5-7 класс

Задача 7.1.(6.1) Герасим и Муму.

В рассказе Тургенева рост собачки Муму составлял примерно пол-аршина, а её хозяин, дворник Герасим, описывался так: «мужчина двенадцати вершков роста, сложенный богатырём». У кого из них рост был больше и во сколько раз? Известно, что 1 сажень = 3 аршина = = 2,1336 м, 1 вершок = 4,445 см?

Примечание: Рост человека в XIX веке обычно давался в вершках сверх двух обязательных аршин.

Ответ: У Герасима рост больше в 5,5 раз.

Решение: Так как рост человека давался в вершках сверх двух обязательных аршин, настоящий рост Герасима составлял 2 аршина 12 вершков. Один аршин равен 1/3 саженя или 71,12 см, поэтому рост дворника равен

$$H = 2 \times 71{,}12 \text{ см} + 12 \times 4{,}445 \text{ см} = 195{,}58 \text{ см}.$$

Рост Муму составляет 1/2 аршина или

$$h = 0{,}5 \cdot 71{,}12 \text{ см} = 35{,}56 \text{ см}.$$

Отсюда получаем, что Герасим выше собачки в 195,58/35,56 = 5,5 раз.

Критерии:

Указано, что настоящий рост Герасима равен 2 аршина 12 вершков . . . . . 2 балла
Рост героев приведён к общим единицам измерения (вершкам, сантиметрам и т.п.) . . 4 балла
Указано, что Герасим выше Муму . . . . . 1 балл
Найдено отношение ростов персонажей . . . . . 3 балла

Задача 7.2.(6.2) Тик–так!

В классе на стене висят часы, которые показывают время с помощью часовой, минутной и секундной стрелок. Длина часовой стрелки равна 6 см. Определите длину минутной и секундной стрелок, если конец секундной стрелки движется в 56 раз быстрее конца минутной, а конец минутной стрелки — в 18 раз быстрее конца часовой.

Примечание: Длина окружности L вычисляется по формуле $L = 2\pi r$, где r — радиус окружности, а $\pi \approx 3{,}14$.

Ответ: Длина минутной стрелки — 9 см, длина секундной — 8,4 см.

Решение: Часовая стрелка совершает один оборот за 12 часов, минутная — за 1 час, а секундная — за 1 минуту. Так как скорость конца минутной стрелки в 18 раз больше скорости конца часовой ($v_м = 18v_ч$), а время одного оборота минутной стрелки в 12 раз меньше ($t_м = t_ч/12$), то длины окружностей, описанных концами этих стрелок, различаются в

$$\frac{L_м}{L_ч} = \frac{v_м t_м}{v_ч t_ч} = \frac{18}{12} = 1{,}5 \text{ раза}.$$

Согласно формуле для длины окружности, радиусы этих окружностей, то есть длины стрелок, тоже различаются в 1,5 раза. Поэтому длина минутной стрелки равна 6 см × 1,5 = 9 см.

Скорость конца секундной стрелки в 56 раз больше скорости конца минутной ($v_с = 56v_м$), а время одного оборота секундной стрелки в 60 раз меньше ($t_с = t_м/60$). Длины окружностей, описанных концами этих стрелок, различаются в

$$\frac{L_м}{L_с} = \frac{v_м t_м}{v_с t_с} = \frac{60}{56} = \frac{15}{14} \text{ раза}.$$

Следовательно радиусы этих окружностей, то есть длины стрелок, тоже различаются в 15/14 раза, и длина секундной стрелки равна 9 см · 14/15 = 8,4 см.

Критерии:

Найдено время одного оборота каждой из стрелок . . . . . 2 балла
Найдено отношение путей для концов часовой и минутной стрелки . . . . . 2 балла
Найдено отношение путей для концов секундной и минутной (или часовой) стрелки . 2 балла
Найдена длина минутной стрелки . . . . . 2 балла
Найдена длина секундной стрелки . . . . . 2 балла

Задача 7.3.(6.3) Измеряем монетку.

На рис. 7.1 приведено увеличенное изображение однокопеечной монеты, с нанесёнными на него масштабной сеткой и шкалой. Расстояние между соседними делениями этой шкалы соответствует одному миллиметру. Чему равны радиус монеты, высота цифры «1» и буквы «П»?

Рис. 7.1.

Ответ: Радиус монетки — 7,75 мм, высота цифры «1» — 6,25 мм, высота буквы «П» — 1,75 мм.

Решение: Вначале определим цену деления масштабной сетки. Между миллиметровыми делениями шкалы укладываются 4 клетки, следовательно 1 клетка сетки соответствует 0,25 мм. Высота буквы «П» составляет, примерно, 7 клеток, а высота цифры «1» — 25 клеток. Отсюда получаем их высоту в миллиметрах: 1,75 мм для буквы «П» и 6,25 мм для цифры «1». Диаметр монетки равен 63 клеткам или 15,5 мм. Соответственно, радиус монетки составляет 15,5 мм/2 = = 7,75 мм.

