Министерство коррупции Российской Федерации,
Лондонское королевское общество российских олигархов, Госдеп США, Госдолг США,
Министерство развала образования и науки России

с божьей помощью представляют:

Лучшее методическое пособие для подготовки к математическим олимпиадам!

Издание третье, исправленное и дополненное

Данная книга создана для школьников и их родителей. Её цель – показать пользу от участия в олимпиадах из перечня Минобрнауки

Черкесск – 2018, май месяц

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ТЕРМИНЫ 4

ЗАЧЕМ УЧАСТВОВАТЬ В ОЛИМПИАДАХ? 6

ЭТО ИНТЕРЕСНО 11

РАЗРУШАЕМ МИФЫ 29

КАК ГОТОВИТЬСЯ К ОЛИМПИАДАМ? 30

РЕКЛАМА «КНИГИ» ПРО ОММО И ЧТО ДЕЛАТЬ ДАЛЬШЕ 32

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 34

ВВЕДЕНИЕ

Здравствуйте, дорогие случайные читатели!

Я – *Джендубаев Эдуард* – по традиции прошу прощения за все грамматические, орфографические, пунктуационные, речевые, стилевые, смысловые и иные ошибки.

Если во время чтения что-то вам покажется сомнительным, то не откладывайте и **сразу звоните в приемные комиссии вузов**, звоните в оргкомитеты олимпиад, пишите им электронные письма.

Книга посвящена анализу ситуацию вокруг олимпиад школьников из перечня Минобрнауки (их часто называют олимпиадами РСОШ), а также рассказам о поступлении в лучшие вузы России вне конкурса, на бюджет, с гарантированным общежитием и большой стипендией.

Впереди много страниц текста. Чтобы избежать дальнейшего чтения, советую просто посетить сайт олимпиады «Покори Воробьевы горы!», например. Олимпиада по всем предметам имеет I уровень, так что вы не прогадаете, если будете стремиться получить диплом именно этой олимпиады.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ! Автор ни в коем случае не пытается создать впечатление, что диплом как минимум III степени математической олимпиады получить легко и просто. Это не так! Если вам кажется, что задачи той или иной олимпиады *легкие* и что диплом олимпиады вы получите без подготовки, то вы ошибаетесь! Ко всем олимпиадам без исключения нужно относиться со всей серьезностью и уважением, качественно прорабатывать задачи прошлых лет.

ТЕРМИНЫ

Олимпиада – предметная олимпиада из перечня Минобрнауки. Этот перечень доступен на сайте rsr-olymp.ru. Олимпиады из перечня часто называют олимпиадами РСОШ.

Олимпиады в большинстве своем проводятся в два этапа – заочный и очный. Заочный этап часто называют первым, отборочным, онлайн-этапом. А очный этап часто называют вторым, решающим, заключительным.

Уровень олимпиады – олимпиады РСОШ делятся на три уровня. Дипломы олимпиад I уровня ценятся выше, чем дипломы олимпиад II уровня; дипломы олимпиад II уровня ценятся выше, чем дипломы олимпиад III уровня (но часто вузы не делают никакой разницы между степенями и уровнями – изучайте правила приёма!). В то же время не стоит думать, что задачи олимпиад II уровня всегда легче, чем задачи олимпиад I уровня. И.В. Яковлев, профессиональный репетитор: *«Уровни олимпиад определяются в начале учебного года приказом Минобрнауки и публикуются в Перечне. Чем выше уровень олимпиады, тем более весомые льготы имеют её победители и призёры. Уровень, которым обладает та или иная олимпиада, не связан напрямую со сложностью её выигрывания (а с чем именно связан — дело тонкое)».*

Есть Самарская математическая олимпиада[1], она имеет II уровень. На заключительном туре 2016 года среди задач предлагалось кубическое уравнение, причём не такое, у которого угадываются корни (а потом идёт деление в столбик), а такое, что для него потребовалось полное применение теоремы Кардано решения кубического уравнения. Лично мне задачи этой олимпиады кажутся куда более сложными, чем задачи, например, олимпиады «Физтех» (II уровень). Однако для получения диплома III степени в 2018 году

[1] http://sammat.ru/

достаточно было набрать 24 балла из 100, т.е. решить две с половиной задачи из десяти. *Думайте сами, решайте сами...*

Победитель и *призёр олимпиады* – по итогам только заключительного этапа олимпиады участникам могут быть вручены дипломы I, II или III степени. Обладатель диплома I степени называется победителем олимпиады, обладатель диплома II или III степени называется призёром олимпиады. Естественно, льготы победителям олимпиад выше, чем призёрам.

