Задача 1

На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 27 руб. за литр. Клиент получил 82 руб. сдачи. Сколько литров бензина было залито в бак?

Ответ

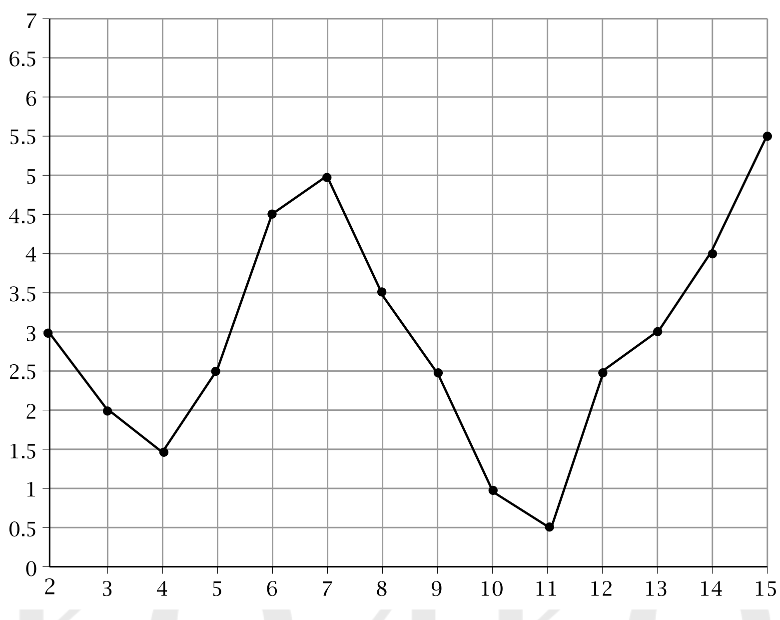
34

Решение

Если клиент отдал 1000 руб. и получил сдачи 82 руб., то на бензин он потратил $1000-82=918$ руб. Так как литр бензина стоит 27 руб., то клиент купил $918:27=34$ литра.

Задача 2

На рисунке жирными точками показана средняя температура за день в городе Кирове со 2 по 15 марта. По горизонтали указывается день месяца, по вертикали – средняя температура в соответствующий день в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в период со 2 по 15 марта средняя температура за день впервые опустилась до 0,5 градусов Цельсия?



Ответ

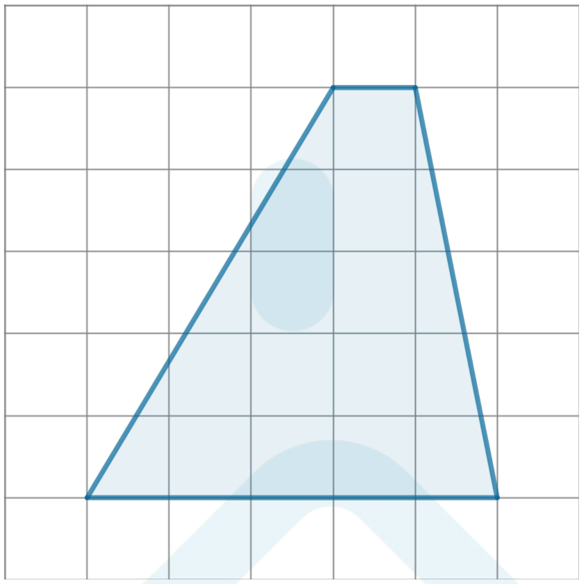
11

Решение

По рисунку видно, что средняя температура впервые опустилась до 0,5 градусов Цельсия 11 числа.

Задача 3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите среднюю линию этой трапеции.



Ответ

3

Решение

Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, а из рисунка видно, что основания трапеции равны 1 и 5, то средняя линия равна $(1+5):2=3$.

Задача 4

На конференцию приехали 3 ученых из России, 5 ученых из Швеции и 2 ученых из Италии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад ученого из России.

Ответ

0,3

Решение

Вероятность того, что ученый из России будет выступать 10-ым, такая же, как вероятность того, что он будет выступать 1-ым, 2-ым и т.п.

