

5-7 класс

Задача 7.1.(6.1) Который час?

Сутки в Древнем Египте делились на часы следующим образом: время от рассвета до заката делилось на 12 равных дневных часов, а время от заката до рассвета — на 12 равных ночных часов. Продолжительность дневного и ночного часа, как следствие, зависела от конкретной даты измерения. В одном из древних папирусов было сказано, что некоторая важная церемония началась через два часа (дневных) после рассвета, а закончилась через час (ночной) после заката. К сожалению, точная дата этой церемонии стёрлась от времени. Найдите минимальную и максимальную продолжительность (в современных часах) этой церемонии.

Примечание: Самый длинный день начинается (в Египте) в 5:00 и заканчивается в 19:00. Самый короткий день, соответственно, начинается в 7:00 и заканчивается в 17:00.

Ответ: Минимальная продолжительность — 9,5 ч, максимальная — 12,5 ч.

Решение: Согласно папирусу, церемония длилась 10 дневных часов и 1 ночной час. Продолжительность самого короткого дня составляет 10 современных часов. Таким образом, 1 дневной час в этом случае равен $10/12$ современного, а ночной — $14/12$ современного. Общая продолжительность церемонии составляет

$$t_{\text{мин}} = 10 \times \frac{10}{12} \text{ ч} + \frac{14}{12} \text{ ч} = 114/12 \text{ ч} = 9,5 \text{ ч}.$$

Продолжительность самого длинного дня составляет 14 современных часов. Соответственно, 1 дневной час в этом случае равен $14/12$ современного, а ночной — $10/12$ современного. Общая продолжительность церемонии теперь составляет

$$t_{\text{макс}} = 10 \times \frac{14}{12} \text{ ч} + \frac{10}{12} \text{ ч} = 150/12 \text{ ч} = 12,5 \text{ ч}.$$

Таким образом, минимальная продолжительность церемонии равна 9,5 ч, а максимальная — 12,5 ч.

Критерии:

- Найдена продолжительность дневного и ночного часа для самого короткого дня 2 балла
- Найдена продолжительность дневного и ночного часа для самого длинного дня 2 балла
- Найдена минимальная продолжительность церемонии 3 балла
- Найдена максимальная продолжительность церемонии 3 балла

Задача 7.2.(6.2) Газонокосильщики.

Известно, что газон футбольного поля один опытный рабочий обычно стрижёт за 8 часов. Как-то раз, накануне открытия сезона, потребовалось срочно постричь газон. Для ускорения процесса в пару к опытному рабочему придали ещё одного, молодого, который стрижёт вдвое медленнее. Однако оказалось, что косилка у молодого рабочего была неисправна, поэтому он смог начать работу только через час после опытного коллеги. Сколько времени в общей сложности им потребовалось, чтобы выполнить задание?

Ответ: 5 ч 40 мин.

Решение: Пусть S — площадь футбольного поля. Тогда скорость, с которой работает опытный рабочий равна $v_1 = S/(8 \text{ ч})$. Молодой рабочий стрижёт вдвое медленнее, то есть со скоростью $v_2 = S/(16 \text{ ч})$. Первый час опытный рабочий работал один и постриг площадь, равную $S/(8 \text{ ч}) \cdot 1 \text{ ч} = S/8$. Оставшиеся $7S/8$ они стригли вдвоём со скоростью $v_1 + v_2 = 3S/(16 \text{ ч})$. Время, которое у них на это ушло, равно

$$t = \frac{7S/8}{3S/(16 \text{ ч})} = \frac{14}{3} \text{ ч} = 4 \text{ ч} 40 \text{ мин}.$$

Следовательно, общее время выполнения всей работы $1 \text{ ч} + 4 \text{ ч} 40 \text{ мин} = 5 \text{ ч} 40 \text{ мин}$.

Критерии:

Записаны выражения для скоростей газонокосильщиков	2 балла
Найдена площадь, постиженная опытным рабочим в одиночку	2 балла
Найдено время совместной работы	4 балла
Найдено общее время работы	2 балла

Задача 7.3.(6.3) Восток — дело тонкое!

В Японии существовала единица измерения больших объёмов, называемая «коку». Так, например, считалось, что одного коку риса должно хватить на год для пропитания взрослому человеку. В японской системе мер 1 коку состоял из 100 сё, а 1 сё соответствовал объёму ящика, длина и ширина которого равны 49 бу, а высота — 27 бу. Определите объём одного коку в литрах, если 1 м равен 330 бу.

Ответ: ≈ 180 л.

Решение: Один бу равен $1/330$ м или $1/33$ дм. Найдём объём в литрах одного сё:

$$1 \text{ сё} = \frac{49}{33} \cdot \frac{49}{33} \cdot \frac{27}{33} \text{ дм}^3 = \frac{64827}{35937} \text{ дм}^3 \approx 1,8 \text{ дм}^3 \text{ или } 1,8 \text{ л.}$$

Соответственно,

$$1 \text{ коку} = 100 \text{ сё} \approx 180 \text{ л.}$$

Критерии:

Бу переведён в систему СИ	2 балла
Использована правильная формула для объёма 1 сё	2 балла
Найдён объём 1 сё	4 балла
Найдён объём 1 коку	2 балла

Задача 7.4. Челночный бег.

