

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Найдите корень уравнения

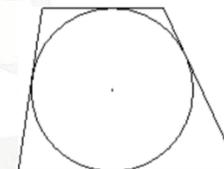
$$\sqrt{28 - 2x} = 2.$$

Ответ: _____.

- 2** В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: _____.

- 3** Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 15 и 22. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: _____.

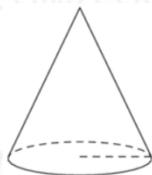


4 Найдите значение выражения

$$30 \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ - 43.$$

Ответ: _____.

5 Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

7 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

где t — время (в мин.), $T_0 = 680$ К, $a = -16 \frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b = 224 \text{К/мин}$. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

8 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: _____.

vk.com/ege100ballov



16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция.
 б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

18 Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
 б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
 в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_47937899
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	10 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 98 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) 55 учеников набрали 90-100 баллов на ЕГЭ 2021 Высшее образование (ТГУ, 2009-2014) Победитель трёх олимпиад по высшей математике
Аккаунт и группа ВК:	https://vk.com/eugene10 https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб и инстаграм:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 https://www.instagram.com/shkola_pifagora/



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	12	
2	0,25	
3	18,5	
4	-13	
5	3	
6	6	
7	5	
8	8	
9	6,5	
10	0,9975	
11	42	
12	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{17\pi}{4}$	
13	$\sqrt{15}$	
14	[2; 3)	
15	7 млн	
16	$\frac{\sqrt{65}}{2}$	
17	$[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$	
18	а) 2, 7, 11, 14, 6 б) да, например, 6, 7, 7, 6, 3 в) 16	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение $\frac{9\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{11}\sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$.

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 СтатГрад 29.01.2020
 СтатГрад 26.01.2017

а) $9\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x = 0$
 $3\sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$
 $\sin x > 0$
 $2\cos x - \sqrt{2} = 0$
 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ (не подходит)

б) Общее решение системы с помощью арктангенса:
 $x = \frac{4\sqrt{2}\pi}{1} + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{17\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

а) Докажите, что $AM \perp AD$.
 б) Точка N – середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.

Источники:
 Основная волна 2017
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ
 1 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 2 $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

а) Пусть $AD = 2x$
 $\triangle ABE$: $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{5}x$
 $\triangle SEC$: $SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \sqrt{3}x$
 $\triangle SBC$: $ME = \frac{1}{3} \cdot SE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (т.к. М – медиана)
 $\triangle ASE$: $\cos \angle AES = \frac{SE^2 + AE^2 - AS^2}{2 \cdot SE \cdot AE} = \frac{3x^2 + 5x^2 - 4x^2}{2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{15}}$
 $\triangle AME$: $AM = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 + 5x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \sqrt{5}x \cdot \frac{2}{\sqrt{15}}} = 2x = AD$

б) $\triangle ASN$: $SN = \sqrt{6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{15}$

Ответ: $\sqrt{15}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

vk.com/ege100ballov

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211018



14 Решите неравенство $\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x)$.

Источники:
 ФРБ (старый банк)
 Основная волна 2019
 Досрочная волна 2020

AA07B4

① $(3-x)(x^2+2) \geq (x-3)(x-4)(5-x)$
 ② $(3-x)(x^2+2) > 0$
 ③ $(x-3)(x-4) > 0$
 ④ $5-x > 0$

① $(3-x)(x^2+2) + (3-x)(x-4) \cdot (5-x) \geq 0$
 $(3-x) \cdot (x^2+2-x^2-9x+20) \geq 0$
 $(3-x)(9x-18) \geq 0$

② $(3-x) \cdot (x^2+2) > 0 \quad | : (x^2+2)$
 $3-x > 0$
 $x < 3$

③ $(x-3)(x-4) > 0$

④ $x < 5$

Ответ: $[2; 3)$

Каждым неясете

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Источники:
 Яценко 2018 (36 вар)
 Досрочная волна 2016
 Основная волна (Резерв) 2016

Пусть x вв 21 - месяц отн.
 Дек - месяц июля. Вклад
 x - сумма пополнения вкл.