Всего на конференцию приехало 10 ученых. Следовательно, вероятность того, что десятым будет выступать ученый из России, равна

$$\frac{3}{10} = 0,3$$

Задача 5

Найдите корень уравнения $\sqrt{59 - x} = 8$.

Ответ

-5

Решение

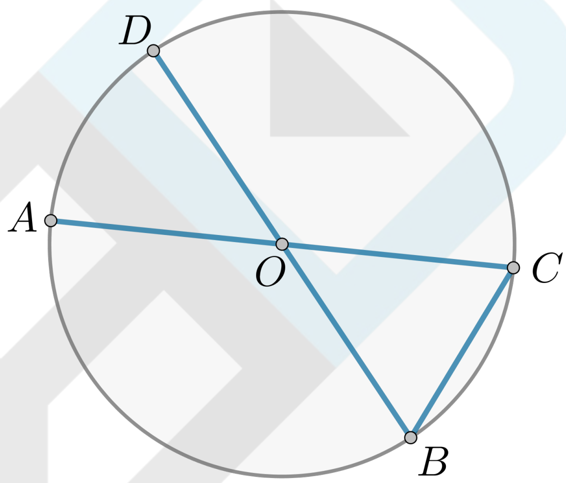
ОДЗ уравнения: $59 - x \geqslant 0$. Решим на ОДЗ. Возведем в квадрат:

$$59 - x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = -5$$

Данный корень подходит под ОДЗ.

Задача 6

Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен 46°. Найдите вписанный угол DBC. Ответ дайте в градусах.



Ответ

67

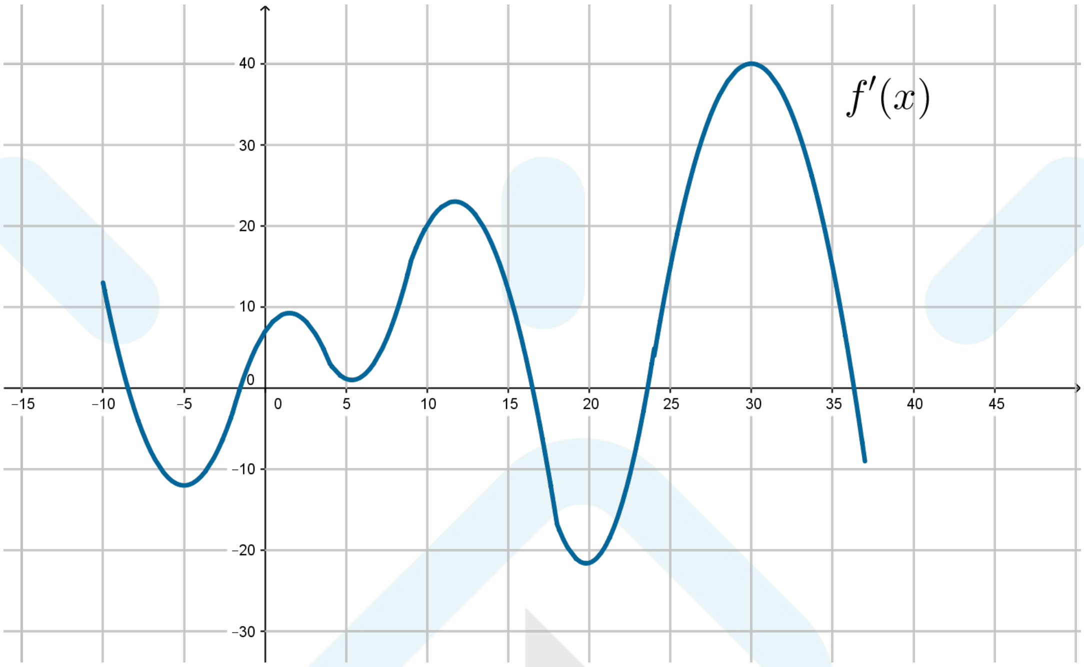
Решение

Так как AC – диаметр, то дуга ADC равна 180°. Так как $\angle AOD = 46^\circ$ и является центральным, то меньшая дуга AD равна 46°. Следовательно, меньшая дуга DC равна $180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$.