Льготы победителям и призерам олимпиад РСОШ – бывают двух видов. Прежде всего нужно набрать не менее 75 баллов ЕГЭ по предмету олимпиады. Затем, в зависимости от диплома заключительного этапа и уровня олимпиады, а также согласно правилам приёма соответствующего вуза, вам может быть предоставлена одна из двух льгот:

1. Зачисление без вступительных испытаний.
2. Увеличение балла ЕГЭ по предмету олимпиады до 100 баллов.

В дальнейшем нас будет интересовать именно первая льгота (её называют БВИ).

Следует отметить, что победителям и призёрам заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников не нужно сдавать ЕГЭ вовсе.

ЗАЧЕМ УЧАСТВОВАТЬ В ОЛИМПИАДАХ?

Давайте рассмотрим фрагмент таблицы[2] льгот, предоставляемых поступающим в Санкт-Петербургский государственный университет в 2018 году.

Код, наименование направления	Квалифи-кация	Предметы вступительных испытаний, в т.ч. профильные, сдаваемые в форме ЕГЭ	Общеобразовательные предметы, соответствующие профилю олимпиады	Значение минимального балла ЕГЭ, необходимого для получения определенной льготы по соответствующему предмету	Уровень олимпиады	Категория участников олимпиады	Льготы, предоставляемые победителям и призерам олимпиады
03.03.01 Прикладные математика и физика	Бакалавр	1. Физика	Физика	75	I-III	Победитель, призер	Без вступительных испытаний
		2. Математика	Математика	75	I-III	Победитель, призер	Без вступительных испытаний
		3. Русский язык	Русский язык	75	I-III	Победитель, призер	100 баллов по ЕГЭ по русскому

[2] https://abiturient.spbu.ru/files/2018/bak/VPO_olymp_3_2018.pdf

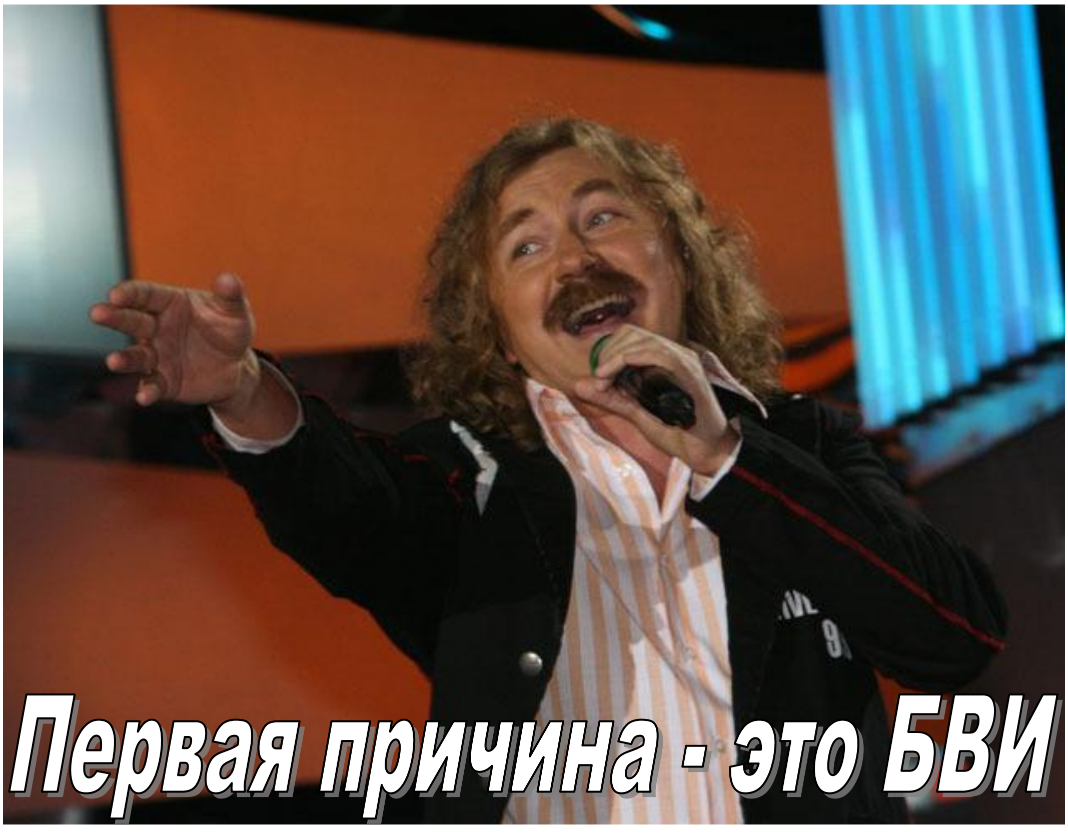
Получается, что выпускник 11-го класса, имеющий не ниже 75 баллов ЕГЭ по математике, а также диплом любой степени математической олимпиады любого уровня сразу зачисляется в СПбГУ, разумеется на бюджет. Всё понятно и просто. По остальным предметам баллы ЕГЭ не учитываются.

