Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень
Образец реального варианта (резервный день 29.06.2021)

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответов. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 задания повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2. Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 записан под правильным номером.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

13. а) Решите уравнение

$$7\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=4\cos^3 x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

14. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 – середина отрезка AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что точка C_1 – середина отрезка B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB=4$, $AA_1=1$.

15. Решите неравенство:

$$\frac{1}{2^x-1}+\frac{4^{x+\frac{1}{2}}-2^{x+5}+4}{2^x-16}\geq 2^{x+1}.$$

16. Окружность с центром O, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D. Касательная, проведённая к этой окружности в точке D, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, что $BM=CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P, прямая OM пересекает прямую BP в точке K. Найдите $BK:KP$, если $\cos\angle BAC=\frac{4}{5}$.

17. 15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с января 2025 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15 июня 2027 года долг составит 100 тысяч рублей;

— 15 июля 2027 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 555 тысяч рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|a-2|\cdot x^4-2ax^2+|a-12|=0$$

имеет хотя бы два различных корня.

19. Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из трёхзначных натуральных чисел, равен 128. Известно, что в прогрессии не меньше трёх чисел.

а) Может ли число 686 являться членом такой прогрессии?

б) Может ли число 496 являться членом такой прогрессии?

в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

ОТВЕТЫ

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\quad k\in Z$ б) $-\frac{5\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{3};\ -\frac{3\pi}{2}.$
14	$\frac{8\sqrt{3}}{7}.$
15	$(0;2]\cup(4;\infty).$
16	б) 7 : 25.
17	400 тысяч рублей
18	$\left[\frac{12}{7};3\right]\cup[4;\infty).$
19	а) да. б) нет. в) 972.

13 а) Решите уравнение

$$7\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=4\cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

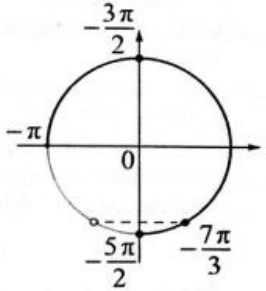
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$7\cos x+4\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-4\cos^3 x=0;\ \cos x\cdot\left(7+4\sqrt{3}\sin x-4\cos^2 x\right)=0;$$

$$\cos x\cdot\left(4\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x+3\right)=0;\ \cos x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)^2=0.$$

Значит, $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

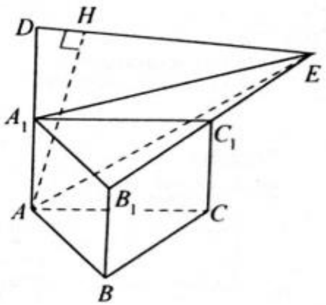
14 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 — середина отрезка AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что точка C_1 — середина отрезка B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB=4$, $AA_1=1$.

Решение.

а) Треугольник $A_1B_1C_1$ правильный, поэтому угол A_1C_1E равен $120°$. В равнобедренном треугольнике A_1C_1E угол EA_1C_1 равен $\frac{180°-120°}{2}=30°$, а значит, угол EA_1B_1 равен $90°$. Таким образом, прямая A_1B_1 перпендикулярна прямым A_1D и A_1E. Значит, прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости A_1DE и прямой DE, лежащей в ней.



б) Прямая AB перпендикулярная прямым AD и DE, поскольку прямые AB и A_1B_1 параллельны, следовательно, прямая AB перпендикулярна плоскости DAE. Пусть отрезок AH — высота треугольника DAE. Тогда отрезок AH перпендикулярен прямым AB и DE, а его длина равна расстоянию h между прямыми AB и DE.

В прямоугольном треугольнике A_1B_1E имеем:

$$B_1E=2A_1B_1=8,\ \angle A_1B_1E=60°;\ A_1E=B_1E\cdot\sin\angle A_1B_1E=4\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике DA_1E имеем:

$$DA_1=AA_1=1;\ DE=\sqrt{DA_1^2+A_1E^2}=7.$$

Площадь треугольника DAE равна $\frac{1}{2}\cdot AH\cdot DE=\frac{7h}{2}$. С другой стороны, эта площадь равна $\frac{1}{2}\cdot A_1E\cdot DA=4\sqrt{3}$. Таким образом, $\frac{7h}{2}=4\sqrt{3}$, откуда $h=\frac{8\sqrt{3}}{7}$.

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{3}}{7}$.