Так как $\angle DBC$ опирается на эту дугу и является вписанным, то он равен ее половине, следовательно, $\angle DBC = 67^\circ$.

Задача 7

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-10; 37]$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 35]$.

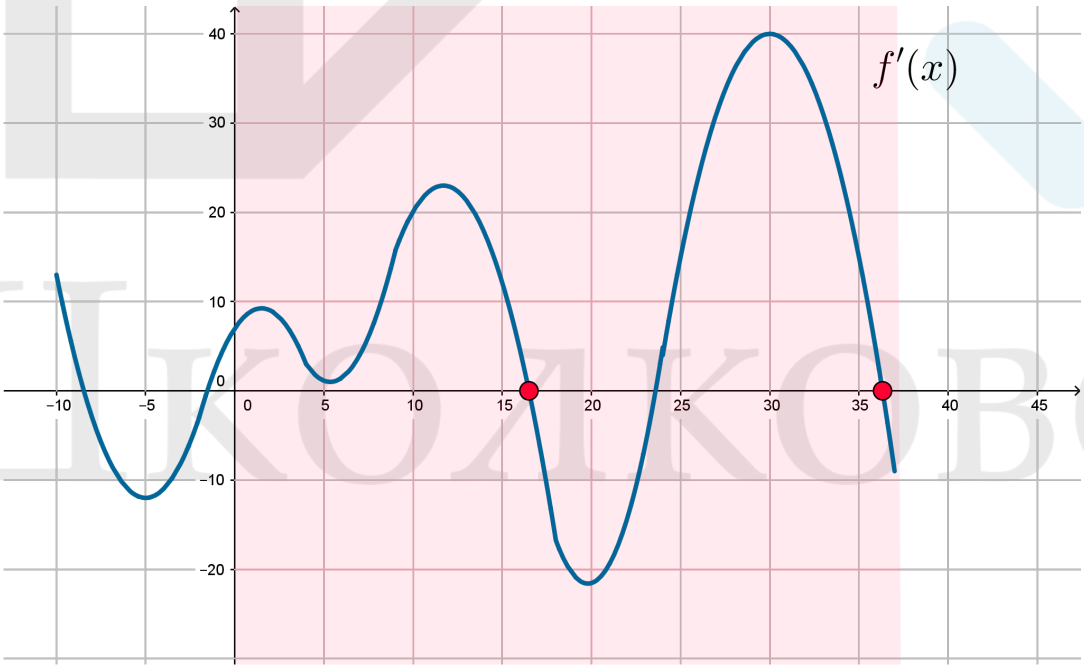


Ответ

1

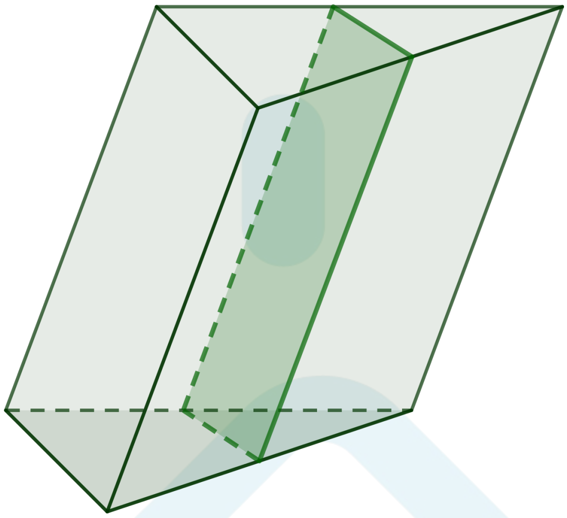
Решение

Точка максимума – значение x, в котором производная меняет свой знак с "+" на "−". Следовательно, в этой точке ее график пересекает ось абсцисс "сверху вниз" (если двигаться по рисунку слева направо). Отметим отрезок $[0; 37]$ и увидим, что таких точек 2:



Задача 8

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 36, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



Ответ

9

Решение

Объем треугольной призмы равен произведению площади основания на высоту: $V = S \cdot h$.

Так как в основании проведена средняя линия, то она отсекает от него треугольник, который подобен основанию с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно, его площадь составляет $\frac{1}{4}$ площади основания исходной призмы. Таким образом, объем новой треугольной призмы составляет $\frac{1}{4}$ от объема исходной призмы, то есть равен 9.