$10 \cdot 1,4641 + 1,21x + 1,1x \geq 30$
 $2,31x \geq 30 - 14,641$
 $2,31x \geq 15,359$
 $x \geq \frac{15359}{2310}$
 $x \geq 6 \frac{1499}{2310}$
 $\Rightarrow x_{\text{мин}} = 7$

Дата	Сумма вклада
1 21	10 млн
2 21	$10 \cdot 1,1$
3 22	число не известно
3 22	$10 \cdot 1,1^2$
3 23	$10 \cdot 1,1^2 + x$
3 23	$10 \cdot 1,1^3 + 1,1x$
4 24	$10 \cdot 1,1^3 + 1,1x + x$
4 24	$10 \cdot 1,1^4 + 1,1^2x + 1,1x \geq 30$

Ответ: 7 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

vk.com/ege100ballov



16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция.
 б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

а) Пусть $\angle OAK = d$
 Тогда $\angle AKO = d$
 $\angle AOK = 180 - 2d$

б) $\angle AKD = 90^\circ \Rightarrow AD$ – диаметр
 $\angle BKC = 90^\circ \Rightarrow BC$ – диаметр
 $\Rightarrow AD \perp AB$
 $BC \perp AB$
 $\Rightarrow AD \parallel BC$
 $\Rightarrow ABCD$ – трапеция.

д) $\frac{CD}{\sin(90-d)} = 2R$ $\frac{CD}{\cos d} = 2R$

① $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
 $CD = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

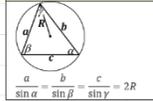
② $\triangle BDE$ $\sin \angle DBE = \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$

③ $\frac{2\sqrt{13}}{\frac{2}{5}} = 2R$ $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$

ОТВЕТ: $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Источники:
 Досрочная волна (Резерв) 2019

ТЕОРЕМА СИНУСОВ



17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Основная волна 2016

① $x^2 + ax + 1 \geq 0$
 ② $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$

Найдем, при каких a найденные три уравн. неф. бы ①

② $3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2x^2 \cdot (ax+1) + a^2x^2 + 2ax + 1$
 $x^4 + 2 \cdot a \cdot x^3 + 2x^2 - 3x^2 + a^2x^2 = 0$
 $x^4 + 2 \cdot a \cdot x^3 - x^2 + a^2x^2 = 0$
 $x^2 \cdot (x^2 + 2ax - 1 + a^2) = 0$
 $x_1 = 0$ $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$
 $(x+a)^2 - 1 = 0$
 $(x+a-1)(x+a+1) = 0$
 $x_2 = 1-a$ $x_3 = -a-1$

Если все три корня были разными

Получаем:

$\begin{cases} 1-a \neq -a-1 \\ 1-a \neq 0 \\ -a-1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \text{ любое} \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq \pm 1 \\ a \geq -2 \\ a \leq 2 \end{cases}$

ОТВЕТ: $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18 Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

Источники:
Основная волна 2016

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
 б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
 в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

а) $4 \quad 10 \quad 11 \quad 10 \quad 5$

б) $1 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 1$

в) $4 \quad 6 \quad 7$

Итого $a=1, f=1$
 На место b не может быть 1 или 2
 $\Rightarrow b \geq 3$
 Итого $b=3$
 Тогда $c=4$ (учитывая что $a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$)
 "Отзеркалим" первые 3 члена по 3 члена
 Получаем 16

$a_n > \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad | \cdot 2$
 $2a_n > a_{n-1} + a_{n+1}$
 $a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$

ОТВЕТ:
 а) Приведите
 б) Да, см. п. а)
 в) 16

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

- 1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;
- 2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

vk.com/ege100ballov

