7 класс

Задача 7.1. Маша идёт в гости.

Первую часть своего пути до домика Медведя девочка Маша шла пешком. Оставшийся путь ей помогли преодолеть волки на своей машине «Скорой помощи», чья скорость была в 5 раз больше, чем скорость девочки. Зная, что на первую часть пути девочка потратила 3/4 всего времени своего путешествия, а средняя скорость на всём пути до домика Медведя составила 5 м/с, определите: 1) скорость, с которой шла Маша, 2) какую часть всего пути до домика Медведя девочка шла пешком.

Ответ: 1) 2,5 м/с; 2) 3/8.

Решение: Пусть v — скорость Маши, тогда скорость «Скорой» будет равна $5v$. Обозначив за t общее время путешествия Маши, получим, что полный путь, пройденный девочкой, составляет

$$s = v \cdot \frac{3t}{4} + 5v \cdot \frac{t}{4} = 2vt.$$

С другой стороны, средняя скорость Маши равна $v_{\text{ср}} = s/t$, откуда следует, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{2vt}{t} = 2v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_{\text{ср}}}{2} = 2{,}5 \text{ м/с}.$$

Девочка прошла пешком путь, равный

$$s_1 = v \cdot \frac{3t}{4} = \frac{3vt}{4},$$

поэтому первый участок составил $s_1/s = 3/8$ от всего пути.

Критерии:

1) Записана формула $s = v \cdot \frac{3t}{4} + 5v \cdot \frac{t}{4}$ или её аналог . . . . 3 балла

2) Найдено верное значение скорости Маши . . . . 4 балла

3) Найдено верное значение доли пути, которую Маша шла пешком . . . . 3 балла

Задача 7.2. За двумя зайцами.

Вернувшись с рыбалки домой, Медведь обнаружил в огороде двух зайцев, бесцеремонно собирающих урожай моркови и капусты. Увидев Медведя, зайцы одновременно бросились бежать в противоположные стороны. Первый с ведром моркови побежал со скоростью 6 м/с, а второй с мешком капусты — со скоростью 4 м/с. Подумав немного, за кем бежать, Медведь бросился вдогонку за зайцем с морковью, через 2 мин догнал его, отобрал овощи и отчитал воришку в течение 40 с, затем побежал догонять второго.

1. Через какое время **после этого** он догонит второго зайца?

2. Сколько времени Медведь обдумывал, за кем ему побежать в первую очередь?

Скорость Медведя во время погони всегда равна 7 м/с. Считать, что все персонажи начали бежать из одной точки и движутся вдоль одной прямой.

Ответ: 1) 520 с; 2) 20 с.

Решение: Обозначим скорости первого и второго зайцев как v_1 и v_2, а скорость Медведя как u. Пусть t_0 — время, в течение которого Медведь обдумывал, за кем бежать. За это время первый заяц успел убежать на расстояние $v_1 t_0$. Так как Медведь догнал его за 120 с,

$$(u - v_1) \cdot 120\text{ с} = v_1 t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{(u - v_1) \cdot 120\text{ с}}{v_1} = \frac{(7\text{ м/с} - 6\text{ м/с}) \cdot 120\text{ с}}{6\text{ м/с}} = 20\text{ с}.$$

В общей сложности погоня за первым зайцем и его воспитание длилось 20 с + 120 с + 40 с = 180 с. За это время второй заяц убежал от точки старта на расстояние $v_2 \cdot 180$ с = 720 м. С другой стороны, сам Медведь находится от неё на расстоянии $v_1 \cdot 140$ с = 840 м, следовательно, между ним и вторым зайцем 720 м + 840 м = 1560 м. Отсюда найдём, что второго зайца он догонит через

$$t = \frac{1560\text{ м}}{u - v_2} = \frac{1560\text{ м}}{3\text{ м/с}} = 520\text{ с}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $(u - v_1) \cdot 120\text{ с} = v_1 t_0$ или его аналог . . . . 2 балла

2) Найдено верное значение t_0 . . . . 2 балла

3) Правильно найдено расстояние, на которое успел убежать второй заяц перед началом погони за ним 2 балла

4) Правильно найдено расстояние между Медведем и вторым зайцем перед началом погони . . . . 2 балла

5) Найдено верное значение t . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Формула из пункта 1 критериев может быть сразу записана внутри расчёта времени t_0. В этом случае баллы за пункт 1 ставить.