Задача 9

Найдите значение выражения $3^{\frac{7}{9}} \cdot 81^{\frac{5}{9}}$.

Ответ

27

Решение

Так как $81 = 3^4$, то значение выражения равно $3^{\frac{7}{9}} \cdot 3^{\frac{20}{9}} = 3^{\frac{7}{9}+\frac{20}{9}} = 3^3 = 27$.

Задача 10

К источнику с ЭДС $\varepsilon = 75$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,4$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой

$$U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$$

При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 60 В? Ответ выразите в омах.

Ответ

1,6

Решение

Подставляя значения в формулу и учитывая, что напряжение не менее 60 В, получим:

$$\frac{75R}{R+0,4} \geqslant 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{15R-24}{R+0,4} \geqslant 0$$

Так как сопротивление $R > 0$, то неравенство равносильно $15R - 24 \geqslant 0$, откуда $R \geqslant 1,6$. Следовательно, наименьшее сопротивление нагрузки равно $1,6$ Ом.

Задача 11

Первая труба пропускает на 10 литров воды в минуту больше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 144 литра она заполняет на 10 минут быстрее, чем вторая труба?

Ответ

18

Решение

Пусть производительность второй трубы равна x (литров воды в минуту), тогда производительность первой равна $x + 10$. Так как первая заполняет на 10 минут быстрее резервуар, то разность времен работы второй и первой труб равна 10 минутам:

$$\frac{144}{x} - \frac{144}{x+10} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{144x + 1440 - 144x}{x(x+10)} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{144}{x(x+10)} = 1$$

Так как $x(x+10) \neq 0$, то уравнение можно переписать в виде

$$144 = x(x+10) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 10x - 144 = 0$$

Дискриминант равен $D = 676 = 26^2$, откуда подходящий нам корень уравнения – это $x = \dfrac{-10+26}{2} = 8$. Тогда производительность первой трубы равна 18.

Задача 12

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(x+5)^9$ на отрезке $[-4,5; 0]$.

Ответ

-36

Решение

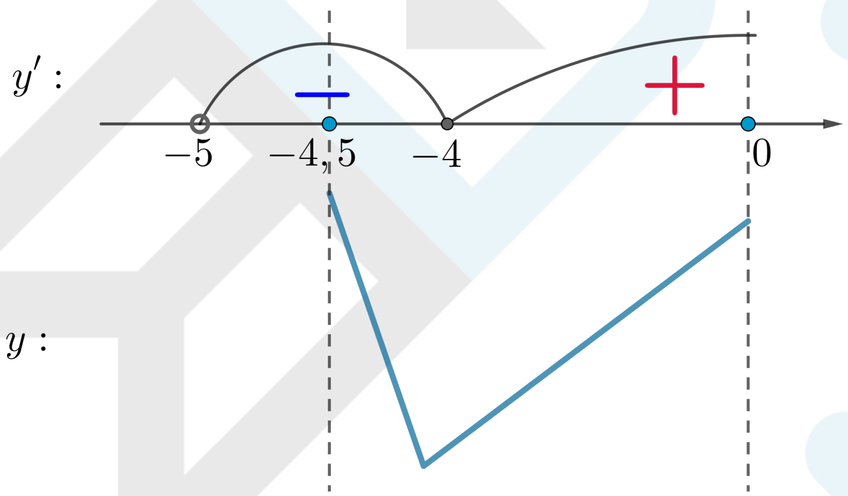
Функция определена при $x > -5$.

Для того, чтобы найти наименьшее значение функции на отрезке, нужно изобразить схематично ее график.

1) Найдем производную: $y' = 9 - \dfrac{1}{(x+5)^9} \cdot 9(x+5)^8 = 9 - \dfrac{9}{x+5}$.

2) Найдем нули производной: $9 - \dfrac{9}{x+5} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$.

