Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

8 класс

1. Шарик весит больше кота Матроскина на половину веса дяди Фёдора, Дядя Фёдор – столько, сколько Шарик и Матроскин вместе. Матроскин весит 10 кг. Сколько весят трое из Простоквашино вместе?

Решение: Пусть Дядя Фёдор весит – x, Шарик – y, Матроскин – z. Тогда по условию: $y - z = x/2$, $x = y + z$. Тогда, $y=(y+z)/2+z$, то есть $y=3z$. Значит вес троих $x+y+z=(3z+z)+3z+z=8z=80$*кг.*

Критерий: Задача решена верно данным или другим способом – 7 баллов.

2. Маляр добавляет синьку в белую краску, чтобы получить голубой оттенок. Сначала он собирался добавлять 15% синьки, но тогда голубой краски получалось недостаточно. Тогда он решил добавлять только 10% синьки. На сколько процентов увеличится количество голубой краски при том же объёме используемой синьки?

Ответ: на 50%

Решение: Содержание синьки в голубой краске снизилось в полтора раза. Значит из того же объёма синьки можно получить в полтора раза больше краски. То есть на 50% больше.

3. В шоу «Битва экстрасенсов» участвуют ведущий и много экстрасенсов. В течение первого дня испытаний каждый из экстрасенсов сделал семь предсказаний кому-нибудь (возможно себе). К вечеру оказалось, что каждому экстрасенсу сделали два предсказания, а ведущему – сто. Сколько экстрасенсов участвовало в первом дне шоу?

Ответ: 20.

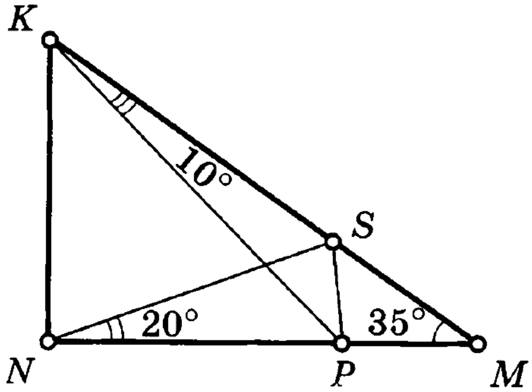
Решение: пусть экстрасенсов было x. Тогда с одно стороны предсказаний всего было $7x$, а с другой – $2x+100$. Тогда $7x=2x+100$ и $x=20$.

Критерий: Задача решена верно данным или другим способом – 7 баллов.

4. В треугольнике ΔKNM угол $\angle N$ – прямой. На сторонах KM и NM выбраны точки S и P соответственно. $\angle KMN = 35°, \angle SKP = 10°, \angle SNP = 20°$. Найдите величину угла $\angle PSM$.

Ответ: 80°

Решение: з суммы углов треугольника поучим $\angle MKN = 55°$. Внешний угол треугольника ΔNSM равен $\angle KMN = 55°$. Тогда треугольник ΔNSK – равнобедренный и $KN = NS$. $\angle NKP = 55 - 10 = 45°$. Тогда треугольник ΔNKP – равнобедренный и $KN = NP$. Следовательно, $SN = NP$ и угол $\angle NSP = \frac{180-20}{2} = 80°$



5. Васе, в качестве домашнего задания, учитель предложил нарисовать на плоскости все пары чисел (x,y) удовлетворяющих уравнению

$y(1 - x) + x^2 = 1.$

Он нашёл одну точку (1;0). Помогите Васе, изобразите ***все*** точки, координаты (x;y), которых удовлетворяют уравнению.

Решение: Преобразуем уравнение:

$y(1 - x) = (1 - x)(1 + x);$

$(1 - x)(y - 1 - x) = 0.$ Тогда $x = 1$ или $y = 1 + x$. Таким образом, все точки удовлетворяющие уравнению представляют собой совокупность двух прямых.

Критерии проверки.

• Верно проведены преобразования и верно построено множество точек – 7 баллов.

• Верно проведены преобразования, выделены два случая, но множество точек для какого-либо из них не построено или построено неверно – 4 балла.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

9 класс

1. На доске была написана несократимая дробь. Коля уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 3. А Толя прибавил к числителю 2, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате ребята получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?

Ответ. 1.

Решение. Пусть была написана дробь $\frac{a}{b}$. Тогда Коля получил $\frac{a-1}{b-3}$, а Толя $\frac{a+2}{b}$. Так как они получили одинаковый результат, $\frac{a-1}{b-3} = \frac{a+2}{b}$, откуда $b = a + 2$. Значит, исходная дробь имела вид $\frac{a}{a+2}$. И Коля получил из неё дробь $\frac{a-1}{a-1}$, а Толя $\frac{a+2}{a+2}$, т. е. результат и Коли, и Толи равен 1.

