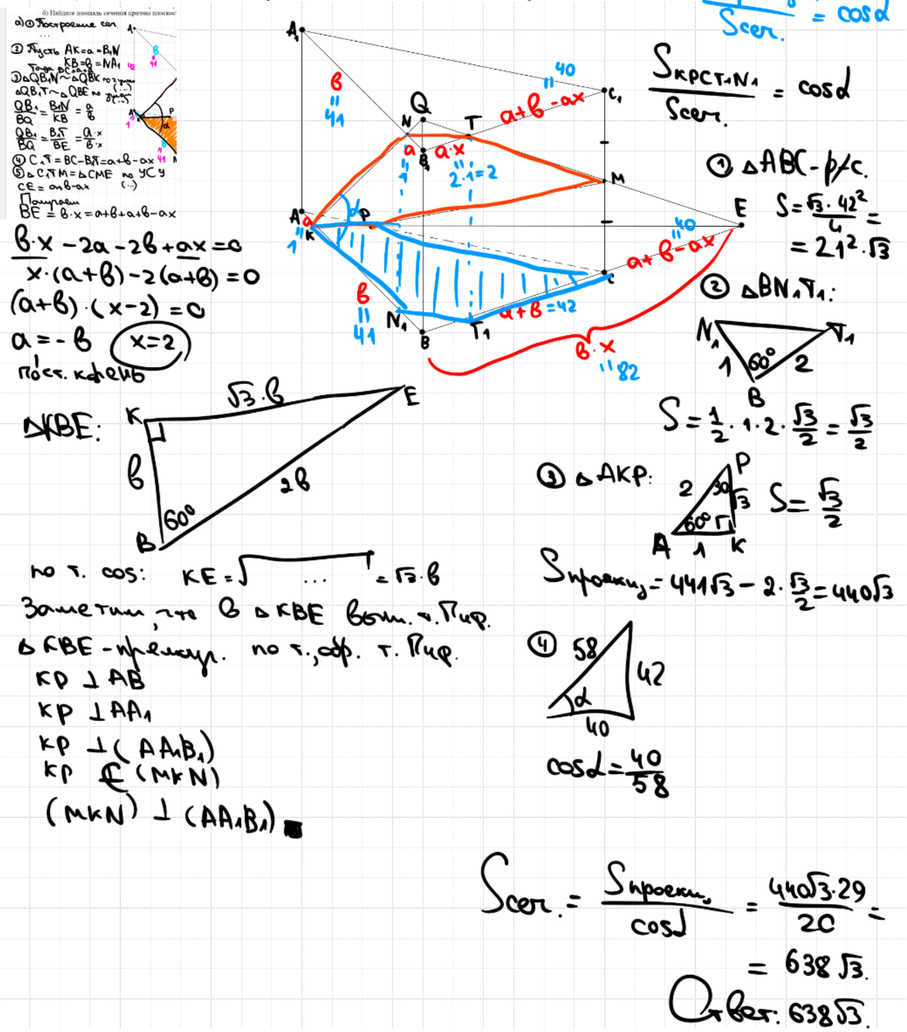
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра CC_1. На рёбрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK:KB = B_1N:NA_1$.

а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN, если $AB = BB_1 = 42$ и $BK:KA = 41:1$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2022



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3.$

$3^{x^2} \cdot 3^{\log_3 5^{x-1}} \geq 3^1$

$3^{x^2 + \log_3 5^{x-1}} \geq 3^1$

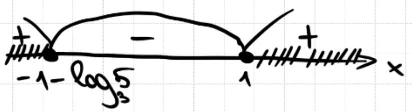
$x^2 + \log_3 5^{x-1} \geq 1$

$x^2 + (x-1)\cdot\log_3 5 - 1 \geq 0$

$x^2 + x\cdot\log_3 5 - \log_3 5 - 1^2 \geq 0$

$(x-1)(x+1) + \log_3 5\cdot(x-1) \geq 0$

$(x-1)\cdot(x+1+\log_3 5) \geq 0$



Ответ: $(-\infty; -1-\log_3 5] \cup [1; +\infty)$

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2018

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ	
	$a^{\log_a b} = b$
СТЕПЕНИ	
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b + \log_a c = \log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
ФСУ	
1	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