3) Найдем знаки производной на получившихся промежутках и изобразим схематично график:



Таким образом, наименьшее значения функция принимает в точке $x = -4$:

$$y(-4) = -9 \cdot 4 - \ln(-4+5)^9 = -36$$

Задача 13

а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x-1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{11\pi}{2};-\dfrac{16\pi}{3};-\dfrac{14\pi}{3};-\dfrac{9\pi}{2}$

Решение

а) Воспользуемся формулой $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$:

$$\cos x+\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x\right)=\sin 2x-1\quad\Rightarrow$$

$$\cos x+\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin 2x-1\quad\Rightarrow$$

$$\cos x+\sin 2x+\cos 2x-\sin 2x+1=0\quad\Rightarrow$$

$$\cos x+(2\cos^2 x-1)+1=0\quad\Rightarrow\quad 2\cos^2 x+\cos x=0\quad\Rightarrow$$

$$\cos x(2\cos x+1)=0$$

Таким образом, либо $\cos x=0$, либо $2\cos x+1=0$, откуда получаем серии решений:

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$

б) Отберем корни.

$-\dfrac{11\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+\pi k\leqslant-4\pi\quad\Rightarrow\quad -6\leqslant k\leqslant-4,5\quad\Rightarrow\quad k=-6;-5\quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{11\pi}{2};-\dfrac{9\pi}{2}$

$-\dfrac{11\pi}{2}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant-4\pi\quad\Rightarrow\quad -\dfrac{37}{12}\leqslant n\leqslant-\dfrac{7}{3}\quad\Rightarrow\quad n=-3\quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{16\pi}{3}$

$-\dfrac{11\pi}{2}\leqslant-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant-4\pi\quad\Rightarrow\quad -\dfrac{29}{12}\leqslant n\leqslant-\dfrac{5}{3}\quad\Rightarrow\quad n=-2\quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{14\pi}{3}$

Задача 14

В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B. На окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BB_1, если $AB = 12, B_1C_1 = 9, BB_1 = 8$.

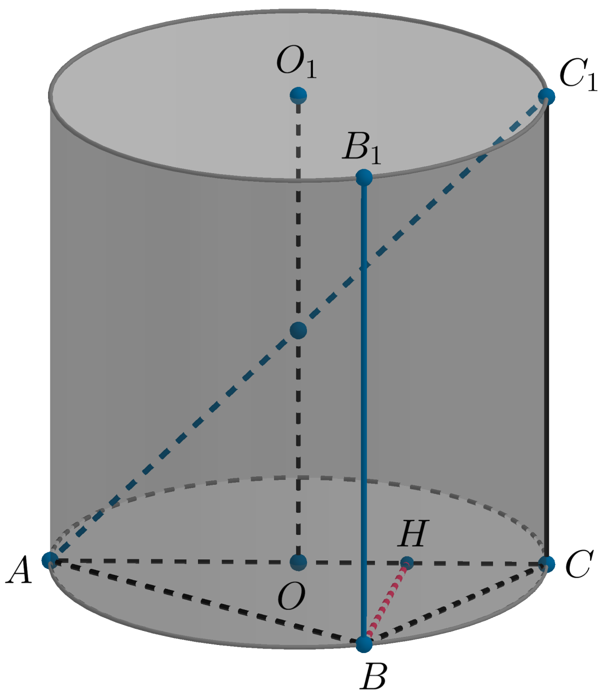
Ответ

б) 7,2

Решение

а) Пусть C – проекция точки C_1 на плоскость нижнего основания. Так как AC_1 пересекает ось OO_1 цилиндра, то она лежит с ней в одной плоскости, то есть AC_1 лежит в плоскости осевого сечения цилиндра, следовательно, AC – диаметр нижнего основания.

Так как $B_1C_1 \parallel (ABC)$, то $\angle(AB, B_1C_1) = \angle(AB, BC)$. Так как AC – диаметр, то $\angle ABC$ вписанный, опирающийся на диаметр, следовательно, $\angle ABC = 90°$. Чтд.



