Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 заданияс кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

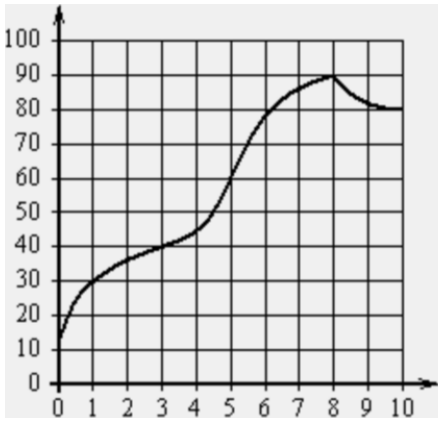
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

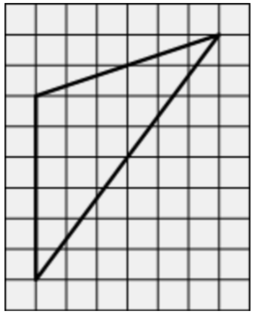
Ответ: ___________________________.

2 На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с первой по восьмую минуту разговора.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

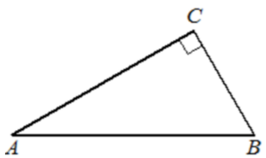
4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(6x-13)^2=(6x-11)^2$.

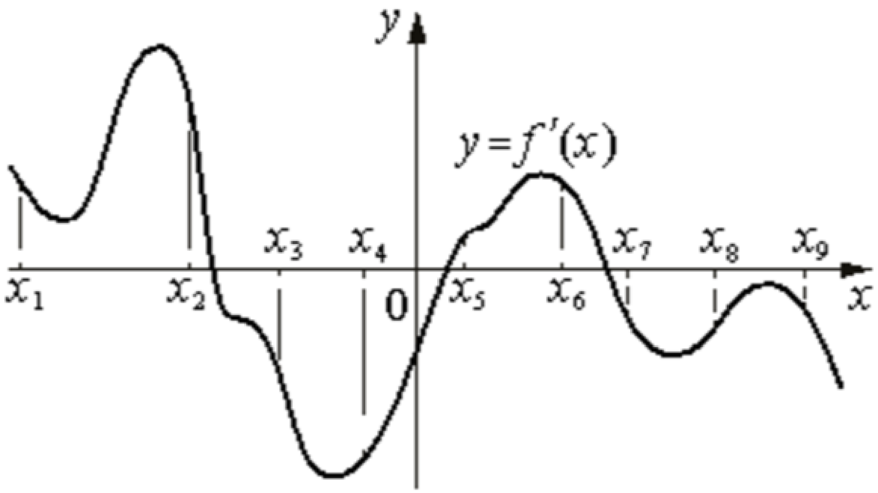
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=10$, $BC=\sqrt{19}$. Найдите $\cos A$.



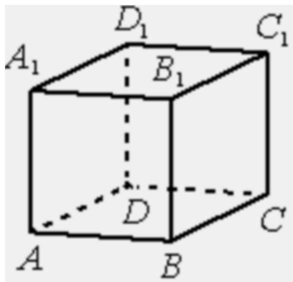
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y=f`(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ: ___________________________.

8 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и D_1C_1. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$(\sqrt{12}-\sqrt{75})\cdot\sqrt{12}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$T(t)=T_0+bt+at^2$,

где t — время (в мин.), $T_0=680$ К, $a=-16\,\frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b=224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт Вобa теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y=69\cos x+71x+48$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x}=9^{2\sin 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1=10$, $AB=12$.

15 Решите неравенство

$\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\geq 0{,}5$.

16 В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.
б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC=3$, $AD=4$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180924

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \le x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \le 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180924

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	9
2	60
3	18
4	0,375
5	2
6	0,9
7	5
8	45
9	-18
10	5
11	9
12	117
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, -\frac{\pi}{6}+2\pi n, -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n \in Z.$ б)$-1{,}5\pi; -0{,}5\pi; -\frac{5\pi}{6}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{13}{5}$
15	$\{0\} \cup (1; 2)$
16	$\frac{2}{9}$
17	80,5 млн
18	$(-2\sqrt{2}; 2]$
19	а) Могло, б) Не могло, в) 18,5

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависитот полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутымответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможныеслучаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записииформы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоватьсябездоказательстваи ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общегообразования.

