Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант 129

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелиевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$sin^2 a + cos^2 a = 1$$

$$sin\,2a = 2\,sin\,a \cdot cos\,a$$

$$cos\,2a = cos^2 a - sin^2 a$$

$$sin(a+\beta) = sin\,a \cdot cos\,\beta + cos\,a \cdot sin\,\beta$$

$$cos(a+\beta) = cos\,a \cdot cos\,\beta - sin\,a \cdot sin\,\beta$$

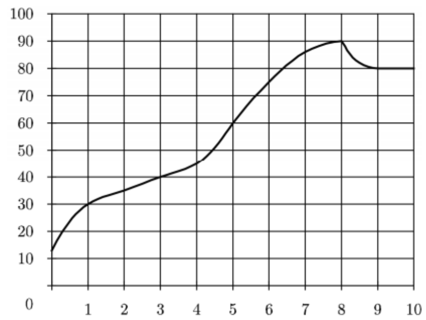
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Теплоход рассчитан на 650 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

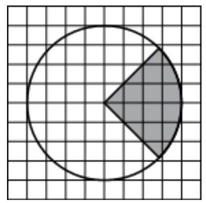
Ответ: ________________

2 На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько градусов нагреется двигатель с третьей по восьмую минуты разогрева.



Ответ: ________________

3 Найдите площадь S закрашенной фигуры, изображенной на клетча-той бумаге с размером клетки 1×1. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Ответ: ________________

4 По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

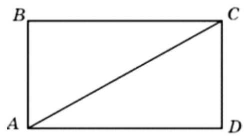
Ответ: ________________

5 Найдите корень уравнения:

$$\log_{27} 3^{5x+5} = 2$$

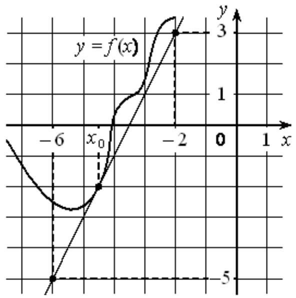
Ответ: ________________

6 Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как 4:5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.



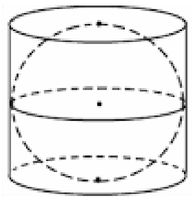
Ответ: ________________

7 На рисунке изображены график дифференцируемой функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой *x0*. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке *x0*.



Ответ: ________________

8 Шар вписан в цилиндр. Объем шара равен 6. Найдите объем цилиндра.



Ответ: ________________

Часть 2

9 Найдите $h(5+x)+h(5-x)$, если $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-10}$

Ответ: ________________

10 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, b=1 — постоянные параметры, *x(м)* — смещение камня по горизонтали, *y(м)* — высота камня над замлей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Ответ: ________________

11 В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник.

Ответ: ________________

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x}{x^2+9} \text{ на отрезке } [1;4]$$

Ответ: ________________

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение:

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём AM= B_1N= C_1K=2.
а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

15 Решите неравенство:

$$\log_3^2(-\log_3 x) + \log_3 \log_3^2 x \leq 3$$

16 Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$
а) Докажите, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KBC, если известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 12, а $\cos\angle BAC = 0{,}6$

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(a + x - 6) = 2$$

имеет хотя бы один корень, на промежутке (-1; 1]

19 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.
а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

РЕШЕНИЕ:

1 Теплоход рассчитан на 650 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение:

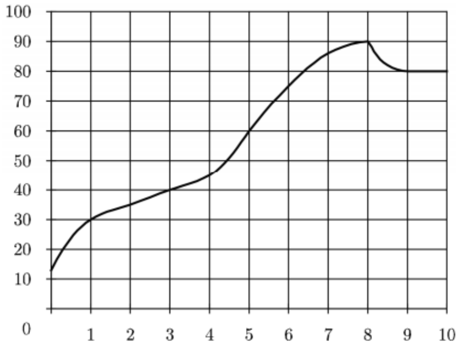
1) 650 +20 =670 – пассажиров всего;

2) 670 :70 ≈9,6 – шлюпок потребуется;

Следовательно, всего шлюпок должно быть 10.