б) Заметим, что прямые BB_1 и AC_1 являются скрещивающимися, так как $BB_1 \parallel (ACC_1)$, а $AC_1 \in (ACC_1)$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми в таком случае равно расстоянию от любой точки прямой BB_1 до плоскости (ACC_1). Проведем $BH \perp AC$. Так как $OO_1 \perp (ABC)$, следовательно, $OO_1 \perp BH$. Таким образом, мы имеем две прямые в плоскости ACC_1, которым перпендикулярна BH. Значит, BH – расстояние от точки B до плоскости ACC_1, то есть искомое расстояние.

Так как $B_1C_1 = 9$ и $B_1C_1 \parallel BC$, причем BC – проекция B_1C_1 на плоскость нижнего основания, то $BC = 9$.
Отсюда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 15$. Тогда из $S_{ABC} = 0,5AC \cdot BH = 0,5AB \cdot BC$ получаем:

$$BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = 7,2$$

Задача 15

Решите неравенство

$$\log_7(11x^2 + 10) - \log_7(x^2 + x + 1) \geqslant \log_7\left(\frac{x}{x+8} + 10\right)$$

Ответ

$[-27; -8) \cup \left(-\frac{80}{11}; 0\right]$

Решение

Ограничения на x для логарифмов:

$$\begin{cases} 11x^2 + 10 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \\ \dfrac{x}{x+8} + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \text{ так как } x^2 \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{R}, \text{ так как } D < 0 \text{ и коэффициент при } x^2 \text{ больше } 0 \\ x \in (-\infty; -8) \cup \left(-\dfrac{80}{11}; +\infty\right) \end{cases}$$

Решим неравенство при этих ограничениях.
Воспользуемся формулами $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ и $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$:

$$\log_7(11x^2 + 10) - \log_7(x^2 + x + 1) \geqslant \log_7(x + 10x + 80) - \log_7(x + 8) \quad \Rightarrow$$

$$\log_7(11x^2 + 10) + \log_7(x + 8) \geqslant \log_7(11x + 80) + \log_7(x^2 + x + 1) \quad \Rightarrow$$

$$\log_7\left((11x^2 + 10)(x + 8)\right) \geqslant \log_7\left((x^2 + x + 1)(11x + 80)\right) \quad \Rightarrow$$

$$(11x^2 + 10)(x + 8) \geqslant (x^2 + x + 1)(11x + 80) \quad (\text{так как основания логарифмов больше } 1)$$

$$3x^2 + 81x \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \in [-27; 0]$$

Учитывая ограничения на x, получим окончательный ответ:

$$[-27; -8) \cup \left(-\frac{80}{11}; 0\right]$$

Задача 16

Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$. Эта окружность пересекает BC в точке E, а CD в точке K.

а) Докажите, что отрезки AE и AK равны.

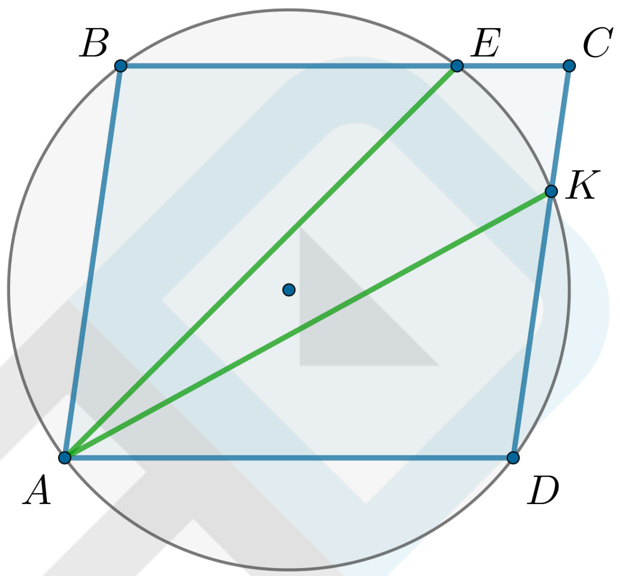
б) Найдите AD, если известно, что $EC = 48$, $DK = 20$, а косинус угла BAD равен $0,4$.

Ответ

б) 50

Решение

а)



Так как противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle ABE = \angle ADK$. Так как равные вписанные углы опираются на равные дуги и на равные хорды, то $AE = AK$, чтд.