15

Решите неравенство $\frac{1}{2^x-1}+\frac{4^{x+\frac{1}{2}}-2^{x+5}+4}{2^x-16}\geq 2^{x+1}$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{1}{t-1}+\frac{2t^2-32t+4}{t-16}\geq 2t;\ \frac{1}{t-1}+\frac{2t(t-16)}{t-16}+\frac{4}{t-16}\geq 2t;$$

$$\frac{1}{t-1}+2t+\frac{4}{t-16}\geq 2t;\ \frac{t-4}{(t-1)(t-16)}\geq 0,$$

откуда $1<t\leq 4$; $t>16$.

При $1<t\leq 4$ получим: $1<2^x\leq 4$, откуда $0<x\leq 2$.

При $t>16$ получим: $2^x>16$, откуда $x>4$.

Решение исходного неравенства:

$$0<x\leq 2;\ x>4.$$

Ответ: $(0;2]$; $(4;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

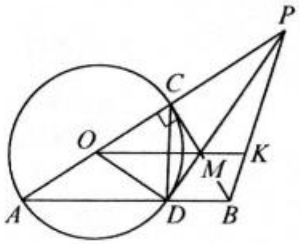
16

Окружность с центром O, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D. Касательная, проведённая к этой окружности в точке D, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, что $BM=CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P, прямая OM пересекает прямую BP в точке K. Найдите $BK:KP$, если $\cos\angle BAC=\frac{4}{5}$.

Решение.



а) Отрезок CD является высотой треугольника ABC, поскольку вписанный угол ADC опирается на диаметр окружности. Прямая BC касается окружности с диаметром AC в точке C, поскольку радиус окружности OC перпендикулярен BC.

Следовательно, $CM=MD$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки. Значит,

$$\angle MBD=90°-\angle MCD=90°-\angle MDC=\angle MDB,$$

поэтому $BM=MD=CM$.

б) Прямые AB и OM параллельны, поскольку отрезок OM — средняя линия треугольника ABC. Значит, $BK:KP=AO:OP$.

Обозначим угол BAC через α. Тогда

$$\angle COD=2\alpha,\ \angle ODP=90°;\ OP=\frac{OD}{\cos 2\alpha}.$$

Значит,

$$BK:KP=AO:OP=OD:\frac{OD}{\cos 2\alpha}=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{7}{25}.$$

Ответ: б) $7:25$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с января 2025 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15 июня 2027 года долг составит 100 тысяч рублей;

— 15 июля 2027 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 555 тысяч рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна A тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число каждого месяца (с декабря 2024 года по июль 2027 года) должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$A;\ \frac{29A+100}{30};\ \frac{28A+2\cdot 100}{30};\ \ldots;\ \frac{A+29\cdot 100}{30};\ 100;\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число каждого месяца (с января 2025 года по июль 2027 года) такова:

$$1{,}02A;\ 1{,}02\cdot\frac{29A+100}{30};\ \ldots;\ 1{,}02\cdot\frac{A+29\cdot 100}{30};\ 102.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}02A+\frac{A-100}{30};\ 0{,}02\cdot\frac{29A+100}{30}+\frac{A-100}{30};\ \ldots;$$

$$0{,}02\cdot\frac{A+29\cdot 100}{30}+\frac{A-100}{30};\ 102.$$

Общая сумма выплат (в тыс. рублей) составит

$$0{,}02\cdot\frac{31A+29\cdot 100}{2}+A-100+102=1{,}31A+31,$$

откуда $1{,}31A+31=555$; $1{,}31A=524$; $A=400$.

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит, равна 400 тыс. рублей.

Ответ: 400 тысяч рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|a-2|\cdot x^4-2ax^2+|a-12|=0$$

имеет хотя бы два различных корня.

Решение.

Пусть $t=x^2$, тогда исходное уравнение имеет хотя бы два различных корня тогда и только тогда, когда уравнение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ имеет хотя бы один положительный корень.

При $a=2$ уравнение принимает вид $-4t+10=0$ и имеет единственный корень $t=\frac{5}{2}$.

При $a\neq 2$ дискриминант D квадратного уравнения $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ равен $4a^2-4|a-2|\cdot|a-12|$.

При $2<a\le 12$ получаем:

$$D=4a^2+4(a-2)(a-12)=8a^2-56a+96=8(a-3)(a-4),$$

то есть уравнение имеет хотя бы один корень при $2<a\le 3$ и $4\le a\le 12$.