Ответ: 10

2 На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько градусов нагреется двигатель с третьей по восьмую минуты разогрева.



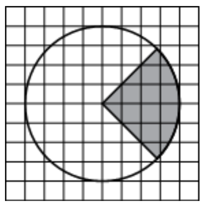
Решение:

На третьей минуте двигатель разогрет на 40 градусов, на восьмой на 90 градусов.

Тогда с третьей по восьмую минуты: 90-40=50 – градусов.

Ответ: 50

3 Найдите площадь S закрашенной фигуры, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Решение:

Площадь круга $S = \pi R^2 = \pi 4^2 = 16\pi$;

Площадь закрашенной фигуры равна $\frac{1}{4}S = \frac{1}{4}16\pi = 4\pi$.

Ответ: 4

4 По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение:

Вероятность того, что товар не доставят из магазина А, равна 1-0,8=0,2;

Вероятность того, что товар не доставят из магазина Б, равна 1-0,9=0,1;

Вероятность того, что ни один магазин не доставит товар, равна 0,2·0,1=0,02.

Ответ: 0,02

5 Найдите корень уравнения:

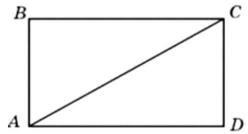
$$\log_{27} 3^{5x+5} = 2$$

Решение:

$$\log_{27} 3^{5x+5} = 2 \iff (5x+5)\log_{27}3 = 2 \iff (5x+5)\frac{1}{3} = 2 \iff x = 0{,}2\,.$$

Ответ: 0,2

6 Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как 4:5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.



Решение:

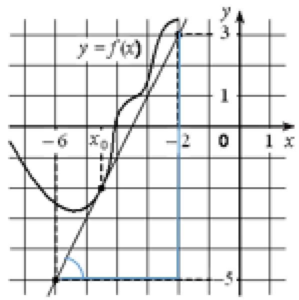
Пусть AD=6; CD : AC=4:5. Обозначим CD=4x; AC=5x.

Тогда по т. Пифагора: $(5x)^2 = (4x)^2 + 6^2 \iff x = 2$.

Следовательно, CD=4x=8, а площадь равна S= AD·CD=48.

Ответ: 48

7 На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение:

Значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к оси x.

$\operatorname{tg} a = \frac{8}{4} = 2$.

Ответ: 2

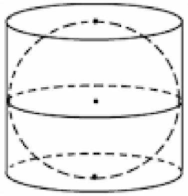
8 Шар вписан в цилиндр. Объем шара равен 6. Найдите объем цилиндра.

Решение:

Заметим, что высота цилиндра равна диаметру шара.

Объем шара равен: $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = 6$, значит $\pi R^3 = \frac{9}{2}$.

Объем цилиндра равен: $V_ц = \pi R^2 h = \pi R^2 2R = 2\pi R^3 = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9$.



Ответ: 9

9 Найдите: $h(5+x) + h(5-x)$, если $h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-10}$

Решение:

$\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5+x-10} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{5-x-10} =$

$= \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{-(5+x)} = \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{x-5} - \sqrt[3]{x-5} - \sqrt[3]{5+x} = 0$

Ответ: 0

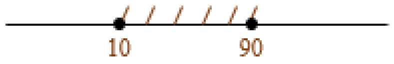
10 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, b=1 — постоянные параметры, *x(м)* — смещение камня по горизонтали, *y(м)* — высота камня над замлей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение:

$-\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9$;

$x^2 - 100x + 900 \leq 0$;

$(x-90)(x-10) \leq 0$.



Ответ: 90

11 В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник.