Комментарий.

Т.к. в условии говорится, что у Коли и у Толи полученная дробь имела некоторое значение, проверять, что знаменатель не равен нулю, не требуется.

Критерии проверки.

• Верное решение — 7 баллов.

• Получено, что исходная дробь имела вид $\frac{a}{a+2}$ (или эквивалентный ему), но далее выводов про итоговое значение не сделано — 3 балла.

• Решение приведено на конкретном примере (например, показано, что для дроби $\frac{3}{5}$ условие задачи выполнено) — 2 балла.

• Приведён только верный ответ — 1 балл.

2. Произведение делимого, делителя и частного равно 120. Может ли делимое быть целым числом?

Ответ: Нет

Решение: Так как произведение делителя и частного равно делимому, то произведение делимого, делителя и частного равно квадрату делимого. То есть делимое равно $\sqrt{120}$ – нецелое число.

3. В трапеции ABCD AC – биссектриса ∠A, ∠ACB = ∠ADC. Найдите площадь трапеции, если боковые стороны AB = 25, CD = 30.

Ответ: 732

Решение: Замети, что ∠ACB = ∠CAD как накрест лежащие. Тогда треугольники ΔABC и ΔACD – равнобедренные и подобные друг другу. Тогда AB = BC = 25, AC = CD = 30, и з пропорции AC/AB = AD/AC получаем AD=36. Имея все три стороны треугольника ΔACD, легко вычислить по теореме Пифагора высоту-медиану CH = 24. Площадь S = (25+36)·24/2=732.

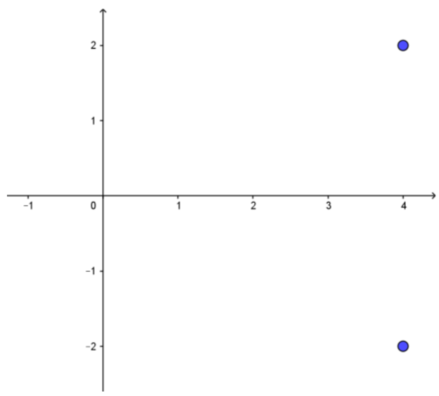
4. Оля и Коля загадали по трёхзначному числу. Каждый поделил своё на произведение его цифр и получил 5. Могли ли они загадать разные числа?

Решение. *Первый способ.* В составе цифр, которыми записывается число, нет цифры 0, иначе не может быть выполнено условие задачи. Данное трехзначное число получено умножением на 5 произведения своих цифр, следовательно, оно делится на 5. Значит, его запись оканчивается цифрой 5. Получаем, что произведение цифр, умноженное на 5, должно делиться на 25. Заметим, что четных цифр в записи числа быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю. Таким образом, трехзначное число должно делиться на 25 и не содержать четных цифр. Таких чисел только пять: 175, 375, 575, 775 и 975. Произведение цифр искомого числа должно быть меньше 200, иначе, умноженное на 5, даст четырехзначное число. Поэтому числа 775 и 975 заведомо не подходят. Среди оставшихся трех чисел только 175 удовлетворяет условию задачи.

Второй способ. Заметим (аналогично первому способу решения), что последняя цифра искомого числа – 5. Пусть a, b, 5 – последовательные цифры искомого числа. По условию задачи имеем: $100a + 10b + 5 = a \cdot b \cdot 5 \cdot 5$. Поделив обе части уравнения на 5, получаем: $20a + 2b + 1 = 5ab$. После вычитания из обеих частей равенства 20a и вынесения за скобки общего множителя в правой части, получаем: $2b + 1 = 5a(b - 4a)$ (*). Учитывая, что a и b могут принимать натуральные значения от 1 до 9, получаем, что возможные значения a – только 1 или 2. Но a=2 не удовлетворяет равенству (*), в левой части которого нечетное число, а в правой при подстановке a=2 получается четное. Итак, единственная возможность a=1. Подставив это значение в (*), получаем: $2b + 1 = 5b - 20$, откуда b=7. Ответ: единственное искомое число – 175.

5. Постройте график уравнения $x^2 - y^4 = \sqrt{8x - 16 - x^2}$, то есть изобразите на координатной плоскости все точки, координаты (x;y) которых удовлетворяют этому уравнению.