2) Расчёты, необходимые для пунктов 3 и/или 4 также могут быть сделаны внутри формулы для t. Например, в пункте 4 расстояние между Медведем и зайцем может записано просто как 720 + 840. В этом случае баллы за пункты 3 и/или 4 ставить.

Задача 7.3. Обычное дело.

Мальчик Паша поехал с родителями на дачу. Сначала дорога была свободной, и скорость движения автомобиля составила 72 км/ч. Но затем автомобиль попал в пробку и двигался со скоростью 240 м/мин втрое дольше по времени, чем занял первый участок. Оставшийся отрезок пути до дачи был посвободнее, и автомобиль смог разогнаться до скорости 15 м/с. Определите, какую часть всего пути от дома до дачи автомобиль был в пробке, если время, затраченное на поездку, оказалось в 2 раза больше, чем в случае, когда автомобиль проехал бы весь путь с первоначальной скоростью.

Ответ: 3/14.

Решение: Пусть t — время, которое бы ушло на поездку с первоначальной скоростью $v_1 = 72$ км/ч $= 20$ м/с. Тогда расстояние от дома до дачи равно $s = v_1 t$. Если на первом участке пути автомобиль двигался в течение времени t_1, в пробке он находился время $3t_1$, а на последний участок ушло $2t - 4t_1$. Расстояние от дома до дачи в этом случае будет выражаться формулой

$$s = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1),$$

где $v_2 = 4$ м/с и $v_3 = 15$ м/с — скорости в пробке и на последнем отрезке пути. Приравнивая оба выражения для s, получим, что

$$v_1 t = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1) \quad \Rightarrow \quad 20t = 20t_1 + 12t_1 + 30t - 60t_1 \quad \Rightarrow \quad 28t_1 = 10t \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{5t}{14}.$$

Найдём теперь долю пути, которую автомобиль пробыл в пробке:

$$\frac{s_2}{s} = \frac{v_2 \cdot 3t_1}{v_1 t} = \frac{15v_2}{14v_1} = \frac{60}{14 \cdot 20} = \frac{3}{14} \approx 0{,}214.$$

Критерии:

1) Записана формула $s = v_1 t$ или её аналог . . . . 1 балл
2) Записано выражение для времени на третьем участке пути: $t_3 = 2t - 4t_1$ или аналогичное . . . . 1 балл
3) Записана формула $s = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1)$ или её аналог . . . . 3 балла
4) Найдена верная связь между t_1 и t . . . . 3 балла
5) Правильно найдена доля пути в пробке . . . . 2 балла

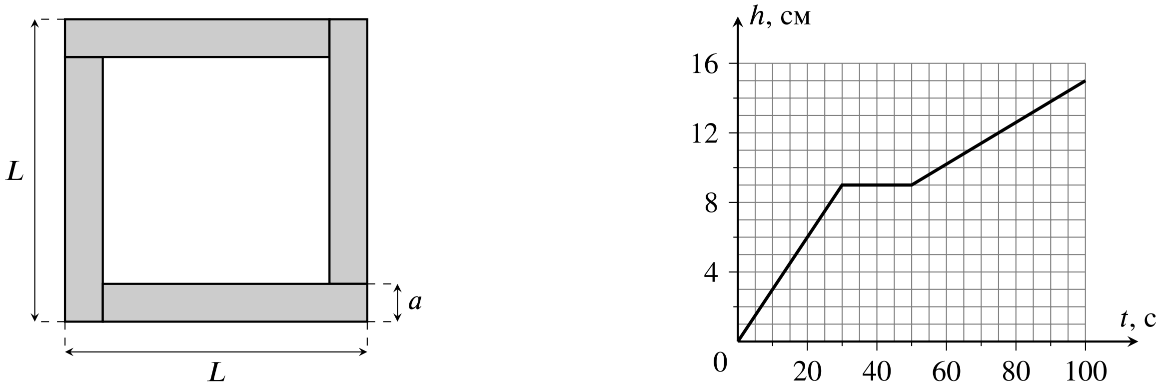
Указания проверяющим:

Учащийся в пунктах 1-4 может выражать все величины не через t_1, как в авторском решении, а через, например, t_2. Если записаны верные формулы для s, t_3 и т.д., где величины выражены через t, t_2 и скорости, баллы за соответствующие пункты ставить.