Решение:

$(1-x)(1+x)S = 0{,}96S$

$1 - x^2 = 0{,}96$

$x^2 = 0{,}04$

$x = 0{,}2$. Значит акции подорожали на 20%.

Ответ: 20

12 Найдите наименьшее значение функции: $y = \frac{x}{x^2+9}$ на отрезке [1;4].

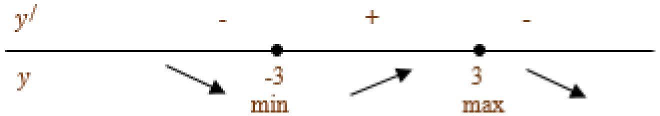
Решение:

Найдем производную заданной функции и приравняем к нулю:

$$y' = \frac{x'(x^2+9) - x(x^2+9)'}{(x^2+9)^2} = \frac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2} = 0$$

Найдем нули производной: $x = 3$; $x = -3$.

Определим знаки производной и поведение функции:



На заданном интервале [1;4] точка максимума $x = 3$, значит наименьшее значение функции на одном из концов интервала:

$y(1) = \frac{1}{1^2+9} = 0{,}1$; $y(4) = \frac{4}{4^2+9} = 0{,}16$.

Значит $y(1) = 0{,}1$ – наименьшее значение функции.

Ответ: 0,1

13 а) Решите уравнение:

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Решение:

а) $2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3$;

$2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} - 3 = 0$;

Замена: $t = 2^{\sin^2 x} > 0$

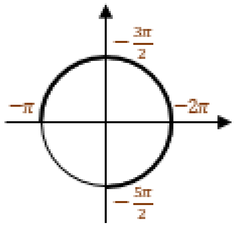
$t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0 \iff (t-1)(t-2) = 0 \iff t_1 = 1;\ t_2 = 2$.

Получаем два уравнения:

$2^{\sin^2 x} = 1$	$2^{\sin^2 x} = 2$
$2^{\sin^2 x} = 2^0$	$2^{\sin^2 x} = 2^1$
$\sin^2 x = 0$	$\sin^2 x = 1$
$\sin x = 0$	$\sin x = \pm 1$
$x = \pi k$	$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in Z$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Получим числа: $-\pi;\ -2\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\ ; -\frac{3\pi}{2}$

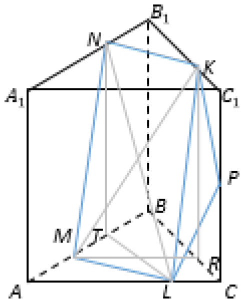


Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi k,\ k \in Z$ б) $-\pi;\ -2\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\ ; -\frac{3\pi}{2}$

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.



Решение:

а) Покажем, что стороны и диагонали $MNKL$ равны.

$\triangle MNT = \Delta LKR$ —по 2 $\angle$ и стор., следовательно $MN = LK$.

$\triangle NB_1K = \Delta AML$ —по 2 стор. и $\angle$, следовательно $ML = NK$.

Далее, $ML = NK = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 60} = \sqrt{12}$;

$MN = LK = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{12}$;

Следовательно, $ML = NK = MN = LK = \sqrt{12}$.

Покажем, что диагонали NL и MK равны.

Рассмотрим $\triangle NTL$ и ΔKRM:

$MR = TL = 4$ (по построению)

$KR = NT = 2\sqrt{2}$ (по условию)

$\angle KRM = \angle NTL = 90°$ (по построению)

Следовательно, $\triangle NTL = \Delta KRM$ и следовательно, $NL = MK$.

Т.к. стороны и диагонали $MNKL$ равны, следовательно, $MNKL$ квадрат.

б) Пятиугольник $MNKPL$- искомое сечение. P- середина CC_1.

Сечение состоит из квадрата $MNKL$ и равнобедренного треугольника KPL.

$S_{MNKL} = \left(\sqrt{12}\right)^2 = 12$.

Найдем площадь треугольника: $KP = PL = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}$;

$h_\Delta = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$;

$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = 3$;

$S = S_{MNKL} + S_\Delta = 12 + 3 = 15$.

