Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$81^{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}=81^{\sin x\cos x}\cdot 9^{\sqrt{3}(\sin x+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

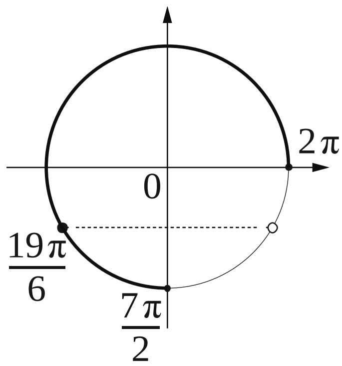
$$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin x\cos x+\sqrt{3}\left(\sin x+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x\right);$$

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x-\sin 2x-\sqrt{3}=0;\ 1-2\sin^2 x-\sin x-1=0;$$

$$\sin x\cdot\left(2\sin x+1\right)=0 \text{ при условии } x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Значит, $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим число $\frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{19\pi}{6}$.

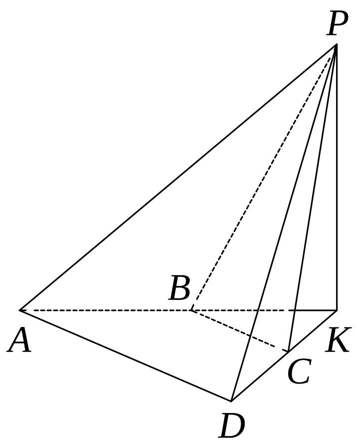
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём прямые, содержащие боковые стороны трапеции AB и CD, перпендикулярны и пересекаются в точке K. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что прямые PK и AD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 3$, а расстояние от точки P до плоскости ABC равно 8.

Решение.



а) Заметим, что $\angle AKD = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK — высота пирамиды. Таким образом, PK и AD перпендикулярны.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45°;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = \frac{9}{4}$,

а объём пирамиды $KBCP$ равен $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 6$.

Ответ: б) 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_2\left(4x^2-1\right)-\frac{1}{2}\log_2 x^2 \le \log_2\left(5x+\frac{9}{x}-11\right)$.

Решение.

Левая часть неравенства определена при $|x|>\frac{1}{2}$, поэтому при $|x|>\frac{1}{2}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{4x^2-1}{|x|}\le\frac{5x^2-11x+9}{x}.$$

При $x<-\frac{1}{2}$ неравенство принимает вид:

$$-\frac{4x^2-1}{x}\le\frac{5x^2-11x+9}{x};\ \frac{9x^2-11x+8}{x}>0,\ \text{откуда}\ x>0.$$

Учитывая ограничение $x<-\frac{1}{2}$, получаем: решений нет.

При $x>\frac{1}{2}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{4x^2-1}{x}\le\frac{5x^2-11x+9}{x};\ \frac{x^2-11x+10}{x}\ge0;\ \frac{(x-1)(x-10)}{x}\ge0,$$

откуда $0<x\le1$; $x\ge10$. Учитывая ограничение $x>\frac{1}{2}$, получаем: $\frac{1}{2}<x\le1$; $x\ge10$.

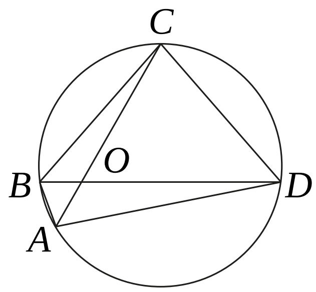
Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right]$; $[10;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 1 и / или 10, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны длины сторон и диагональ: $AB=3$, $BC=5$, $CD=5$, $AD=8$, $AC=7$.

а) Докажите, что около этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите длину диагонали BD.



Решение.

а) По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC:

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\angle ABC=120^\circ$, $\angle ADC=60^\circ$. Сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна 180°, поэтому около него можно описать окружность.

