

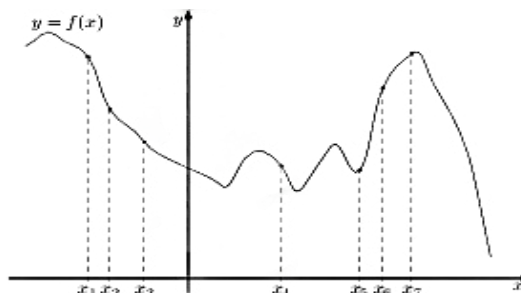
Задачник по математике

с видеоразборами по ссылке

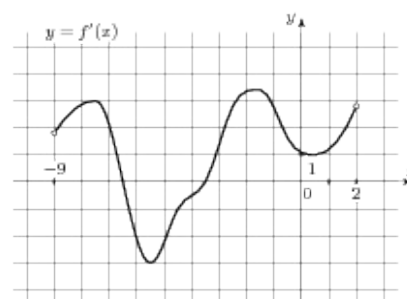
№7. Производная

Исследование функции

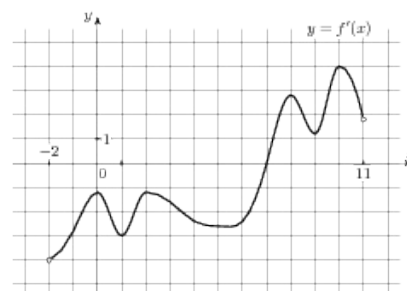
№1 На рисунке изображен график функции $f(x)$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



№2 На рисунке изображен график функции $f(x)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

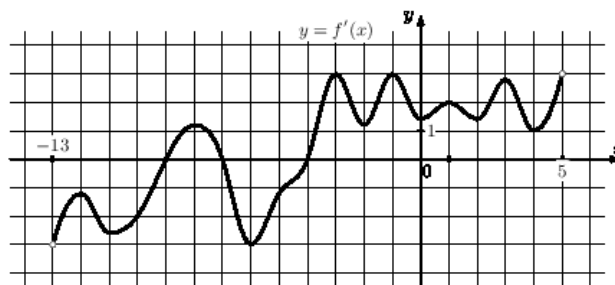


№3 На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-2; -11)$. В какой точке отрезка $[-1; 6]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

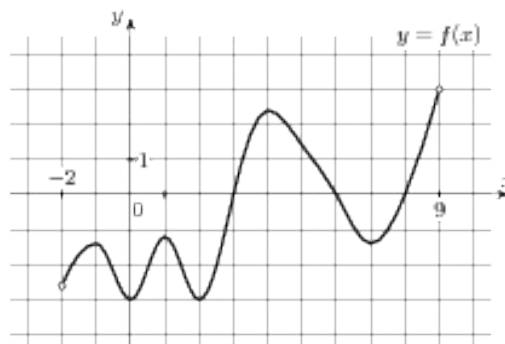


Экстремумы

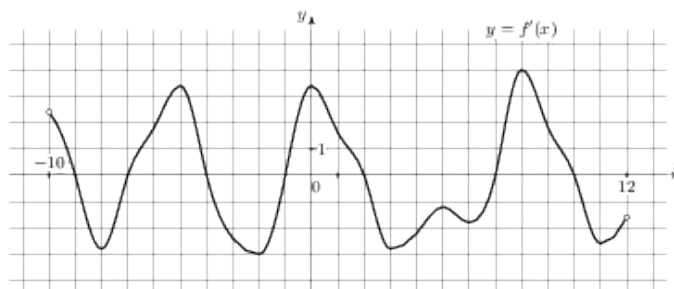
№4 На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-13; 5)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-12; 4]$.



№5 На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $[0; 8]$.

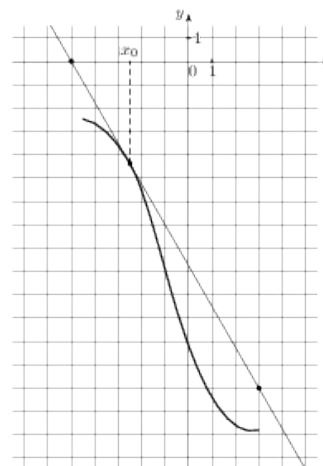


№6 На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-10; 12)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

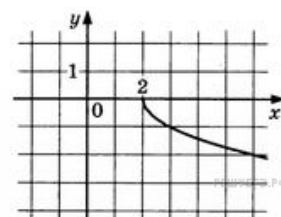


Касательная и геометрический смысл

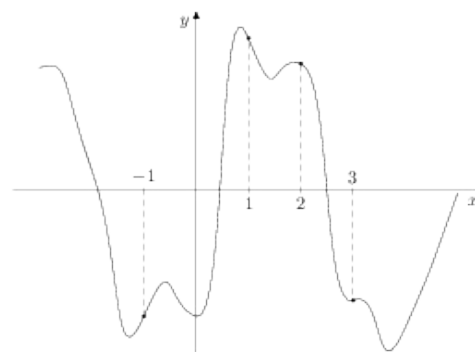
№7 На рисунке изображен график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