13 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

а)

$$\left(\frac{1}{9^2}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$$

Отрицательная степень

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(9^{-2})^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$$

Возведение степени в степень

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

$9^{-2\cos x} = 9^{2\sin 2x}$
$-2\cos x = 2\sin 2x$
$-\cos x = \sin 2x$

Синус двойного угла
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$-\cos x = 2\sin x\cdot\cos x$
$2\sin x\cdot\cos x + \cos x = 0$
$\cos x\cdot(2\sin x + 1) = 0$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$	$2\sin x + 1 = 0$ $2\sin x = -1$ $\sin x = -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$
Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -2{,}5\pi \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -1{,}5\pi \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -0{,}5\pi \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = -\frac{5\pi}{6} \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} \notin \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

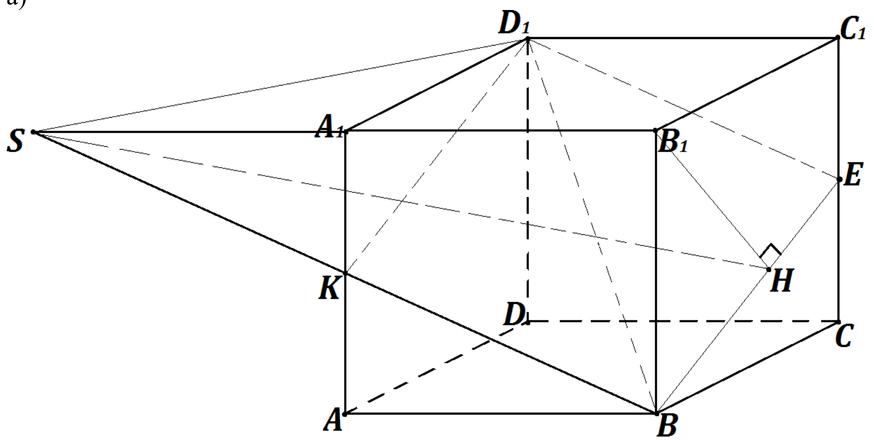
Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-1{,}5\pi; -0{,}5\pi; -\frac{5\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ − квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.
.

Решение:
а)



Построение сечения:
Продлим A_1B_1 на расстояние A_1S, равное A_1B_1
Построим SD_1, т.к. точки S и D_1 лежат в одной плоскости

$SD_1 \parallel A_1C_1$
Построим BS, т.к. точки B и S лежат в одной плоскости
Пусть $BS \cap AA_1 = K$
Построим D_1K, т.к. точки D_1 и K лежат в одной плоскости
Построим прямую D_1E такую, что $D_1E \parallel BK$
Построим BE, т.к. точки B и E лежат в одной плоскости
=>
BKD_1E − ромб

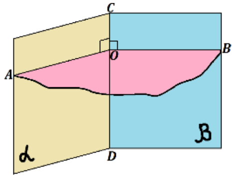
$ABCD$ −прямоугольник
Если мы докажем, что смежные стороны этого прямоугольника равны, то мы докажем, что это квадрат
A_1K − средняя линия треугольника BB_1S (т.к. $A_1K \parallel BB_1$ и $A_1S = A_1B_1$)
=>
$SK = BK$
$\triangle ABK = \triangle A_1SK$ по двум сторонам и углу между ними
$(SK = BK, A_1S = AB, \angle A_1SK = \angle ABK)$
=>
$A_1K = AK$

Выразим каждую из этих сторон по теореме Пифагора:
$A_1K^2 = D_1K^2 - A_1D_1{}^2$
$AK^2 = BK^2 - AB^2$
=>
$D_1K^2 - A_1D_1{}^2 = BK^2 - AB^2$

$D_1K = BK$, т.к. у ромба BKD_1E все стороны равны по определению
=>
$A_1D_1 = AB$
$AD = AB$
=>
$ABCD$ −квадрат
■

б)

Схема нахождения угла между плоскостями

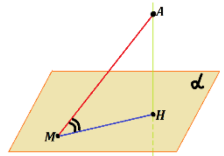


1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)
2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)
3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)
4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB$ − угол между плоскостями α и β)

Плоскость α и плоскость BCC_1 пересекаются по прямой BE, поэтому угол между этими плоскостями – это угол между перпендикулярами к этой общей прямой, проведёнными от каждой из плоскостей

Но мы пока что не знаем точку пересечения этих перпендикуляров

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость (на рисунке $\angle AMH$ − угол между прямой AM и MH (её проекцией на плоскость α))

Проведём высоту B_1H в $\triangle BB_1E$
B_1H − это проекция SH на «правую стену», т.е. на плоскость BCC_1
=>
$\angle SHB_1$ − искомый угол между плоскостью α и плоскостью BCC_1