1F03D1

Пусть S – сумма долга

x – платёж в 4 год, в 5 год,

янв 21 – месяц откр. кредита

июль – месяц начисл. %

Дек – месяц платежа

Дата	Сумма долга	
Я 21	S	
И 21	$1{,}2\cdot S$	
Д 21		⇒ была выплата $0{,}2\cdot S$
Я 22	S	
И 22	$1{,}2\cdot S$	
Д 22		⇒ была выплата $0{,}2\cdot S$
Я 23	S	
И 23	$1{,}2\cdot S$	
Д 23		⇒ была выплата $0{,}2\cdot S$
Я 24	S	
И 24	$1{,}2\cdot S$	
Д 24		выплав. X
Я 25	$1{,}2\cdot S - x$	
И 25	$1{,}2\cdot(1{,}2\cdot S - x) = 1{,}2^2\cdot S - 1{,}2\cdot x$	
Д 25	б.в. x	
Я 26		

$\begin{cases} ① \; 1{,}2^2\cdot S - 1{,}2x - x = 0 \\ ② \; \text{О.С.В} < 7 \end{cases}$

① Выразим X

$1{,}2^2\cdot S = 1{,}2x + x$

$\frac{6^2}{5^2}\cdot S = \frac{6}{5}x + \frac{x}{1}$

$\frac{6^2\cdot S}{5^2} = \frac{11\cdot x}{5}$

$x = \frac{6^2\cdot S\cdot \cancel{5}}{5^{\cancel{2}}\cdot 11} = \frac{36S}{55}$

② О.С.В. < 7

$3\cdot 0{,}2\cdot S + 2\cdot x < 7$

$3\cdot\frac{1}{5}S + 2\cdot\frac{36\cdot S}{55} < 7$

$\frac{33\cdot S + 72\cdot S}{55} < 7$

$\frac{105}{55}\cdot S < 7 \quad \Big| : \frac{105}{55}$

$S < \frac{\cancel{7}\cdot\cancel{55}\,11}{\cancel{105}\,\cancel{21}\,3}$

$S < \frac{11}{3}$

$S < 3\frac{2}{3}$

$S_{наиб.\ цел} = 3$

Ответ: 3 млн.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2022 (14 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
СтатГрад 07.02.2018
СтатГрад 20.12.2016

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 1

17

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

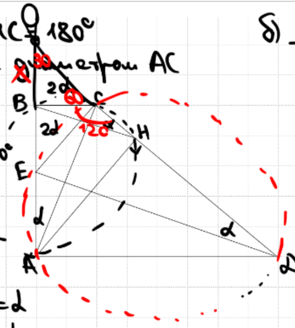
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120^\circ$.

Пусть $AB \cap CD = O$

$\triangle OBH \sim \triangle OED$ по 2 углам

а) ① $\angle ABC + \angle AHC = 180^\circ$

Опишем окр-ть с диаметром AC около ABCH



② $\angle EAD + \angle ECD = 180^\circ$

Опишем окр-ть с диаметром ED около EADC

③ Пусть $\angle BHC = \alpha$

Тогда $\smile BC = 2\alpha$

$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BC = \alpha$

$\smile EC = 2\alpha$

$\angle EDC = \frac{1}{2} \smile EC = \alpha$

Получаем $\angle BHC = \alpha = \angle EDC$ – соотв.

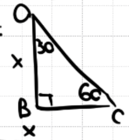
$BH \parallel ED$ ■

б) $\frac{BH}{ED} = k = \frac{OB}{OE}$, где

k – коэф. подобия $\triangle OBH$ и $\triangle OED$

① Пусть $OB = x$

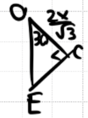
$\triangle OBC$:



$\sin 60^\circ = \frac{x}{OC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{OC}$ $\quad OC = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

② $\triangle OEC$:



$\cos 30^\circ = \frac{2x}{\sqrt{3} \cdot OE}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot x}{\sqrt{3} \cdot OE}$ $\quad OE = \frac{4x}{3}$

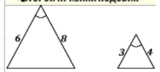
Получаем $\frac{OB}{OE} = \frac{x}{\frac{4}{3}x} = \frac{3}{4} = \frac{BH}{ED}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

ИСТОЧНИКИ

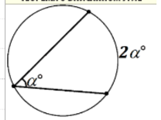
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2024
Основная волна 2016
Сергеев 2018
Ященко 2018

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



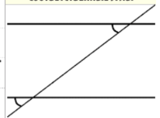
По двум пропорциональным сторонам и углу между ними

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ



Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №1

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2016

6A67D7

$$\begin{cases} x^2+ax+1\geq 0 & (1)\\ 3x^2+2ax+1=(x^2+(ax+1))^2 & (2)\end{cases}$$

Решим ур-е (2):