Ответ: б) 15

15 Решите неравенство: $\log_3^2(-\log_3 x) + \log_3 \log_3^2 x \le 3$

Решение:

При условии, что $\begin{cases} x > 0 \\ -\log_3 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$ неравенство имеет следующее решение:

$\log_3^2(-\log_3 x) + 2\log_3(-\log_3 x) - 3 \le 0$;

Замена: $\log_3(-\log_3 x) = t$

$t^2 + 2t - 3 \le 0$;

$(t-1)(t+3) \le 0$;

$t_1 = 1;\ t_2 = -3$.

Получаем:

$\begin{cases} \log_3(-\log_3 x) \le 1 \\ \log_3(-\log_3 x) \ge -3 \end{cases}$; $\begin{cases} -\log_3 x \le 3 \\ -\log_3 x \ge \frac{1}{27} \end{cases}$; $\begin{cases} \log_3 x \ge -3 \\ \log_3 x \le -\frac{1}{27} \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge \frac{1}{27} \\ x \le \frac{1}{\sqrt[27]{3}} \end{cases}$

С учетом условия $\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$ получаем: $x \in \left[\frac{1}{27}; \frac{1}{\sqrt[27]{3}}\right]$

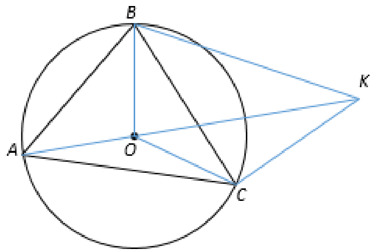
Ответ: $\left[\frac{1}{27}; \frac{1}{\sqrt[27]{3}}\right]$

16 Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KBC, если известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 12, а $\cos\angle BAC = 0{,}6$.

Решение:



а) Обозначим $\angle BAC = a$, тогда $\angle BOC = 2a$;

$\triangle OBC$: $\angle OBC = \frac{1}{2}(180° - 2a) = 90° - a$.

Далее, т.к. $\angle BAC + \angle AKC = 90°$,

тогда $\angle AKC = 90° - \angle BAC = 90° - a$.

Значит $\angle OBC = \angle AKC$. Т.к. эти углы опираются на один отрезок OC, следовательно, по свойству вписанных углов точки O, B, K, C лежат на одной окружности. Следовательно, четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Т.к. четырехугольник $OBKC$ вписанный, следовательно, ΔKBC и ΔOKC описаны одной и той же окружностью. Найдем радиус окружности, описанной около ΔOKC.

$\triangle OKC$: $\angle OKC = \angle AKC = 90° - a$; $\sin\angle OKC = \sin(90° - a) = \cos a = 0{,}6$;

$OC = 12$ (т.к. является радиусом окружности, описанной около $\triangle ABC$).

По теореме синусов:

$\frac{OC}{\sin\angle OKC} = 2R$; $\frac{12}{0{,}6} = 2R$; $R = 10$.

Ответ: 10

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

Решение:

Общая сумма за два года:

$12 + 0{,}15 \cdot 12 + n + 0{,}15(12 + 0{,}15 \cdot 12 + n) + n \geq 24;$

$n \geq 3{,}78.$

Следовательно, $n = 4$.

Тогда, общая сумма за два года равна:

$12 + 0{,}15 \cdot 12 + 4 + 0{,}15(12 + 0{,}15 \cdot 12 + 4) + 4 = 24{,}47.$

Общая сумма за четыре года:

$24{,}47 + 0{,}15 \cdot 24{,}47 + m + 0{,}15(24{,}47 + 0{,}15 \cdot 24{,}47 + m) + m \geq 36;$

$m \geq 1{,}69.$

Следовательно, $m = 2$.