Найдём B_1H:
Рассмотрим $\triangle BB_1E$
$BE = \sqrt{BC^2 + EC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (по теореме Пифагора)
$S_{BB_1E} = S_{BCC_1B_1} - S_{B_1C_1E} - S_{BCE}$
$$S_{BB_1E} = BC \cdot CC_1 - \frac{B_1C_1 \cdot EC_1}{2} - \frac{BC \cdot CE}{2}$$

$$S_{BB_1E} = 12 \cdot 10 - \frac{12 \cdot 5}{2} - \frac{12 \cdot 5}{2} = 60$$
$$S_{BB_1E} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot B_1H = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot B_1H$$

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot B_1H = 60$$
$$B_1H = \frac{120}{13}$$
$$SB_1 = 2 \cdot A_1B_1 = 2 \cdot 12 = 24$$

Рассмотрим $\triangle SHB_1$ – прямоугольный:
$$\operatorname{tg} \angle SHB_1 = \frac{SB_1}{B_1H} = \frac{24}{1} : \frac{120}{13} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$\angle SHB_1 = \operatorname{arctg} \frac{13}{5}$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{13}{5}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство
$$\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0{,}5.$$

Решение:

Пусть $3^x = t$

$$\frac{13 - 5t}{t^2 - 12t + 27} - \frac{1}{2} \geq 0$$

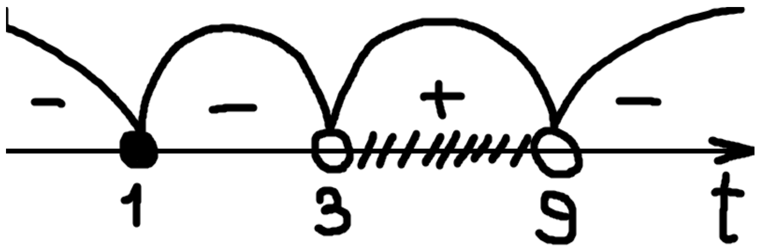
$$\frac{26 - 10t - t^2 + 12t - 27}{2(t^2 - 12t + 27)} \geq 0$$

$$\frac{-t^2 + 2t - 1}{2(t^2 - 12t + 27)} \geq 0$$

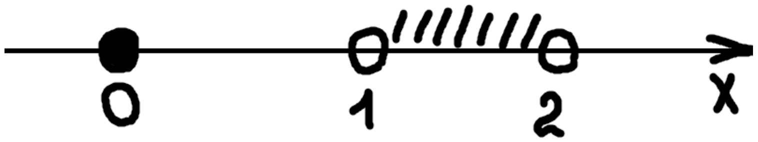
$$\frac{-(t - 1)^2}{2(t^2 - 12t + 27)} \geq 0$$

$t = 1$

$t^2 - 12t + 27 \neq 0$
$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 36$
$t_1 \neq \frac{12 + 6}{2} = 9$
$t_2 \neq \frac{12 - 6}{2} = 3$



$3^x = 1$ $3^x = 3^0$ $x = 0$	$3 < 3^x < 9$ $3^1 < 3^x < 3^2$ $1 < x < 2$



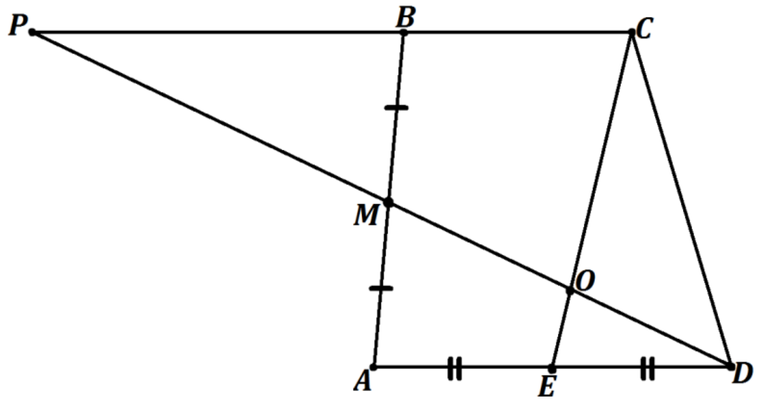
Ответ: $\{0\} \cup (1; 2)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.
б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.
.

Решение:
а)



Докажем, что $S_{AMD} = S_{CED}$ и если они будут равны, то $S_{AMOE} = S_{COD}$

Пусть h — высота, опущенная из вершины C на ED в $\triangle CED$
Тогда $\frac{h}{2}$ — высота, опущенная из вершины M на AD в $\triangle AMD$

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{h}{2} = \frac{AD \cdot h}{4}$$
$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h = \frac{AD \cdot h}{4}$$

$S_{AMD} = S_{CED}$
$S_{AMOE} + S_{DOE} = S_{COD} + S_{DOE}$
=>
$S_{AMOE} = S_{COD}$
■

б)
$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}}$ −?