Решение: Преобразуем данное уравнение, выделив под знаком корня полный квадрат: $x^2 - y^4 = \sqrt{-(x-4)\text{^}2}$. Выражение в правой части имеет смысл лишь при x = 4. Подставляя это значение в уравнение, получаем: $4^2 - y^4 = 0$. Разложим на множители левую часть: $(2 - y)(2 + y)(4 + y^2) = 0$. Откуда y = 2 или y = –2. Значит, координаты только двух точек (4; 2) или (4; –2) удовлетворяют данному уравнению. График уравнения изображен на рисунке.



Критерии проверки:

• Проведены верные преобразования и рассуждения и верно построен график – 7 баллов.

• Проведены верные преобразования, но потеряно значение $y = -3$; в качестве графика указана одна точка – 3 балла.

• Указаны одна или две подходящие точки, возможно, с проверкой, но без иных объяснений либо после неверных преобразований – 1 балл.

• Проведены верные преобразования, но объявлено, что выражение под корнем (или в правой части после возведения в квадрат) отрицательно и графиком является пустое множество точек – 1 балл.

• Проведены рассуждения, приведшие к указанию двух точек, но эти точки как-либо соединены (например, отрезком) – 1 балл.

• Указаны без объяснений две точки, которые как-либо соединены – 0 баллов.

• В остальных случаях – 0 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

10 класс

1. Какое из чисел больше: 8^{88} или 88^8?

Ответ. Первое число больше.

Решение.$11^8 < (8^{10})^8 = 8^{80}$, поэтому $88^8 = 8^8 \cdot 11^8 < 8^8 \cdot 8^{80} = 8^{88}$.

Критерии проверки.

Верный ответ и доказательство – 7 баллов.

Верное рассуждение и в конце неверный ответ – 6 баллов.

Только ответ – 1 балл.

2. Маляр-счетовод решил раскрасить все натуральные числа в черный и белый цвета по следующим правилам: а) точки, разность координат которых кратна 8, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 3, 13 и 33 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 6, 16 и 66 — синим. Сколькими способами он может раскрасить все натуральные числа, соблюдая эти правила?

Ответ. 4 способами.

Решение. Из пункта а) следует, что раскраска всех натуральных чисел однозначно определяется раскраской чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Число 8=16-8 должно быть покрашено так же как 16, т.е. синим. Аналогично, число 1=33-4·8 должно быть покрашено красным, число 2=66-8·8 – синим, число 3 – красным, число 5=13-8 – красным и 6 – синим. Поэтому остается только посчитать, сколькими различными способами можно раскрасить числа 4 и 7. Так как каждое число можно раскрасить двумя способами – красным или синим – то всего способов 2·2=4.

Примечание. При подсчете числа способов раскрашивания точек 4 и 7, можно просто перечислить все способы, например, в виде таблицы.

Критерии проверки:

• Верный ответ с правильным обоснованием – 7 баллов.

• Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но получен ответ 6 или 7 – 4 балла.

• Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но подсчет числа способов отсутствует или получен ответ, отличный от указанных ранее – 3 балла.

• Ответ (в том числе правильный) без обоснования – 0 баллов.

3. Две окружности радиусом 12 см касаются в точке А. Третья окружность радиусом 1 см касается их в точках В и С. Найдите радиус окружности описанной около треугольника АВС.

Ответ. 2,4 см.

Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 центры окружностей. Тогда точки А, В, С лежат сторонах треугольника $\Delta O_1 O_2 O_3$ и являются точками касания вписанной окружности, так как попарно равноудалены от смежных вершин. Стороны треугольника $\Delta O_1 O_2 O_3$ равны суммам радиусов – 13, 13 и 24. Радиус окружности можно найти любы из известных способов. Например, по формуле $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ получим $r = \frac{12}{5}$.

4. В прямоугольнике со сторонами 16 см ×25 см отметили произвольные 2018 точек. Всегда ли можно выбрать 6 точек так, чтобы их было можно накрыть квадратом со стороной 1 см?

Ответ. Да.

Решение. Площадь прямоугольника 400 см2. Разделим его прямыми, параллельными его сторонам, на 400 квадратов со стороной 1 (см. рис.). Если бы в каждом таком квадрате было не больше 5 отмеченных точек, то всего было бы отмечено не более 5·400=2000 точек, что противоречит условию. Следовательно, хотя бы водном из полученных квадратов должно быть 6 из отмеченных точек.

5. Существует ли натуральное число, кратное 2018, сумма цифр которого равна 2018?

Ответ. Существует.

Решение. Достаточно привести один пример такого числа. Покажем пару способов, как можно получать такие примеры.

Пример 2. Сумма цифр числа 2018 равна 11, сумма цифр числа 10090 = 2018 · 5 равна 10. Представим число 2018 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых кратно одиннадцати, а другое — десяти. Например, 2018 = 11·8 + 10·193. Тогда число 2018…(8 раз)…201810090…(193 раза)…10090 кратно 2018, и сумма его цифр равна 2018.