б) Поскольку около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность, а треугольник BCD равнобедренный, получаем:

$$\angle BAC=\angle BDC=\angle DBC=\angle DAC.$$

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Треугольники ABC и BOC подобны, поскольку $\angle BAC=\angle DBC=\angle OBC$, $\angle ACB$ — общий. Значит,

$$BO=\frac{BC}{AC}\cdot AB=\frac{15}{7}.$$

Треугольники ADC и DOC подобны, поскольку $\angle DAC=\angle BDC=\angle ODC$, $\angle ACD$ — общий. Значит,

$$DO=\frac{DC}{AC}\cdot AD=\frac{40}{7}.$$

Таким образом, $BD=BO+OD=\dfrac{55}{7}$.

Ответ: б) $\dfrac{55}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей составляет кредит, если известно, что он будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 65 500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S рублей, а ежегодные выплаты X рублей. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S\,,\ \frac{5}{4}\cdot S-X\,,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2 S-\frac{5}{4}\cdot X-X\,,\ \left(\frac{5}{4}\right)^3 S-\left(\frac{5}{4}\right)^2 X-\frac{5}{4}\cdot X-X=0\,,$$

откуда

$$X=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{4}-1\right)}{\left(\left(\frac{5}{4}\right)^3-1\right)}\cdot S=\frac{125}{244}\cdot S\,;\ 3X-S=\frac{131}{244}\cdot S=65\,500\,.$$

Получаем $S=122\,000$ (рублей).

Ответ: 122 000.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

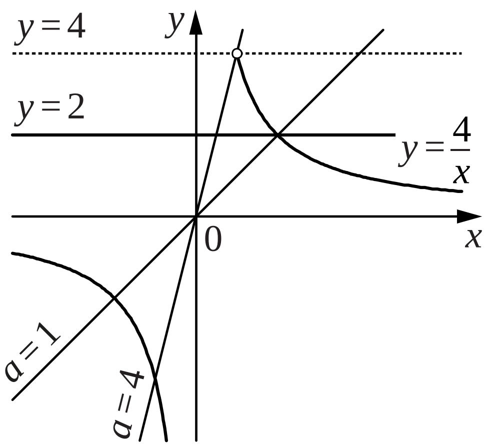
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\left(\sqrt{4-y}\right)^2} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\left(\sqrt{4-y}\right)^2} = 0.$$



При $y \geq 4$ левая часть не имеет смысла. При $y < 4$ уравнение задаёт прямую $y = 2$ и гиперболу $y = \frac{4}{x}$ (см. рисунок).

При каждом значении a уравнение $y = ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

При $y < 4$ такая прямая пересекает прямую $y = 2$ при любом ненулевом значении a, пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{4}{x}$ при $0 < a < 4$, пересекает левую ветвь гиперболы $y = \frac{4}{x}$ при $a > 0$. При этом прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$ при $a = 1$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$ с прямой $y = ax$ при условии $y < 4$.

Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$0 < a < 1;\ 1 < a < 4.$$

Ответ: $0 < a < 1;\ 1 < a < 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого включением только одной точки $a = 1$ или $a = 4$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = 1$ и $a = 4$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 По окружности в некотором порядке расставлены натуральные числа от 1 до 10. Между каждыми двумя соседними числами написали модуль их разности. Затем исходные числа стёрли.

а) Приведите пример расстановки, когда сумма полученных чисел равна 26.

б) Может ли сумма полученных чисел быть равна 31?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных чисел?

Решение.

а) Например, для расстановки чисел 1, 2, 3, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 10 сумма полученных чисел равна 26.

б) Заметим, что среди полученных чисел количество нечётных чисел чётно, поскольку оно равно количеству пар соседних изначальных чисел с разной чётностью. Значит, сумма полученных чисел должна быть чётна и не может равняться 31.

в) Каждое полученное число является разностью двух исходных. Значит, сумма 10 таких разностей не превосходит

$$2\cdot(10+9+8+7+6)-2\cdot(1+2+3+4+5)=50,$$

поскольку из каждого исходного числа получается две разности.

Для расстановки чисел 1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6 сумма полученных чисел равна 50.

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 10; б) нет; в) 50.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в пункте *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4