Задача 7.4. У колодца.

На дне пустого аквариума находится «колодец» — открытый сверху сосуд, стенки которого сложены из четырёх одинаковых толстых прямоугольных пластин (на рис. 7.1а изображён вид сверху). Пластины склеены между собой и с дном аквариума так, что вода сквозь швы внутрь «колодца» не протекает. В аквариум (снаружи от «колодца») со скоростью 45 мл/с начинают наливать воду. Используя график зависимости высоты уровня воды вблизи стенок аквариума от времени, приведённый на рис. 7.1б, определите: 1) площадь дна аквариума S, 2) высоту «колодца» H и длину стороны его основания L, 3) толщину стенок «колодца» a.

Стенки аквариума и стенки «колодца» вертикальны.



а) Рис. 7.1. б)

Ответ: 1) 375 см^2; 2) 9 см, 15 см; 3) 2,5 см.

Решение: Первый участок графика соответствует подъёму уровня воды снаружи от «колодца», второй участок — наполнению «колодца», а третий участок — подъёму уровня воды по всей площади сосуда. По второму (горизонтальному) участку графика определяем, что высота «колодца» $H = 9$ см, а его внутренний объём равен 45 см^3/с $\cdot$ 20 с = 900 см^3. Площадь дна внутри «колодца», соответственно, равна 900 см^3/9 см = 100 см^2. Так как это внутреннее пространство имеет форму квадрата, то его сторона равна 10 см.

Чтобы найти площадь дна сосуда, рассмотрим третий участок графика. Там за 50 с уровень воды поднимается на 6 см, поэтому

$$S \cdot 6\text{ см} = 45\text{ см}^3/\text{с} \cdot 50\text{ с} \quad \Rightarrow \quad S = 375\text{ см}^2.$$

Аналогично рассмотрим первый участок графика. Там за 30 с уровень воды поднимается на 9 см, следовательно площадь дна снаружи «колодца» S_1 равна:

$$S_1 \cdot 9\text{ см} = 45\text{ см}^3/\text{с} \cdot 30\text{ с} \quad \Rightarrow \quad S_1 = 150\text{ см}^2.$$

Отсюда найдём, что $S - S_1 = 225$ см^2 дна занято «колодцем», и сторона его основания равна 15 см (так как $15 \times 15 = 225$). Толщина стенок равна, соответственно,

$$a = \frac{15\text{ см} - 10\text{ см}}{2} = 2{,}5\text{ см}.$$

Критерии:

1) Найдено верное значение H . . . . 1 балл
2) Найдено верное значение площади дна внутри «колодца» . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение площади всего дна . . . . 2 балла
4) Найдено верное значение площади дна снаружи «колодца» . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение L . . . . 1 балл
6) Найдено верное значение a . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Если в пункте 2 вместо площади внутренней части дна найдена сразу сторона квадрата (10 см), баллы за этот пункт ставить.

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. «Тяжёлые» доли.

Автомобиль на первом участке, равном трети всего пути, ехал со скоростью v, на втором участке — со скоростью $2v$, а на третьем участке, занявшем половину **всего времени** — со скоростью $v/2$. Средняя скорость автомобиля на всём пути оказалась равна 45 км/ч.

1. Чему равнялась скорость автомобиля на первой трети пути?
2. Какую часть всего пути и какую часть всего времени автомобиль двигался на втором участке?

Ответ: 1) 48 км/ч; 2) 2/5 пути и 3/16 времени.

Решение: Пусть t_1 — время, затраченное автомобилем на первой трети пути. Так как первый участок равен трети всего пути s, $s = 3vt_1$. Время, ушедшее на весь путь, следовательно, равно $t = s/v_{\text{ср}} = 3vt_1/v_{\text{ср}}$. Найдём длины двух оставшихся участков:

$$s_2 = 2v\left(\frac{t}{2} - t_1\right) = 2vt_1\left(\frac{3v}{2v_{\text{ср}}} - 1\right),$$

$$s_3 = \frac{v}{2}\cdot\frac{t}{2} = \frac{3v^2t_1}{4v_{\text{ср}}}.$$

Поскольку $s_2 + s_3 = 2s/3 = 2vt_1$, получим, что

$$2vt_1\left(\frac{3v}{2v_{\text{ср}}} - 1\right) + \frac{3v^2t_1}{4v_{\text{ср}}} = 2vt_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3v}{2v_{\text{ср}}} - 1 + \frac{3v}{8v_{\text{ср}}} = 1 \quad\Rightarrow\quad v = \frac{16v_{\text{ср}}}{15} = 48\text{ км/ч}.$$