Критерии:

Определена цена деления масштабной сетки . . . . . 2 балла
Найдена высота буквы «П» . . . . . 2 балла
Найдена высота цифры «1» . . . . . 2 балла
Найден диаметр монетки . . . . . 2 балла
Вычислен радиус монетки . . . . . 2 балла

Задача 7.4. Храни меня, мой талисман!

Ранним утром Король тридевятого королевства сел в карету и поехал вместе со своими приближёнными на охоту. Отъехав от дворца на расстояние 3 км, Король вспомнил, что забыл во дворце свой талисман, приносящий удачу. Недолго думая, он отправил за ним своего лучшего гонца и двинулся дальше. С какой скоростью скакал гонец, если Его величество получил свой талисман, успев проехать ещё 3,5 км? Скорость королевской кареты равна 5 км/ч, а на поиски талисмана во дворце гонец потратил 30 мин. Весь путь туда и обратно гонец скакал с одной и той же скоростью.

Ответ: 47,5 км/ч.

Решение: Гонец должен проскакать 3 км обратно до дворца, а затем ещё 3 км + 3,5 км = = 6,5 км, чтобы догнать королевскую карету. Таким образом, общий путь, который преодолел гонец, равен $s = 3$ км + 6,5 км = 9,5 км. Общее время доставки талисмана t равно времени, за которое карета Короля проехала 3,5 км, то есть $t = 3{,}5$ км/(5 км/ч) = 0,7 ч. Из этого времени 30 минут гонец потратил на поиски талисмана во дворце, поэтому передвижение на лошади у него заняло 0,7 ч − 0,5 ч = 0,2 ч. Отсюда находим, что гонец скакал со скоростью

$$v = \frac{s}{t - 0{,}5\ \text{ч}} = \frac{9{,}5\ \text{км}}{0{,}2\ \text{ч}} = 47{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии:

Найден общий путь, пройденный гонцом . . . . . 2 балла
Найдено общее время доставки талисмана . . . . . 2 балла
Найдено время, которое гонец провёл верхом . . . . . 3 балла
Найдена скорость, с которой скакал гонец . . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 5-6 классе 30
Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. По дороге в школу.

Рано утром девочка Наташа пошла в школу. Пятую часть времени своего движения она шла со скоростью 1,5 м/с, затем три четверти оставшегося времени её скорость была равна 4,5 км/ч. Поняв, что опаздывает, Наташа остаток времени стала идти быстрее, со скоростью 120 м/мин. Определите среднюю скорость девочки на всём пути.

Ответ: 1,45 м/с.

Решение: Переведём все скорости в метры в секунду: $v_2 = 4{,}5$ км/ч $= 1{,}25$ м/с, $v_3 = 120$ м/мин $= 2$ м/с. Пусть t — время движения Наташи от школы до дома. Тогда времена её движения на первом, втором и третьем участках, соответственно, равны $t_1 = t/5$, $t_2 = 3/4 \cdot (t - t_1) = 3t/5$, $t_3 = t - t_1 - t_2 = t/5$. Путь, пройденный Наташей, составляет

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 = \frac{v_1 t}{5} + \frac{v_2 \cdot 3t}{5} + \frac{v_3 t}{5}.$$

Найдём среднюю скорость девочки

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{v_1 + 3v_2 + v_3}{5} = \frac{1{,}5\ \text{м/с} + 3{,}75\ \text{м/с} + 2\ \text{м/с}}{5} = 1{,}45\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии:

Найдены t_2 и t_3 . . . . . 2 балла
Записано выражение для s . . . . . 3 балла
Записано выражение для средней скорости . . . . . 3 балла
Найдено значение $v_{\text{ср}}$ . . . . . 2 балла

Задача 8.2. Эксперименты на уроке.

Исследуя на уроке физики свойства рычага, школьники сначала подвесили к нему три грузика так, как показано на рис. 8.1а, а затем те же самые три грузика так, как показано на рис. 8.1б. Какова масса второго и третьего грузика, если масса первого равна 42 г, а рычаг в обоих случаях находился в равновесии. Для удобства рычаг разделён штрихами на 8 равных частей.

а) б)

Рис. 8.1.

Ответ: $m_2 = 147$ г, $m_3 = 154$ г.

Решение: Пусть l — длина одного деления рычага, а m_1, m_2, m_3 — массы первого, второго и третьего грузов. Запишем правило моментов для первого и второго случая относительно точки опоры:

$$m_1 g \cdot 4l + m_2 g \cdot 2l = m_3 g \cdot 3l \quad \Rightarrow \quad 4m_1 + 2m_2 = 3m_3 \quad \text{(для рис. 8.1а)},$$

$$m_2 g \cdot 4l = (m_1 + m_3) g \cdot 3l \quad \Rightarrow \quad 4m_2 = 3m_1 + 3m_3 \quad \text{(для рис. 8.1б)}.$$

Решая полученную систему, получим

$$m_2 = \frac{7m_1}{2} = 147\ \text{г}, \quad m_3 = \frac{11m_1}{3} = 154\ \text{г}.$$

Критерии:

Записано правило моментов для первого случая . . . . . 4 балла
Записано правило моментов для второго случая . . . . . 2 балла
Найдено значение m_2 . . . . . 2 балла
Найдено значение m_3 . . . . . 2 балла

Задача 8.3. Плавучий кубик.