Критерии проверки.

• Для полного решения задачи достаточно привести пример числа и показать, что оно удовлетворяет данным требованиям, — 7 баллов.

• Приведено число без объяснений, но жюри умеет доказывать, что оно подходит, — 5 баллов.

• Если в решении есть идея «составлять» нужное число из чисел, кратных

2018, например 201810090…1009, но количество чисел посчитано неверно, — 3 балла.

• Только верный ответ — 0 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

11 класс

1. Приведите пример числа x, для которого выполняется равенство $\cos 2017x + ctg2018x = sin2019x$. Ответ обоснуйте.

Ответ. Например, $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как $\frac{2016\pi}{4} = 252 \cdot 2\pi$ кратно периоду, имеем

$$cos\frac{2017\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$ctg\frac{2018\pi}{4} = ctg\frac{\pi}{2} = 0$$
$$sin\frac{2019\pi}{4} = sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Критерии проверки.

• Приведён **верный** (возможно иной) ответ, и показано, что при этом значении $\boldsymbol{x}$ равенство верно, — 7 баллов.

• Приведён только верный ответ — 3 балла.

2. Марат разбил все натуральные числа от 1 до 2000 на пары и посчитал их суммы. Могло ли оказаться так, что сумма любой пары чисел делилась на 6?

Ответ. Нет.

Решение. Если требуемое в задаче возможно, то числа, кратные шести, должны разбиться на пары. Так как 2000 = 333 · 6 + 2, чисел от 1 до 2000, кратных шести, ровно 333. Противоречие: 333 числа нельзя разбить на пары.

Замечание. Среди чисел от 1 до 2000 остаток 0 при делении на 6 дают 333 числа, остаток 1 — 334 числа, остаток 2 — 334 числа, остаток 3 — 333 числа, остаток 4 — 333 числа, остаток 5 — 333 числа. Следовательно, противоречие также можно получить иначе. Например, число, дающее остаток 1, должно быть в паре с числом, дающим остаток 5. Значит, таких чисел должно быть поровну, что не так.

Критерии проверки.

• Любое полное верное решение — 7 баллов.

• Верно подсчитано количество чисел с теми остатками, на которых основано получение противоречия, но ошибочно указано количество чисел с какими-то другими остатками — 5 баллов.

• Утверждается, что «не сойдутся остатки чисел», но не приводятся конкретные противоречия. Например, говорится, что чисел, кратных 6, нечётное количество, но не объясняется почему — 2 балла.

• Приведён только ответ — 0 баллов.

3. Участвуя в турнире игр «Пентамино», Равиль сыграл 54 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу, ½ очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 33 очка. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и –1 очко за поражение)?

Ответ. 12 очков.

Решение.*Первый способ.* Пусть Равиль в турнире a раз победил, b раз сыграл вничью и c раз проиграл. Тогда $a + b + c = 54, a + \frac{b}{2} = 33$. Нужно найти значение a – c. Из второго соотношения следует, что $b = 66 - 2a$. Тогда $a + (66 - 2a) + c = 54$, откуда $a - c = 12$.

Второй способ. При системе подсчёта (1; ½; 0) Равиль набрал 33 очка, значит, при системе (2; 1; 0) он наберёт вдвое больше, то есть 66 очков.

При системе (1; 0; –1) Равиль теряет по одному очку в каждой партии (по сравнению с системой (2; 1; 0)). Значит, он наберёт 66 – 54 = 12 очков.

Критерии проверки.

• Любое полное верное решение — 7 баллов.

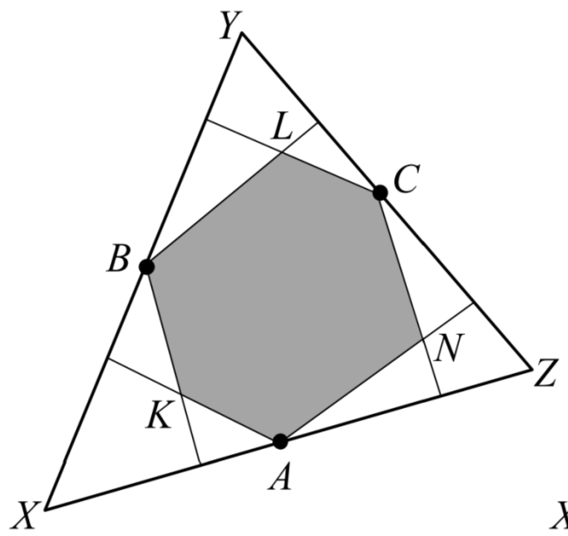
• Верное рассуждение, в котором верный ответ не получен из-за арифметической ошибки, — 5 баллов.