б) Введем обозначения: $AD = x$, $CK = y$. Проведем отрезок ED. Тогда $ABED$ – трапеция, причем, так как она вписана в окружность, она равнобедренная. Следовательно, $ED = y + 20$.

Запишем теорему косинусов для $\triangle ECD$:

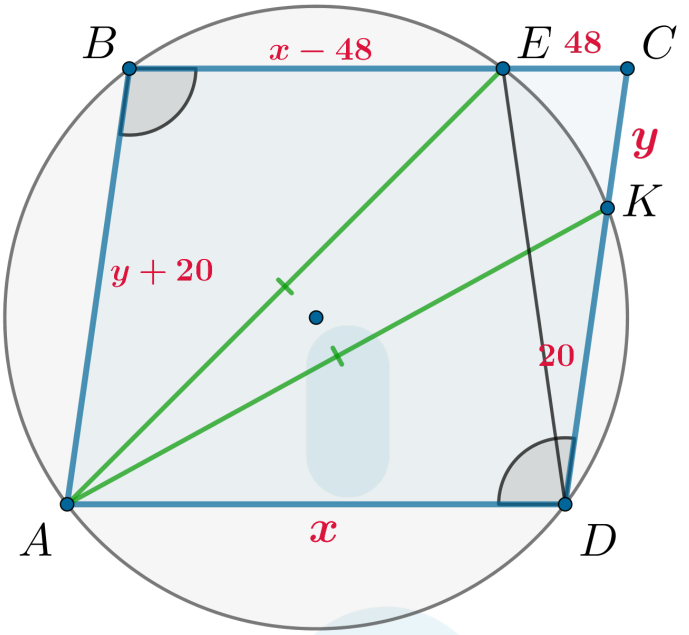
$$(y+20)^2 = 48^2 + (y+20)^2 - 2 \cdot 48 \cdot (y+20) \cdot 0,4 \quad \Rightarrow \quad y = 40$$

Следовательно, $AB = 60$.

Так как $\angle B + \angle C = 180^\circ$ по свойству параллелограмма, то их косинусы противоположны, следовательно, $\cos\angle B = -0,4$.

Так как $AE = AK$, то найдем AE^2 и AK^2 по теореме косинусов из $\triangle ABE$ и $\triangle ADK$ и приравняем:

$$60^2 + (x-48)^2 - 2 \cdot 60 \cdot (x-48) \cdot (-0,4) = x^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cdot (-0,4) \quad \Rightarrow \quad x = 50$$



Следовательно, $AD = 50$.

Задача 17

15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— на 15-ое число каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен должен быть на 20 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 31-го месяца долг должен быть погашен полностью.
Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 30-ого месяца, если банку всего было выплачено 1348 тыс. рублей?

Ответ

500

Решение

Пусть в банке взято A тыс. рублей. Заметим, что фраза “на 15 число каждого с 1 по 30 месяц долг должен уменьшаться на 20 тыс. руб.” означает, что с 1 по 30 месяц долг выплачивался дифференцированными платежами, то есть сначала гасились начисленные проценты, а затем вносилась одна и та же сумма, равная 20 тыс. рублей, вследствие чего после платежей с 1 по 30 месяц долг менялся так:
$A-20 \ \to \ A-2\cdot 20 \ \to \ A-3\cdot 20 \ \to \dots \ \to \ A-30\cdot 20.$
Так как в 31 месяце долг должен быть погашен полностью, то это значит, что платеж в 31 месяце будет равен оставшемуся долгу (после начисления процентов).

Составим таблицу, в которой все будет выглядеть более наглядно:

Месяц	Долг до %	Долг после %	Выплата	Долг после выплаты
1	A	$A+0,01A$	$0,01A+20$	$A-20$
2	$A-20$	$(A-20)+0,01(A-20)$	$0,01(A-20)+20$	$A-40$
3	$A-40$	$(A-40)+0,01(A-40)$	$0,01(A-40)+20$	$A-60$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
30	$A-580$	$(A-580)+0,01(A-580)$	$0,01(A-580)+20$	$A-600$
31	$A-600$	$1,01(A-600)$	$1,01(A-600)$	0