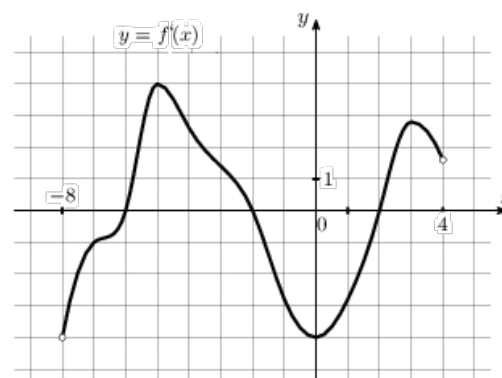
№8 На рисунке изображен график функции $f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1; 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



№9 На рисунке изображен график функции $f(x)$ и отмечены точки $-1, 1, 2, 3$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



№10 На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество целых точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 4$ или совпадает с ней.



№10. Задачи

С прикладным содержанием

№11 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 12$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

№12 Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Это возможно, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \cdot \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 115,6 см? Ответ выразите в м/с.

№13 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{\frac{R \cdot h}{500}},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 20 км?

№14 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 200$ К, $a = 20$ К/мин², $b = 250$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 700 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

№11. Текстовые задачи

Средняя скорость

№15 Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал по грунтовой дороге со скоростью 44 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 96 км/ч по асфальту. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№16 Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час — со скоростью 100 км/ч, а затем два часа — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№17 Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№18 Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Движение по прямой

№19 Расстояние между Санкт-Петербургом и Москвой равно 710 км. Из Санкт-Петербурга в Москву со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из Москвы выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города Санкт-Петербурга автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

№20 Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

№21 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 75 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 275 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 255 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

№13. Уравнения

Тригонометрия

№22 Решите уравнение: $\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$, $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi \right]$

№23 Решите уравнение: $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

№24 Решите уравнение: $2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

№25 Решите уравнение: $\frac{13 \sin^2 x - 5 \sin x}{13 \cos x + 12} = 0$, $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Смешанные

№26 Решите уравнение: $0,4^{\sin x} + 2,5^{\sin x} = 2$, $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№27 Решите уравнение: $\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x) = x$, $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№14. Стереометрия

Угол между плоскостями

№28 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1 .

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

№29 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

№30 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD .

Расстояние от точки до плоскости

№31 Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .

а) Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки A , делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC и SA , пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

№32 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = C = 5$, $BC = 6$. Высота призмы равна 3. Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до плоскости $B_1 C_1 A_1$.

Расстояние от точки до прямой

№33 Длины рёбер BC , BB_1 и BA прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 8, 12 и 9. Найдите расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 C$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

№34 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра $B_1 C_1$, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми $A_1 B$ и AM .

Доказательство и вычисление площади

№35 Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : A_1 K = 1 : 3$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC , пересекая ребро DD_1 в точке M .

- Докажите, что M - середина ребра DD_1 .
- Найдите площадь сечения, если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

№15. Неравенства

Показательные

№36 Решите неравенство: $\frac{15^x - 27 \cdot 5^x}{x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x - 27x + 108} \leq \frac{1}{x-4}$.

№37 Решите неравенство: $125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leq 4$.

Логарифмические

№38 Решите неравенство: $\frac{5 \log_2^2 x - 100}{\log_2^2 x - 25} \geq 4$.

№39 Решите неравенство: $\log_2 \frac{x^2}{4} \cdot \log_{0,5}(0,5x) \leq \frac{\log_3 \frac{x}{2}}{\log_3 2}$.

Смешанные

№40 Решите неравенство: $\log_{x^2+1} \frac{2 \cdot 9^x - 19 \cdot 3^x + 40}{9^x - 11 \cdot 3^x + 24} \geq 0$.

№41 Решите неравенство: $(4^{x^2-x-6} - 1) \cdot \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leq 0$.

№16. Планиметрия

Метод координат

№42 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , N — точка пересечения прямых CM и DK .

- Докажите, что CM перпендикулярна DK .
- Найдите MN , если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

Высоты треугольника

№43 В треугольнике ABC угол ABC тупой, H — точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

- Докажите, что угол ABC равен 120° .
- Найдите BH, если $AB = 10$, $BC = 6$.

№17. Финансовая математика

№44 В регионе А среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43 740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе В среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60 000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона В увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на $m\%$ ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах А и В стал одинаковым. Найдите m .

Аннуитетные платежи

№45 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Дифференцированные платежи

№46 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?