Школьник Паша собрал из пластмассовых пластин полый кубик с толщиной стенок, равной 1 см, и пустил его плавать в воде. Оказалось, что кубик погружается при этом на 6 см. Какова плотность пластмассы, из которой сделаны пластины, если длина ребра кубика равна 8 см? Кубик плавает так, что нижняя его грань горизонтальна. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Ответ: $\approx$ 1,3 г/см^3.

Решение: Объём кубика равен $V_0 = (8\text{ см})^3 = 512\text{ см}^3$, объём его полости — $V_\text{п} = (8\text{ см} - 2 \cdot 1\text{ см})^3 = 216\text{ см}^3$, а объём пластиковых стенок — $V_\text{ст} = V_0 - V_\text{п} = 296\text{ см}^3$. Когда кубик погружён в воду, объём его погруженной части составляет $V_\text{погр} = (8\text{ см})^2 \cdot 6\text{ см} = 384\text{ см}^3$. Запишем условие плавания и найдём массу кубика:

$$mg = \rho_\text{в} g V_\text{погр} \quad \Rightarrow \quad m = \rho_\text{в} V_\text{погр} = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 384\text{ см}^3 = 384\text{ г}.$$

Отсюда вычислим плотность пластмассы, из которой сделан кубик

$$\rho_\text{п} = \frac{m}{V_\text{ст}} = \frac{384\text{ г}}{296\text{ см}^3} \approx 1{,}3\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Критерии:

Найден объём полости . . . . . 1 балл
Найден объём стенок кубика . . . . . 2 балла
Найден объём погруженной части кубика . . . . . 1 балл
Записано условие плавания кубика . . . . . 2 балла
Найдена масса кубика . . . . . 2 балла
Найдено значение плотности пластмассы . . . . . 2 балла

Задача 8.4. Фокус с жидкостью.

В цилиндрическом сосуде, изображённом на рис. 8.2а, находится слой жидкости высотой $H = 30$ см. Эту жидкость полностью переливают во второй сосуд (рис. 8.2б), площадь основания которого в три раза больше площади сечения узкой части. Чему равна плотность жидкости, если при переливании давление жидкости на дно сосуда изменилось на 600 Па. Высота широкой части второго сосуда равна $h = 4$ см, площадь сечения его узкой части равна площади сечения первого сосуда. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

Ответ: 750 кг/м^3.

Решение: Объём жидкости при переливании не меняется. Пусть H' — высота жидкости, перелитой во второй сосуд. Тогда $SH = 3Sh + S(H' - h)$, где S — площадь сечения первого сосуда. Отсюда получим, что

$$H = 3h + H' - h \quad \Rightarrow \quad H' = H - 2h = 22\text{ см}.$$

Давление на дно уменьшается на $\Delta p = 600$ Па из-за уменьшения высоты слоя жидкости на $\Delta H = H - H' = 2h = 8$ см, поэтому

$$\Delta p = \rho g \Delta H \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\Delta p}{g \Delta H} = \frac{\Delta p}{2gh} = \frac{600\text{ Па}}{2 \cdot 10\text{ Н/кг} \cdot 0{,}04\text{ м}} = 750\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

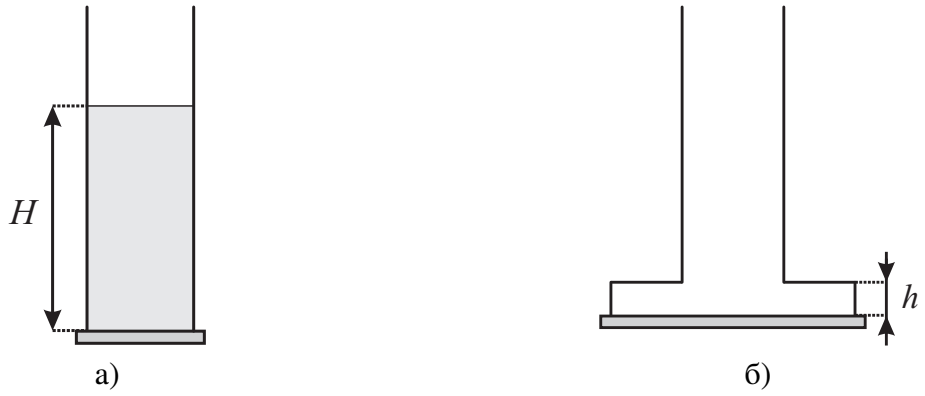

Рис. 8.2.

Критерии:

Записано условие равенства объёмов в обоих сосудах . . . . . 2 балла
Найдено изменение высоты жидкости . . . . . 3 балла
Записана формула для разности давлений . . . . . 2 балла
Найдено значение плотности жидкости . . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40