Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку

13.1 $\cos x + 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1=\sqrt{3}\sin 2x$ $\left[4\pi;\frac{11\pi}{2}\right]$

13.2 $\sqrt{6}\sin x + 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sqrt{3}$ $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$

13.3 $\sqrt{6}\cos x + 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=\sin 2x$ $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$

13.4 $\cos x + \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin 2x$ $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$

13.5 $\sin x + 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$ $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$

13.6 $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$ $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

13.7 $\cos^2 x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$

13.8 $4\sin^3 x=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$

13.9 $2\cos^3 x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$

13.10 $4\cos^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x=0$ $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$

13.11 $2\sin^3\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos x=0$ $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

14.

14.1 В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B, на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

А) Докажите, что прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны

Б) Найдите угол между прямой AC_1 и BB_1, если AB=6, B_1C_1=8, BB_1=15

Разновидности:

Найдите площадь боковой поверхности цилиндра,

Найдите площадь полной поверхности цилиндра,

Найдите объем цилиндра,

Найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC_1

14.2 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причем CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно что $\angle ACB = 30^0, AB=\sqrt{2}, CC_1=2$

А) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45^0

Б) Найдите объем цилиндра.

14.3 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6

А) Докажите, чт о угол между прямыми AC и BD_1 равен 90^0

Б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1

14.4 В правильной пирамиде SABC точки M и N – середины ребер AB и BC соответственно. На боковом ребре SA отмечена точка K. Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырехугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q.

А) Докажите, что точка Q лежит на высоте пирамиды

Б) Найдите QP, если AB=SK=6 и SA=8

Разновидности:

Найдите объем пирамиды QMNB, если AB=12, SA=10, SK=2

Найдите угол между плоскостями MNK и ABC, если AB=6, SA=12, SK=3

Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNK, если AB=12, SA=15, SK=6

15. Решите неравенство

15.1 $\log_2(x-1)+\log_2\left(x^2+\frac{1}{x-1}\right)\le 2\log_2\frac{x^2+x-1}{2}$

15.2 $2\log_2\left(x\sqrt{3}\right)-\log_2\frac{x}{x+1}\ge\log_2\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)$

15.3 $2\log_2 x+\log_2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\le 2\log_2\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$

15.4 $\log_2(x-1)+\log_2\left(2x+\frac{4}{x-1}\right)\ge 2\log_2\frac{3x-1}{2}$

15.5 $\log_7(2x^2+12)-\log_7(x^2-x+12)\ge\log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$

15.6 $\log_5(3x+1)+\log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\ge\log\left(\frac{1}{24x}+1\right)$

15.7 $2\log_2(1-2x)-\log_2\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_2\left(4x^2+6x-1\right)$

15.8 $\log_5\left(3x^2-2\right)-\log_5 x<\log_5\left(3x^2+\frac{1}{x}-3\right)$

15.9 $\log_5(4-x)+\log_5\frac{1}{x}\le\log_5\left(\frac{1}{x}-x+3\right)$

15.10 $\log_2(3-2x)+2\log_2\frac{1}{x}\le\log_2\left(\frac{1}{x^2}-2x+2\right)$

15.11 $\log_7(3-x)+\log_7\frac{1}{x}\ge\log_7\left(\frac{1}{x}-x+2\right)$

15.12 $2\log_3(1-2x)-\log_3\left(\frac{1}{x}-2\right)\le\log_3\left(4x^2+6x-1\right)$

16.

16.1 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону BC в точках B и Mи пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.
А) Докажите, что AM=AN

Б) Найдите отношение CD:DN, если AB:BC=1:3, а $\cos\angle BAD=\frac{2}{5}$.

16.2 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции ABCD. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что AB=10, BC=9, CD=30, AD=39.
А) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям
Б) Найдите O_1O_2

16.3 Четырехугольник ABCD вписан в окружность радиуса $R=8$. Известно, что $AB=BC=CD=12$.
А) Докажите, что прямые BC и AD параллельны
Б) Найдите AD.

16.4 В трапеции ABCD с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.
А) Докажите, что AB=CD
Б) Найдите AD, если AB=2, BC=7

16.5 Окружность высекает на сторонах трапеции ABCD с основаниями AD и BC равные отрезки. Эта окружность пересекает боковую сторону AB в точках К и L.
А) Докажите, что биссектрисы углов трапеции пересекаются в центре этой окружности
Б) Найдите высоту трапеции, если длины отрезков АК=6, AL=10, BL=2

16.6 На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AP и CQ соответственно.
А) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, проходит через середину отрезка PQ.
Б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $AB=AC=BC=3\sqrt{2}$, $CQ=AP=\sqrt{2}$

17.

17.1

15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц.
Условия его возврата таковы:
- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- на 15 число каждого с 1 по 20 месяц долг должен уменьшаться на 50 тыс.руб.;
- за двадцать первый месяц долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 2073 тыс. рублей?

17.2

15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц.
Условия его возврата таковы:
- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- на 15 число каждого с 1 по 20 месяц долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

17.3

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $n+1$ месяц.
Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по $n-$й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца
-15-го числа $n-$ го месяца долг составит 200 тысяч рублей
- к 15-му числу $n+1$ - го месяца кредит должен быть полностью погашен

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

17.4

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 300 тысяч рублей на 21 месяц.
Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца
-15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей
- к 15-му числу 21 - го месяца кредит должен быть полностью погашен

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

18.

18.1 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

18.2 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

18.3 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} y = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

18.4 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

18.5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень

$$\sqrt{x + 2a - 1} + \sqrt{x - a} = 1$$

19.

19.1

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 81 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов.

Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой школе.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе №1 вырос на 20%, средний балл в школе №2 также вырос на 20%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?

в) Средний балл в школе №1 вырос на 20%, средний балл в школе №2 также вырос на 20%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2?

19.2 На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 15.

А) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

Б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

В) Пусть B - шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения S-B.

19.3 а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел *m* и *n*, для которых $m \le n$ и $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$