

Задание 13.

а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos x = \sin 2x - 1$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 2,5\pi]$

Задание 14.

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На одном из оснований отмечены точки A и B , а на другом B_1 и C_1 так, что BB_1 - образующая, а прямая AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 - прямой

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $BB_1 = 8$, $B_1C_1 = 6$, $AB = 15$

Задание 15.

Решите неравенство

$$\log_7 (11x^2 + 10) - \log_7 (x^2 + x + 1) \leq \log_7 \left(\frac{x}{x+8} + 10 \right)$$

Задание 16.

Окружность высекает на сторонах трапеции равные по величине хорды.

а) Докажите, что биссектрисы углов трапеции пересекаются в одной точке

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L , причем $AK = 15$, $KL = 6$, $LB = 5$

Задание 17.

В банке планируется взять кредит на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-ого числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с предыдущим годом

- с 2-ого по 14-ое число каждого необходимо выплатить часть долга

- на 15-ое число каждого месяца с 1-ый по 30-ый долг становится меньше на 20 тысяч рублей по сравнению с предыдущим месяцем

- в 31-ый месяц долг полностью погашается.

Какова была величина долга на 30-ый месяц, если суммарная величина выплат после полного погашения кредита равна 1348 тысяч рублей?

Задание 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x + ay - 5)(x + ay - 5a) = 0, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Задание 19.

Ученики школ №1 и №2 написали контрольную работу. Они получили натуральное количество баллов за тест. В каждой из школ тест писали хотя бы 2 ученика, всего их было 30. В итоге оказалось, что средние баллы учеников в каждой из школ оказались целыми числами. Затем один из учеников перевелся в другую школу, после чего средние баллы были заново подсчитаны.

- а) Могло ли оказаться так, что средний балл понизился ровно 4 раза?
- б) В школе №1 средний балл понизился на 4 %, в школе №2 средний балл также понизился на 4 %. Могло ли оказаться так, что изначальный средний балл в школе был равен 8?
- в) В школе №1 средний балл понизился на 4 %, в школе №2 средний балл также понизился на 4 %. Найдите наименьшее возможное изначальное значение среднего балла учеников в школе №2.

13. а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = \cos x - 2\sqrt{3}.$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14. На одном из оснований цилиндра отмечены три точки A, B, C . Угол $ACB = 45^\circ$, AC – диаметр, CC_1 – образующая. $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{6}$.

А) Доказать, что угол между BC и AC_1 равен 60° .

Б) Найти расстояние от B до прямой AC_1 .

15. Решите неравенство

$$\log_2 \left(\frac{3}{x} + 2 \right) - \log_2(x + 3) \leq \log_2 \left(\frac{x + 3}{x} \right).$$

16. Окружность проходит через точки A, B, C параллелограмма $ABCD$. Пересекает продолжение стороны AD в точке E и CD в точке K .

а) Доказать, что $BE = BK$.

б) Найдите $KE : AC$, если угол $BAD = 30^\circ$.

17. 15 декабря планируется взять кредит на сумму 1 млн. руб. на некоторое целое число $n + 1$ месяцев. Условия его возырата таковы:

– 1-го числа начисляется процент к остатку на 15 число прошлого месяца (2 процента);

– с 2 по 14 происходит выплата;

– 15 числа остаток меньше предыдущего месяца на одну и ту же сумму;

– 15 числа n -го месяца остаток 100 тыс. рублей;

– 15 числа $n + 1$ остаток 0;

Общая сумма выплат равна 1341 тыс. руб., найти n .

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a + 3)x^2 + 2ax + a - 3, \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

имеет четыре различных решения?

19. На доске написаны 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших – 13.

- а) Могло ли наименьшее число быть равно 4?
- б) Могло ли среднее арифметическое всех чисел равняться 10,2?
- в) Найти наибольшее значение среднего арифметического.