При $a<2$ и $a>12$ получаем:

$$D=4a^2-4(a-2)(a-12)=56a-96=8(7a-12),$$

то есть уравнение имеет хотя бы один корень при $\frac{12}{7}\le a<2$ и $a>12$.

Таким образом, квадратное уравнение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ имеет корни при $\frac{12}{7}\le a<2$, $2<a\le 3$ и $a\ge 4$.

При $\frac{12}{7}\le a<2$, $2<a\le 3$ и $a\ge 4$ выражение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|$ достигает наименьшего значения при $t=\frac{a}{|a-2|}>0$. Следовательно, если уравнение $|a-2|\cdot t^2-2at+|a-12|=0$ имеет хотя бы один корень, то хотя бы один из корней положительный.

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы два различных корня при $\frac{12}{7}\le a\le 3$ и $a\ge 4$.

Ответ: $\frac{12}{7}\le a\le 3$; $a\ge 4$.

19 Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из трёхзначных натуральных чисел, равен 128. Известно, что в прогрессии не меньше трёх чисел.
а) Может ли число 686 являться членом такой прогрессии?
б) Может ли число 496 являться членом такой прогрессии?
в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

Решение.
а) Рассмотрим прогрессию из четырёх членов: 128, 224, 392, 686. Она содержит число 686 и удовлетворяет условию задачи.
б) Предположим, что прогрессия содержит число 496. Отношение чисел 496 и 128 равно $\frac{31}{8}$. Это отношение нельзя представить в виде степени рационального числа с натуральным показателем, отличным от 1. Следовательно, знаменатель прогрессии равен $\frac{31}{8}$, а 496 — её второй член. В этом случае третий член прогрессии должен быть равен

$$\frac{31}{8}\cdot 496=1922,$$

но это противоречит тому, что прогрессия состоит из трёхзначных чисел.
в) Заметим, что $128=2^7$. Представим знаменатель прогрессии в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$.
Предположим, что прогрессия состоит из трёх чисел. Тогда её третий член равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot 128=\frac{a^2}{b^2}\cdot 2^7=2\cdot\left(\frac{8a}{b}\right)^2.$$

Это выражение достигает наибольшего значения, меньшего 1000, при наибольшем целом $\frac{8a}{b}$ таком, что $\left(\frac{8a}{b}\right)^2<\frac{1000}{2}=500$, то есть при $\frac{8a}{b}=22$. В этом случае третий член прогрессии равен 968.
Если прогрессия состоит из другого нечётного числа членов, то найдётся геометрическая прогрессия, состоящая из трёх членов, первый и последний члены которой совпадают с первым и последним членом исходной прогрессии, поэтому в этих случаях наибольший член прогрессии не превосходит 968.
Предположим, что прогрессия состоит из четырёх чисел. Тогда её четвёртый член равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot 128=\frac{a^3}{b^3}\cdot 2^7=2\cdot\left(\frac{4a}{b}\right)^3.$$

Это выражение достигает наибольшего значения, меньшего 1000, при наибольшем целом $\frac{4a}{b}$ таком, что $\left(\frac{4a}{b}\right)^3<\frac{1000}{2}=500$, то есть при $\frac{4a}{b}=7$. В этом случае четвёртый член прогрессии равен 686.
Предположим, что прогрессия состоит из шести чисел. Тогда её шестой член равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5\cdot 128=\frac{a^5}{b^5}\cdot 2^7=2^2\cdot\left(\frac{2a}{b}\right)^5.$$

Это выражение достигает наибольшего значения, меньшего 1000, при наибольшем целом $\frac{2a}{b}$ таком, что $\left(\frac{2a}{b}\right)^5<\frac{1000}{4}=250$, то есть при $\frac{2a}{b}=3$. В этом случае шестой член прогрессии равен 972.
Если в прогрессии восемь членов или больше, рассмотрим её восьмой член. Он равен

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7\cdot 128=\left(\frac{2a}{b}\right)^7.$$

Заметим, что единственное трёхзначное число, являющееся седьмой степенью натурального числа, — это 128, то есть в этом случае прогрессия постоянна, а её наибольший член равен 128.
Таким образом, наибольшее число, являющееся членом такой прогрессии, равно 972.
Ответ: а) да; б) нет; в) 972.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4