Проще найти S_{COD}, чем S_{AMOE}

Пусть $DM \cap BC = P$

$\triangle AMD = \triangle PBM$ по стороне и двум прилежащим к ней углам

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180924

$$\begin{pmatrix} BM = AM \\ \angle PMB = \angle AMD - \text{вертикальные} \\ \angle PBM = \angle MAD - \text{накрест лежащие} \end{pmatrix}$$

=>

$PB = AD = 4$

$\triangle COP = \triangle DOE$ по двум углам

$$\begin{pmatrix} \angle POC = \angle DOE - \text{вертикальные} \\ \angle PCO = \angle DEO - \text{накрест лежащие} \end{pmatrix}$$

=>

$$\frac{CO}{EO} = \frac{CP}{DE}$$

$$\frac{CO}{EO} = \frac{BC + PB}{\frac{1}{2} \cdot AD}$$

$$\frac{CO}{EO} = \frac{3 + 4}{\frac{1}{2} \cdot 4}$$

$$\frac{CO}{EO} = \frac{7}{2}$$

Пусть

$EO = 2x$

$CO = 7x$

Тогда

$CE = 9x$

h – высота в $\triangle CED$

$\frac{2}{9}h$ – высота в $\triangle DEO$

$$S_{COD} = S_{CED} - S_{DEO}$$

$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = h$$

$$S_{DEO} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot \frac{2}{9}h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{9}h = \frac{2}{9}h$$

$$S_{COD} = h - \frac{2}{9}h = \frac{7}{9}h$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$$

$$S_{ABCD} = \frac{3 + 4}{2} \cdot h = \frac{7}{2}h$$

$$\frac{S_{COD}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}h : \frac{7}{2}h = \frac{2}{9}$$

$$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{COD}}{S_{ABCD}}$$

=>

$$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{9}$$

Ответ: $\frac{2}{9}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение:

Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100}\cdot 28 = 7$
…			
n	$\frac{28}{n}$	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100}\cdot\frac{28}{n} = \frac{7}{n}$

Очевидно, что наибольший годовой платёж будет в первом году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение n лет)
=>
Наибольший годовой платёж = 9 млн

$$\frac{28}{n} + 7 = 9$$

$$\frac{28}{n} = 2$$

$$n = 14$$

=>
В таблице все значения становятся известными:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{14} = 2$	7
…			
14	2	2	$\frac{7}{14} = 0{,}5$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$$ОСВ = 14\cdot 2 + \frac{7 + 0{,}5}{2}\cdot 14$$

$$ОСВ = 28 + 7{,}5\cdot 7 = 80{,}5$$

Ответ: 80,5 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \le x, \\ 6x > x^2 + a^2, \\ x + a \le 6 \end{cases}$$

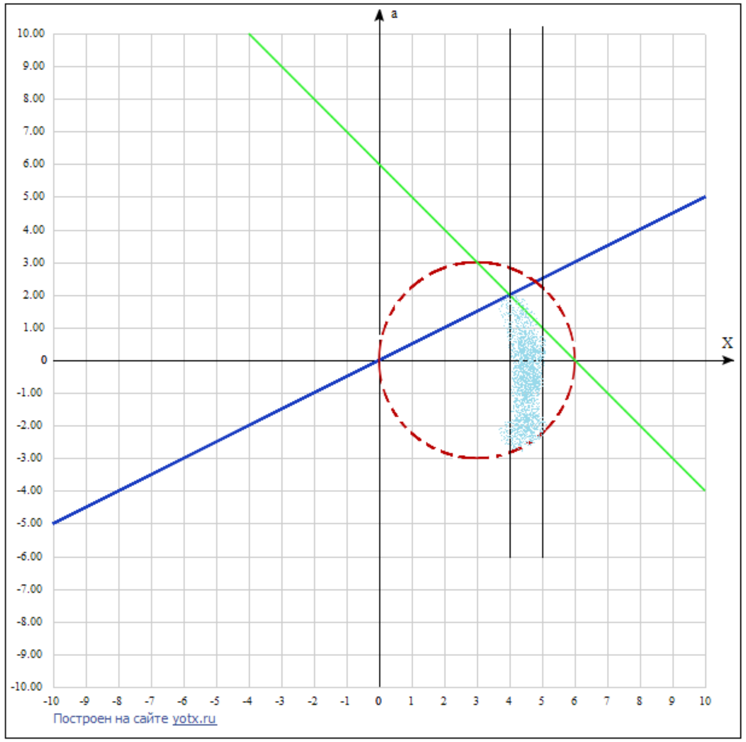
имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