Во время уборки школьной территории двое школьников понесли носилки с мусором. В это время вдоль них стал туда-сюда бегать маленький котёнок. Когда котёнок бежит навстречу ребятам, он пробегает мимо них в 1,5 раза быстрее, чем при движении в противоположном направлении. Какова скорость котёнка, если школьники идут со скоростью 0,7 м/с? Скорость котёнка одинакова в обоих случаях. Размерами котёнка можно пренебречь.

Ответ: 3,5 м/с.

Решение: Пусть L — расстояние между школьниками, u — скорость школьников, а v — скорость котёнка. Двигаясь навстречу школьникам, котёнок пробегает мимо них за время $t_1 = L/(v + u)$, а двигаясь в обратном направлении — за время $t_2 = L/(v - u)$. Так как $t_2 = 1,5t_1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{L}{v - u} = \frac{1,5L}{v + u} &\Rightarrow v + u = 1,5(v - u) \Rightarrow 2,5u = 0,5v \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = 5u = 5 \cdot 0,7 \text{ м/с} = 3,5 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Критерии:

Записано выражение для времени t_1	3 балла
Записано выражение для времени t_2	3 балла
Записано, что $t_2 = 1,5t_1$	1 балл
Найдена скорость котёнка	3 балла

Максимально возможный балл в 5-6 классе	30
Максимально возможный балл в 7 классе	40

8 класс

Задача 8.1. Как я провёл лето.

Как-то летом, находясь в отпуске, Василий поехал на своём автомобиле к морю. Дорога шла через горный перевал. Подъём занял первую треть пути, и автомобиль двигался на этом участке со скоростью 24 км/ч. Затем одну шестую всего пути дорога была ровной, а оставшуюся часть пути она спускалась к морю. С какой скоростью автомобиль двигался на ровном участке, если он спускался со скоростью 750 м/мин, а его средняя скорость на всём пути составила 10 м/с?

Ответ: 60 км/ч.

Решение: Пусть s — длина пути, пройденного Василием. Тогда $s_1 = s/3$ — длина первого участка, $s_2 = s/6$ — длина второго. Длина третьего участка, соответственно, составляет

$$s_3 = s - \frac{s}{3} - \frac{s}{6} = \frac{s}{2}.$$

Время, потраченное на каждом участке и на всём пути, равно, соответственно,

$$t_1 = \frac{s/3}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s/6}{v_2}, \quad t_3 = \frac{s/2}{v_3}, \quad t = \frac{s}{v_{\text{cp}}}.$$

Так как $t_2 = t - t_1 - t_3$, получаем, что

$$\frac{s/6}{v_2} = \frac{s}{v_{\text{cp}}} - \frac{s/3}{v_1} - \frac{s/2}{v_3} \Rightarrow \frac{1}{v_2} = \frac{6}{v_{\text{cp}}} - \frac{2}{v_1} - \frac{3}{v_3} = \frac{6}{36 \text{ км/ч}} - \frac{2}{24 \text{ км/ч}} - \frac{3}{45 \text{ км/ч}} = \frac{1}{60 \text{ км/ч}}.$$

Отсюда, $v_2 = 60$ км/ч.

Критерии:

Правильно сделан перевод к одним единицам измерения для всех скоростей	1 балл
Записаны выражения для s_1, s_2, s_3	1 балл
Записаны выражения для t_1, t_2, t_3	2 балла
Записано равенство $s = v_{\text{cp}}t$ или его аналог	2 балла
Записано уравнение для поиска v_2	2 балла
Найдено значение v_2	2 балла

Задача 8.2. Эксперименты с динамометром.

На крюке динамометра висят скрепленные друг с другом два тела одинаковой массы — алюминиевое (сверху) и медное (снизу). Если нижнее тело полностью погружено в керосин, динамометр показывает 6,8 Н. Определите массы обоих тел. Что покажет динамометр, если оба тела полностью погрузить в керосин? Плотность алюминия равна 2700 кг/м³, меди — 8900 кг/м³, керосина — 800 кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 356 г, 5,7 Н.