Ответ: $n = 4$; $m = 2$

18 Найдите значения a, при каждом из которых уравнение: $\log_{x+1}(a + x - 6) = 2$ имеет хотя бы один корень, на промежутке (-1; 1]

Решение:

Ограничения: $x + 1 > 0 \iff x > -1;\ x + 1 \neq 1 \iff x \neq 0$.

$\log_{x+1}(a + x - 6) = 2$;

$(x + 1)^2 = a + x - 6$;

$x^2 + x + 7 - a = 0.$ $(*)$

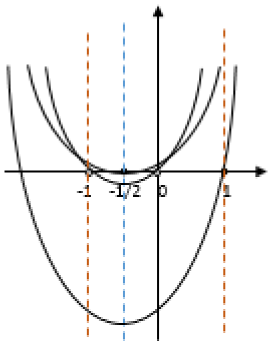
Построим график $(*)$: $x_0 = -\frac{1}{2}$ – вершина параболы.

Уравнение имеет решения на заданном промежутке начиная с точки касания параболы оси x до пересечения параболы оси x в точке 1, за исключением точки с координатами (0; 0).

Точка касания параболы с осью x имеет координаты $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, подставим их в уравнение $(*)$, получим $a = \frac{27}{4}$.

Пересечение параболы с осью x в точке 1, имеет координаты $(1; 0)$, подставим их в уравнение $(*)$, получим $a = 9$.

Исключим точку с координатами $(0; 0)$, подставив в $(*)$, получим $a \neq 7$.



Ответ: $\left[\frac{27}{4}; 7\right); (7; 9]$

19 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Решение:

а) $29 + 32 + 40 + 91 = 192$ – литра всего.

$192 : 4 = 48$ – литров должно быть в каждой бочке.

Из четвертой бочки переливаем в первую 19 литров, в первой станет 48 литров, в четвертой останется 72 литра.

Из четвертой бочки переливаем во вторую 16 литров, во второй станет 48 литров, в четвертой останется 56 литров.

Из четвертой бочки переливаем в третью 8 литров, в третьей станет 48 литров и в четвертой останется 48 литров.

Таким образом, за три переливания можно уравнять количество воды в бочках.

б) Пусть в первых шести бочках по одному литру воды, а в седьмой — 8 литров воды. После переливания в каждой бочке должно стать по 2 литра воды. Следовательно, в каждую из первых шести бочек надо как минимум один раз наливать воду. Значит переливаний должно быть не меньше шести.

в) Пусть в первых 25 бочках находится по 1 литру, а в 26-й — 27 литров воды. После выравнивания в каждой бочке должно стать по 2 литра воды. Следовательно, в каждую из первых 25 бочек надо как минимум один раз наливать воду. Значит переливаний должно быть не меньше 25.

Покажем, что более 25 переливаний не потребуется.

Пусть n — среднее арифметическое объёмов воды во всех 26 бочках. Если во всех бочках находится n литров воды, то переливаний не требуется. В противном случае найдутся две бочки, в одной из которых больше n литров, а в другой — меньше n литров. Перельем воду из первой бочки во вторую, пока в одной из них не станет ровно n литров воды. Таким образом, после каждого переливания бочек в которых ровно n литров воды становиться на 1 больше. Тогда не более чем через 25 таких переливаний в 25 бочках будет ровно n литров воды. Значит и в оставшейся бочке тоже будет равно n литров воды.

Ответ: а) да; б) нет; в) 25

Ответы	
№1	10
№2	50
№3	4
№4	0,02
№5	0,2
№6	48
№7	2
№8	9
№9	0
№10	90
№11	20
№12	0,1
№13	а) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi k,\qquad k\in Z$ б) $-\pi;\ -2\pi;\ -\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}$
№14	15
№15	$\left[\frac{1}{27};\frac{1}{\sqrt[27]{3}}\right]$
№16	10
№17	4 и 2 млн. руб.
№18	$\left[\frac{27}{4};7\right);(7;9]$
№19	а) да; б) нет; в) 25