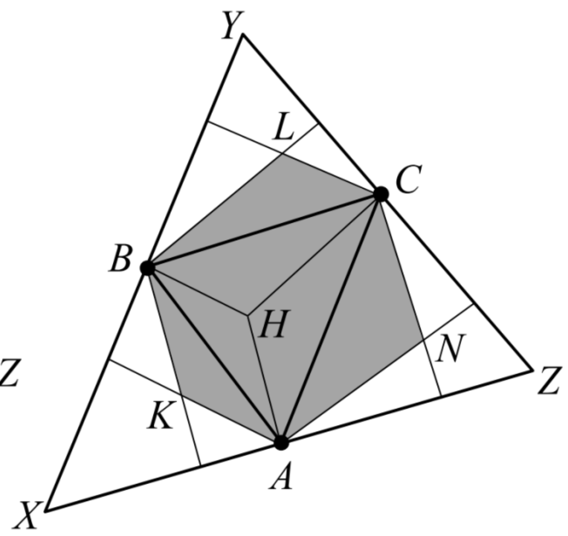
• Рассмотрен частный случай, то есть конкретные значения числа побед, ничьих и поражений, удовлетворяющие условию задачи, и получен верный ответ — 2 балла.

• Приведён только ответ — 0 баллов.

4. На сторонах XZ, XY, YZ остроугольного треугольника ΔXYZ отмечены середины A, B, C. Из каждой середины проведены перпендикуляры к двум другим сторонам. Найдите площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами, если площадь треугольника $S_{XYZ} = 2018$ см^2 .

Решение.





1. Обозначим точки пересечения перпендикуляров — K, L, N.

Площадь искомого шестиугольника равна сумме площадей треугольника ABC и трёх маленьких треугольников, примыкающих к его сторонам: AKB, BLC, CNA.

2. Так как средние линии треугольника XYZ разбивают его на 4 равных треугольника, площадь треугольника ABC равна 2018/4.

3. Проведём в треугольнике ABC отрезки высот до точки их пересечения H. Так как средняя линия BA параллельна стороне YZ, проведённые к ним перпендикуляры CH и AN также параллельны. Рассуждая аналогично, получаем, что AH||CN, и, значит, AHCN — параллелограмм.

4. Диагональ AC разбивает параллелограмм AHCN на два равных треугольника, следовательно, площади треугольников AHC и ANC равны. Точно так же равны площади треугольников AHB и AKB и площади треугольников CHB и CLB.

5. Отсюда получаем, что искомая площадь в два раза больше площади треугольника ABC и равна 2018/2=1009.

Критерии проверки.

• Любое полное верное решение — 7 баллов.

• Равенство всех нужных фигур (и площадей) доказано, но площадь не найдена — 4 балла.

• Приведено верное разбиение шестиугольника на части, но равенство фигур никак не обосновывается, а только утверждается, и получен верный ответ — 3 балла.

• Ответ 1009 без обоснования — 1 балл.

5. Сколько существует натуральных чисел n , для которых $9^n - 17$ является квадратом целого числа?

Ответ. Два.

Решение. Пусть $9^n - 15 = x^2$, причем x – целое число. Очевидно, что $x \neq 0$. Если x – отрицательно,то $(-x)^2$ также равно $9^n - 15$; поэтому дальше будем считать, что $9^n -$

$15 = x^2$, причем x – натуральное. Из равенства $3^{2n} - 15 = x^2$ получаем: $3^{2n} - x^2 = 15$. Тогда: $(3^n + x)(3^n - x) = 17$. Т.к. х – натуральное число, то первый множитель слева в равенстве положителен, но тогда положительным должен быть и второй множитель. Число 17 можно разложить на натуральные множители только одним способом: 17=1·17. При этом, т.к. х > 0, то $3^n + x > 3^n - x$. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^n - x = 1 \\ 3^n + x = 17 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем, что $n = 2, x = 8$.

Можно не ограничиваться при решении натуральными значениями х, но тогда число систем, подлежащих рассмотрению, возрастает, т.к. возможен еще вариант 17=(-1)·(-17).

Критерии проверки.

• Получен верный ответ с полным обоснованием – 7 баллов.

• Не рассмотрены случаи разложения 17 на отрицательные множители без обоснования, почему можно не рассматривать отрицательные – 6 баллов.

• Верно составлена система для определения n, но не проверено, что она имеет натуральное решение – 5 баллов.

• Разумные соображения, не приведшие к решению 1-2 балла.