Решение: Пусть m — масса одного тела. Тогда $V_1 = m/\rho_{\text{ал}}$ — объём алюминиевого тела, а $V_2 = m/\rho_{\text{м}}$ — объём медного. Динамометр показывает общий вес системы в керосине. В первом случае он равен

$$P_1 = 2mg - \rho_{\text{к}}gV_2 = 2mg - \rho_{\text{к}}g \cdot \frac{m}{\rho_{\text{м}}} = mg \left(2 - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{м}}} \right) = mg \left(2 - \frac{800 \text{ кг/м}^3}{8900 \text{ кг/м}^3} \right) = \frac{170}{89} mg.$$

Отсюда находим массу m :

$$m = \frac{89P_1}{170g} = \frac{89 \cdot 6,8 \text{ Н}}{170 \cdot 10 \text{ Н/кг}} = 0,356 \text{ кг} = 356 \text{ г}.$$

Если в керосин погрузить оба груза, то динамометр покажет

$$P_2 = 2mg - \rho_{\text{к}}g(V_1 + V_2) = mg \left(2 - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{ал}}} - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{м}}} \right) =$$

$$= 0,356 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot \left(2 - \frac{800 \text{ кг/м}^3}{2700 \text{ кг/м}^3} - \frac{800 \text{ кг/м}^3}{8900 \text{ кг/м}^3} \right) \approx 5,7 \text{ Н}.$$

Критерии:

Записаны выражения для объёмов обоих тел	1 балл
Записано выражение для веса в первом случае	2 балла
Записано выражение для веса во втором случае	2 балла
Найдено значение m	2 балла
Найдено значение P_2	3 балла

Задача 8.3. Эх, ухнем!

Рабочий Василий должен поднять груз массой 100 кг на высоту 1,2 м, используя для этого пологую наклонную плоскость — пандус. Сколько времени займёт весь подъём, если Василий тянет груз с силой, равной 250 Н, прикладывая её вдоль поверхности пандуса? Коэффициент полезного действия пандуса равен 30%, а груз перемещается со скоростью 6 м/мин? Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 160 с.

Решение: Полезная работа по подъёму груза равна $A_{\text{пол}} = mgh = 100 \text{ кг} \cdot 10 \text{ Н/кг} \cdot 1,2 \text{ м} = 1200 \text{ Дж}$. Работа, совершённая Василием равна $A_{\text{сов}} = A_{\text{пол}}/0,3 = 4000 \text{ Дж}$. С другой стороны, $A_{\text{сов}} = Fvt$, где F — сила, которую прикладывает рабочий, v — скорость перемещения груза, а t — время перемещения. Отсюда

$$t = \frac{A_{\text{сов}}}{Fv} = \frac{4000 \text{ Дж}}{250 \text{ Н} \cdot 0,1 \text{ м/с}} = 160 \text{ с}.$$

Критерии:

Записано выражение для $A_{\text{пол}}$	2 балла
Записано выражение для $A_{\text{сов}}$	2 балла
Связь между $A_{\text{пол}}$ и $A_{\text{сов}}$ через КПД	2 балла
Найдено время движения	4 балла

Задача 8.4. Больше или меньше?

В цилиндрическом сосуде находится вертикальный ледяной цилиндр, вокруг которого налита вода (рис. 8.1). Высота слоя воды равна 10 см, высота ледяного цилиндра — 20 см, а площадь основания цилиндра в четыре раза меньше площади дна сосуда. Как и насколько изменится давление воды на дно сосуда, если весь лёд растает? Вода из сосуда не выливается. Плотность льда равна 900 кг/м³, плотность воды — 1000 кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: Увеличится на 200 Па.

Решение: Пусть S — площадь основания цилиндра, а $h = 10 \text{ см}$ — первоначальная высота слоя воды. Тогда площадь дна сосуда равна $4S$, а высота цилиндра — $2h$. Начальный объём воды равен $V_0 = (4S - S)h = 3Sh$, а масса льда $m = \rho_{\text{л}}S \cdot 2h$. Когда лёд растает, объём получившейся из него воды станет равен $V = m/\rho_{\text{в}} = 1,8Sh$. Общий объём воды тогда составит

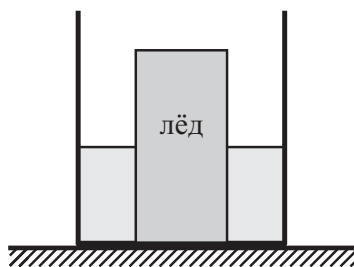


Рис. 8.1.

$V_0 + V = 4,8Sh$, а высота слоя воды, соответственно, будет равна $h' = (V_0 + V)/(4S) = 1,2h$. Так как высота увеличилась, то и давление воды на дно возрастёт. Изменение давления равно

$$\Delta p = \rho_{\text{в}}g \cdot 1,2h - \rho_{\text{в}}gh = 0,2\rho_{\text{в}}gh = 0,2 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг} \cdot 0,1 \text{ м} = 200 \text{ Па}.$$

Критерии:

Записано выражение для начального объёма воды	1 балл
Записано выражение для массы льда	1 балл
Найден объём воды, получившейся при таянии льда	2 балла
Найдена итоговая высота слоя воды	3 балла
Сделан вывод, возрастает или убывает давление	1 балл
Найдено изменение давления воды	2 балла
Максимально возможный балл в 8 классе	40