Время, затраченное на первом участке, равно

$$t_1 = \frac{v_{\text{ср}}t}{3v} = \frac{5t}{16},$$

следовательно, $t_2 = t/2 - t_1 = 3t/16$.

С другой стороны, длина второго участка равна $s_2 = 2vt_2 = 3vt/8$ или, учитывая, что $s = 3vt_1 = 15vt/16$,

$$s_2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{16s}{15} = \frac{2s}{5}.$$

Критерии:

1) Записана формула $s = 3vt_1$ или аналог . . . . 1 балл
2) Записана формула $s_2 = 2v(t/2 - t_1)$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записана формула $s_3 = vt/4$ или аналог . . . . 1 балл
4) Найдено верное значение скорости на первом участке . . . . 3 балла
5) Правильно найдено, какую долю пути составил второй участок . . . . 2 балла
6) Правильно найдено, какую долю времени автомобиль ехал на втором участке . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Учащийся в пунктах 1-3 может выражать все величины не через t_1, как в авторском решении, а через, например, t_2. Если записаны верные выражения для s, s_2 и/или s_3, выраженные через v, t_2 и t, баллы за соответствующие пункты ставить.

2) Если учащийся привёл какое-либо корректное решение и получил верное значение скорости в пункте 4, но не получил в явном виде что-либо из указанного в пунктах 1-3, баллы за соответствующий пункт всё равно выставляются.

Задача 8.2. Переливание жидкости.

Два открытых сверху цилиндрических сосуда одинаковой высоты $H = 48$ см, площади поперечного сечения которых отличаются в 3 раза, соединены друг с другом внизу тонкой горизонтальной трубкой с вентилем (рис. 8.1). Вначале вентиль закрыт. Узкий сосуд доверху заполняют водой, а широкий также доверху заполняют керосином. Вентиль медленно открывают. Найдите высоту оставшегося столба воды в узком сосуде. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Объёмом жидкости в соединительной трубке можно пренебречь.

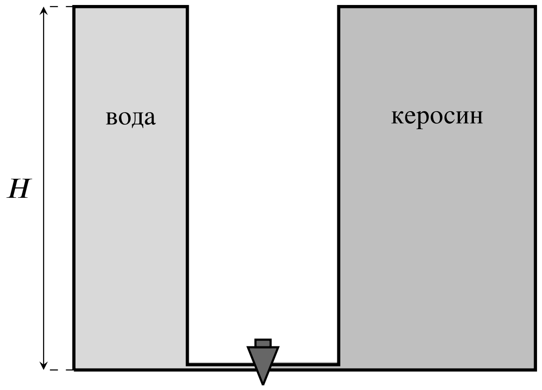


Рис. 8.1.

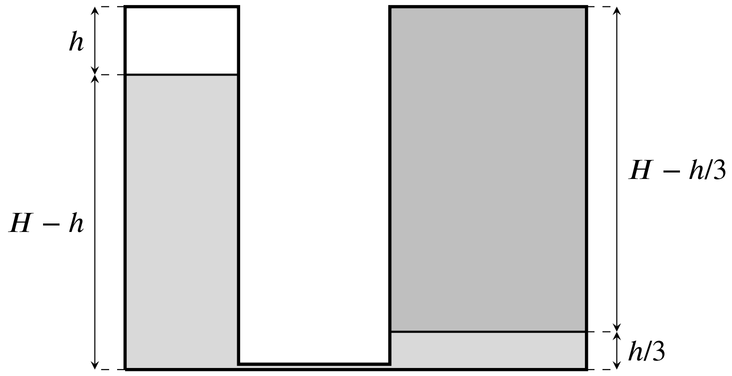


Рис. 8.2.

Ответ: 39 см.