Решение:

$$\begin{cases} a \le \dfrac{x}{2}, \\ x^2 - 6x + 9 - 9 + a^2 < 0, \\ a \le -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le \dfrac{x}{2}, \\ (x-3)^2 + a^2 < 9, \\ a \le -x + 6 \end{cases}$$

Построим все неравенства в системе координат xOa:



Найдём нижнюю точку пересечения окружности и прямой $x = 4$

$6x = x^2 + a^2$

$6 \cdot 4 = 4^2 + a^2$

$24 = 16 + a^2$

$a^2 = 8$

$a = -2\sqrt{2}$

Итак,

Если $a < -2\sqrt{2}$, то решений на отрезке $[4; 5]$ нет

Если $a = -2\sqrt{2}$, то решений на отрезке $[4; 5]$ нет

Если $-2\sqrt{2} < a < 2$, то решения на отрезке $[4; 5]$ есть

Если $a = 2$, то решения на отрезке $[4; 5]$ есть

Если $a > 2$, то решений на отрезке $[4; 5]$ нет

Ответ: $a \in \left(-2\sqrt{2}; 2\right]$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180924

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение:

а)
У нас есть 30 чисел от 1 до 40

Среднее арифметическое равно 7

$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{\text{Суммаэтихчисел}}{30} = 7$$

=>
Сумма этих чисел равна 210

Очевидно, что стёрли только те числа, которые были изначально единичками

Среднее арифметическое было 7, а должно стать больше 14
=>
Проще подобрать такой пример, в котором единичек наибольшее возможное количество

30 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма чисел равна 30, а должна быть 210)

29 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 29 единичек равна 29 и последнее число 181, чего быть не может)

28 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 28 единичек равна 28 и последние два числа в сумме 182, чего быть не может)

27 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 27 единичек равна 27 и последние три числа в сумме 183, чего быть не может)

26 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 26 единичек равна 26 и последние четыре числа в сумме 184, чего быть не может)

25 единичек может быть
(т.к. тогда сумма 25 единичек равна 25 и последние пять чисел в сумме 185, т.е. 5 чисел 37, например)

Пусть на доске написано:
25 чисел 1
5 чисел 37

Первоначальное среднее арифметическое:

$$\frac{25 \cdot 1 + 5 \cdot 37}{30} = 7$$

Среднее арифметическое после изменения чисел:

$$\frac{5 \cdot 18{,}5}{5} = 18{,}5$$

$18{,}5 > 14$
=>
Могло

б)
Пусть
x –количество единичек
S –первоначальная сумма чисел (всех, кроме единичек)
Тогда
$\frac{S}{2}$ –оставшаяся сумма чисел (всех, кроме единичек)

Первоначальное среднее арифметическое:
$$\frac{x \cdot 1 + S}{30} = 7$$
=>
$$x + S = 210$$
$$S = 210 - x$$

Среднее арифметическое после изменения чисел:
$$\frac{\frac{S}{2}}{30 - x} = \frac{S}{60 - 2x}$$

Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

Получаем неравенство:
$$12 < \frac{S}{60 - 2x} < 13$$

$$12 < \frac{210 - x}{60 - 2x} < 13 \qquad \Big| \cdot (60 - 2x)$$

$$720 - 24x < 210 - x < 780 - 26x$$

$$\begin{cases} 720 - 24x < 210 - x \\ 210 - x < 780 - 26x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23x > 510 \\ 25x < 570 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23x > 510 \\ 5x < 114 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 22\frac{4}{23} \\ x < 22{,}8 \end{cases}$$
$$22\frac{4}{23} < x < 22{,}8$$
=>
Целых x, удовлетворяющих неравенству нет
=>
Не могло

в)
Среднее арифметическое после изменения чисел:
$$\frac{S}{60 - 2x} = \frac{210 - x}{60 - 2x} = \frac{30 - x}{60 - 2x} + \frac{180}{60 - 2x} = \frac{1}{2} + \frac{90}{30 - x}$$

Чтобы найти наибольшее значение этого числа, нужно подставить наибольшее возможное значение x

В пункте а) мы доказали, что максимально возможное число пятёрок – это 25, т.е. $x = 25$

Тогда
$$\frac{1}{2} + \frac{90}{30 - x} = \frac{1}{2} + \frac{90}{30 - 25} = 0{,}5 + 18 = 18{,}5$$
(такой же результат, как и в пункте а)

Ответ: а) Могло, б) Не могло, в) 18,5

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

перечисленных выше	
Максимальный балл	4