Исходя из условия задачи, нужно найти $A-600$. Для этого нужно найти A. Так как всего было выплачено банку 1348 тыс. рублей, то сумма всех выплат равна 1348 тыс. рублей:

$$(0,01A+20)+(0,01(A-20)+20)+(0,01(A-40)+20)+\dots+(0,01(A-580)+20)+(1,01(A-600))=1348$$

Так как первые 30 платежей дифференцированные, то они образуют арифметическую прогрессию (заметьте, их разность равна $-0,01\cdot 20$). Таким образом, первые 30 слагаемых можно просуммировать, воспользовавшись формулой $S_{30}=\dfrac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30$:

$$\frac{0,01A+20+0,01(A-580)+20}{2}\cdot 30+1,01(A-600)=1348$$

$$(0,01A+20-0,01\cdot 290)\cdot 30+1,01A-606=1348$$

$$0,3A+600-87+1,01A-606=1348$$

$$A=\frac{1441}{1,31}=1100$$

Таким образом, ответ: $A-600=500$.

Задача 18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-2a-2)^2+(y-a)^2=1 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Ответ

$a\in\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3};-1\right)\cup(-1;-0,6)\cup\left(-0,6;-2+\sqrt{2}\right)$

Решение

Второе уравнение системы можно переписать в виде $y=\pm x$. Следовательно, рассмотрим два случая: когда $y=x$ и когда $y=-x$. Тогда количество решений системы будет равно сумме количества решений в первом и во втором случаях.

1) $y=x$. Подставим в первое уравнение и получим:

$$2x^2-2(3a+2)x+(2a+2)^2+a^2-1=0 \quad (1)$$

(заметим, что в случае $y=-x$ мы поступим так же и тоже получим квадратное уравнение)

Чтобы исходная система имела 4 различных решения, нужно, чтобы в каждом из двух случаев получилось по 2 решения.

Квадратное уравнение имеет два корня, когда его $D>0$. Найдем дискриминант уравнения (1):

$D=-4(a^2+4a+2)$.

Дискриминант больше нуля: $a^2+4a+2<0$, откуда $a\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$.

2) $y=-x$. Получаем квадратное уравнение:

$$2x^2-2(a+2)x+(2a+2)^2+a^2-1=0 \quad (2)$$

Дискриминант больше нуля: $D=-4(9a^2+12a+2)>0$, откуда $a\in\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3};\frac{-2+\sqrt{2}}{3}\right)$.

Необходимо проверить, не совпадают ли решения в первом случае с решениями во втором случае.

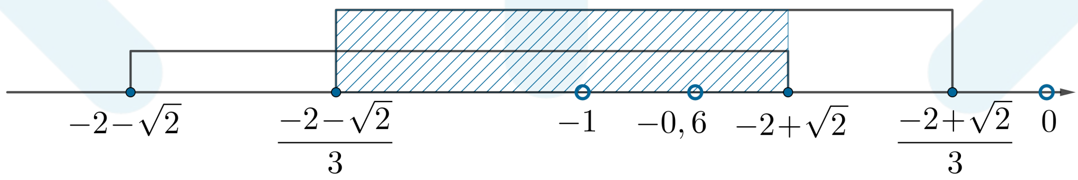
Пусть x_0 – общее решение уравнений (1) и (2), тогда

$$2x_0^2-2(3a+2)x_0+(2a+2)^2+a^2-1=2x_0^2-2(a+2)x_0+(2a+2)^2+a^2-1$$

Отсюда получаем, что либо $x_0=0$, либо $a=0$.

Если $a = 0$, то уравнения (1) и (2) получаются одинаковыми, следовательно, имеют одинаковые корни. Этот случай нам не подходит.
Если $x_0 = 0$ – их общий корень, то тогда $2x_0^2 - 2(3a+2)x_0 + (2a+2)^2 + a^2 - 1 = 0$, откуда $(2a+2)^2 + a^2 - 1 = 0$, откуда $a = -1$ или $a = -0,6$. Тогда вся исходная система будет иметь 3 различных решения, что нам не подходит.

Учитывая все это, в ответ пойдут:



$$a \in \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup (-1; -0,6) \cup \left(-0,6; -2+\sqrt{2}\right)$$