$3x^2+2a\cdot x+1 = x^4+2\cdot x^2\cdot(ax+1)+(ax+1)^2$

$3x^2+\cancel{2a\cdot x}+\cancel{1} = x^4+2\cdot a\cdot x^3+2x^2+a^2\cdot x^2+\cancel{2a\cdot x}+\cancel{1}$

$x^4+2\cdot a\cdot x^3+a^2x^2-x^2=0$

$x^2\cdot(x^2+2\cdot a\cdot x+a^2-1)=0$

$x^2=0$ $\quad$ $x^2+2\cdot a\cdot x+a^2-1=0$

$x=0$ $\quad$ $(x+a)^2-1^2=0$

$(x+a-1)(x+a+1)=0$

$x=1-a$ $\quad$ $x=-1-a$

Чтобы все три корня были различны, нужно:
$$\begin{cases}1-a\neq 0\\ -1-a\neq 0\\ 1-a\neq -1-a\end{cases}\qquad \begin{cases}a\neq 1\\ a\neq -1\\ 0\cdot a\neq -2\end{cases}\Rightarrow a\neq\pm 1$$

$x^2+ax+1\geq 0$

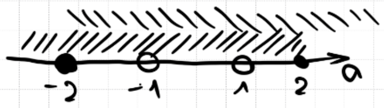
Найдём при каких a найденные три корня удовл. нер-ву (1)

$x=0$: $0^2+a\cdot 0+1\geq 0$; $0\cdot 0\geq -1$; a - любое

$x=1-a$: $(1-a)^2+a\cdot(1-a)+1\geq 0$; $1-2a+\cancel{a^2}+a-\cancel{a^2}+1\geq 0$; $2\geq a$; $a\leq 2$

$x=-1-a$: $(-1-a)^2+a\cdot(-1-a)+1\geq 0$; $(1+a)^2-a-a^2+1\geq 0$; $1+\cancel{2a}+\cancel{a^2}-\cancel{a}-\cancel{a^2}+1\geq 0$; $a\geq -2$

Построим
$$\begin{cases}a\neq\pm 1\\ a\leq 2\\ a\geq -2\end{cases}$$



Ответ: $[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №1

19 а) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + mx + n$ равен 33?

б) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + mx + n$ равен 26?

в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трёхчлена $x^2 + (5m + n)x + (8n + m)$, если известно, что числа m, n и D — натуральные?

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2020

а) $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n = 33$

$m^2 = 33 + 4 \cdot n$

При $m = 7$

$n = 4$ $\quad 49 = 33 + 4 \cdot 4$ ✓

Ответ: а) да ; 4 и 7.

б) $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n = 26$

$m^2 = 26 + 4 \cdot n$

① Заметим, что правая часть ур-я чётна при любом n

$\Rightarrow m$ должно быть чётным

② НО, если m - чётное, то m^2 кратно 4, а правая часть ур-я не кратна 4, значит рав-во невозможно.

Ответ: б) нет.

в) ① $D = (5m + n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8n + m) =$

$= 25m^2 + 10mn + n^2 - 32n - 4m =$

$= (5m)^2 + 2 \cdot 5m \cdot n + (n^2 - 32n + 256) - 256 - 4m =$

$= (5m)^2 + 2 \cdot 5m \cdot (n - 16) + (n - 16)^2 + 160m - 256 - 4m =$

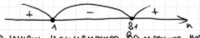
$= (5m + (n - 16))^2 + 156m - 256$

Если $m = 1$, то $D = (n - 11)^2 - 100$

$D = (n - 11)^2 - 10^2$

$D = (n - 11 - 10)(n - 11 + 10)$

$D = (n - 21)(n - 1)$



Мы ищем наименьшее возможное натур. значение D

Если $n = 1$, $n = 21$, то $D = 0$ (не подходит)

Если $n < 1$, то это невозможно по усл., т.к. n - натур.

$1 < n < 21$, то $D < 0$ (не подходит)

Если $n = 22$, то $D = 21$

$n = 23$ $\quad D = 44$

$n > 23$ $\quad D > 44$

$\Rightarrow D \geq 21$ при $m = 1$

Если $m \geq 2$, то $D \geq 56$

$\Rightarrow D \geq 21$

② Покажем, что $D = 21$ может быть: $m = 1$, $n = 22$

$x^2 + (5 \cdot 1 + 22)x + (8 \cdot 22 + 1)$

$x^2 + 27x + 177$

$D = 729 - 4 \cdot 177 = 21$ ✓

Ответ: в) 21

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4