Решение: После открытия вентиля часть воды перельётся в широкий сосуд, а часть керосина выльется. Пусть уровень воды в узком сосуде понизился на h (рис. 8.2). Тогда высота столба воды в широком сосуде станет равна $h/3$, а высота столба керосина $H - h/3$. Запишем условие равенства давлений на уровне соединительной трубки:

$$\rho_{в} g(H-h) = \rho_{в} g \cdot \frac{h}{3} + \rho_{к} g\left(H - \frac{h}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad (\rho_{в} - \rho_{к})H = (4\rho_{в} - \rho_{к}) \cdot \frac{h}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{3H(\rho_{в} - \rho_{к})}{4\rho_{в} - \rho_{к}} = \frac{3 \cdot 48\text{ см} \cdot 0{,}2}{3{,}2} = 9\text{ см}.$$

Высота столба воды в узком сосуде, соответственно, равна 48 см − 9 см = 39 см.

Критерии:

1) Указано, что высота столба воды справа втрое меньше изменения высоты столба слева . . . . 2 балла
2) Правильно записано условие равенства давлений . . . . 5 баллов
3) Найдена высота оставшего столба воды слева . . . . 3 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 указание может быть сделано, например, на чертеже или сразу в условии равенства давлений. В этом случае балл за пункт 1 ставить.
2) Условие равенства давлений может быть записано не на уровне трубки, а на уровне нижней границы керосина. Если условие записано верно, баллы в пункте 2 ставить в полном объёме.
3) В пункте 2 условие равенства давлений должно быть записано с учётом всех необходимых высот и плотностей жидкостей. Если оно записано в неком «общем» виде, например $p_{лев} = p_{прав}$, то баллы за пункт 2 не ставятся.

Задача 8.3. По следам Архимеда.

У экспериментатора Иннокентия Иванова есть ювелирное украшение, одна часть которого сделана из серебра, а другая — из стали. Учёный, подвесив украшение с помощью непроводящей тепло нити на крюке динамометра и нагрев его в кипятке, погрузил в воду с температурой 25 ℃, находящуюся в калориметре. В результате экспериментов Иннокентия выяснилось, что вес украшения, полностью погружённого в воду, равен 0,72 Н, а установившаяся температура в калориметре стала 30 ℃. Определите массу серебра и массу стали в украшении, если масса воды в калориметре равна 100 г, и она из сосуда не выливалась. Плотность стали равна 7,8 г/см^3, её удельная теплоёмкость — 500 Дж/(кг·℃); плотность серебра — 10,5 г/см^3, его удельная теплоёмкость — 250 Дж/(кг·℃); плотность воды — 1 г/см^3, её удельная теплоёмкость — 4200 Дж/(кг·℃). Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг, теплообменом со стенками калориметра и окружающей средой пренебречь.

Ответ: 42 г серебра и 39 г стали.

Решение: Пусть m_{Fe} и m_{Ag} — массы стальной и серебряной части украшения. Объём украшения равен

$$V = \frac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}} + \frac{m_{Ag}}{\rho_{Ag}},$$

а его вес в воде, соответственно,

$$P = (m_{Fe} + m_{Ag})g - \rho_{\text{в}} g V = m_{Fe} g \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{Fe}}\right) + m_{Ag} g \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{Ag}}\right) =$$

$$= m_{Fe} g \left(1 - \frac{1}{7{,}8}\right) + m_{Ag} g \left(1 - \frac{1}{10{,}5}\right) = \frac{34 m_{Fe} g}{39} + \frac{19 m_{Ag} g}{21}.$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}} \cdot 0{,}1\ \text{кг} \cdot (30\,℃ - 25\,℃) = c_{Fe} m_{Fe} (100\,℃ - 30\,℃) + c_{Ag} m_{Ag} (100\,℃ - 30\,℃) \quad \Rightarrow \quad 2 m_{Fe} + m_{Ag} = \frac{4200 \cdot 0{,}1 \cdot 5}{70 \cdot 250}\ \text{кг} = 120\ \text{г}.$$

Учитывая условие, что

$$P = 0{,}72\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad \frac{34 m_{Fe}}{39} + \frac{19 m_{Ag}}{21} = 72\ \text{г},$$

и решая систему, получим

$$m_{Fe} = 39\ \text{г}, \qquad m_{Ag} = 42\ \text{г}.$$

Критерии:

1) Записано правильное выражение для объёма украшения V через массы и плотности . . . . 1 балл
2) Записано выражение для веса украшения в воде $P = (m_{Fe} + m_{Ag})g - \rho_{\text{в}} g V$ или аналог . . . . 2 балла
3) Правильно записано уравнение теплового баланса для системы «украшение-вода» . . . . 3 балла
4) Найдено верное значение массы стали . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение массы серебра . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Если учащийся всё выражает не через массы, а через объёмы стали и серебра, то в пункте 1 должно быть «Записано правильное выражение для массы украшения через объёмы и плотности», а пункт 4 дробится на «Найдено верное значение объёма стали» (1 балл) и «Вычислено верное значение массы стали» (1 балл). Аналогично нужно поступить с пунктом 5. Для ориентировки: $V_{Fe} = 5$ см^3, $V_{Ag} = 4$ см^3.

Задача 8.4. Равновесие на блоках.

Однородный рычаг массой $M = 360$ г подвешен к системе блоков так, как показано на рис. 8.3. Груз какой массы m нужно подвесить к левому концу рычага, чтобы система находилась в равновесии? Массой блоков и нитей пренебречь. Для удобства на стержень нанесены штрихи, делящие его на равные части. Трение в системе отсутствует.

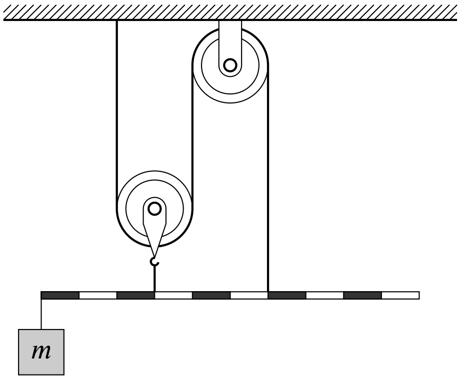


Рис. 8.3.

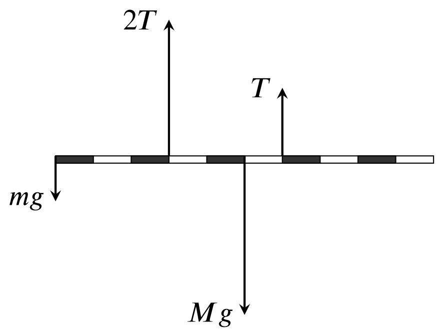


Рис. 8.4.

Ответ: 90 г.

Решение: На рычаг действуют четыре силы: сила тяжести Mg, вес груза mg и силы натяжения удерживающих нитей (рис. 8.4). Так как левый блок — подвижный, сила натяжения левой нити в два раза больше силы натяжения правой. Сумма сил, направленных вверх, равна сумме сил, направленных вниз

$$(m + M)g = 3T.$$

Запишем правило моментов относительно, например, левого конца рычага (L — длина одного деления)

$$2T \cdot 3L + T \cdot 6L = Mg \cdot 5L \quad \Rightarrow \quad T = \frac{5Mg}{12}.$$

Отсюда следует, что

$$(m + M)g = \frac{5Mg}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{4} = 90 \text{ г}.$$

Критерии:

1) Указано, что сила натяжения левого подвеса вдвое больше силы натяжения правого . . . . 1 балл
2) Правильно изображены все силы, действующие на рычаг . . . . 1 балл
3) Записано условие равенства сил, действующих на рычаг $(m + M)g = 3T$ или аналог . . . . 3 балла
4) Правильно записано правило моментов относительно какой-либо точки . . . . 3 балла
5) Найдено верное значение массы m . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 указание на то, что силы отличаются вдвое, может быть сделано на рисунке, или данный факт может быть сразу использован в записи условий равновесия. В этом случае балл за пункт 1 ставится.

2) Если отсутствует чертёж с изображением всех сил, действующих на рычаг (совсем нет рисунка или он неполный/неверный), балл за пункт 2 не ставить, но остальные пункты оценивать независимо.

3) В пункте 3 вместо условия равенства сил может быть правильно записано правило моментов относительно иной, чем в пункте 4, точки. В этом случае баллы за пункт 3 ставить.

Максимально возможный балл в 8 классе 40