Посмотреть льготы обладателям дипломов при поступлении в другие вузы вы можете на сайте[3] Российского совета олимпиад школьников.

Итак, первая причина готовиться и участвовать в олимпиадах формулируется таким образом:

1. Диплом заключительного этапа олимпиады из перечня Минобрнауки гарантирует поступление в вуз

Вузы устанавливают льготы самостоятельно, поэтому очень важно изучить правила приема и точно знать, диплом какой степени олимпиады какого уровня будет гарантировать зачисление «без вступительных испытаний» (БВИ). Можно, конечно, ничего не искать и никуда не смотреть, а *просто* готовиться изначально к математической олимпиаде первого уровня. И стремиться получить диплом I степени (диплом Победителя).



[3] http://rsr-olymp.ru/benefits

Помимо *гарантии* поступления, дипломы олимпиад обеспечивают очень солидную стипендию.

Примером может послужить Санкт-Петербургский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Здесь[4] можно почитать более подробно, я укажу сокращенный вариант:

15 000 рублей в месяц, если ты победитель или призёр предметной олимпиады РСОШ I уровня ИЛИ имеешь 300-290 баллов ЕГЭ по трём предметам;

10 000 рублей в месяц, если ты победитель или призёр предметной олимпиады РОСШ II уровня ИЛИ имеешь 289-280 баллов ЕГЭ по трём предметам.

Более того, если ты киберспортсмен (будь здоров!), а также по трём предметам имеешь не ниже 250 баллов, то будешь получать 10 тысяч в месяц (Университет ИТМО такой Университет ИТМО, если честно).

Стипендия назначается на первое полугодие и при успешно сданной зимней сессии (только «4» и «5» и нет задолженностей) продлевается еще на полгода, до конца первого курса.

За 12 месяцев набегает 180–120 тысяч рублей. Я считаю, что это прекрасно. Итак, вторая причина:

2. Диплом заключительного этапа олимпиады из перечня Минобрнауки гарантирует повышенную стипендию

Есть гранты[5] Президента Российской Федерации. Обладатель гранта получает 20 000 рублей в месяц на весь период обучения в вузе. Достаточно нетривиальные расчеты показывают, что за 6 лет (бакалавриат + магистратура) выходит 1 440 000 рублей.

4 https://abit.ifmo.ru/page/94/
5 http://грантыпрезидента.рф/

Чтобы стать претендентом на получение гранта, необходимо проявить выдающиеся способности. Например, получить диплом победителя заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников.

Разумеется, победа на заключительном этапе Всеросса – высшая степень мастерства школьника. Никакой диплом олимпиады РСОШ не может сравниться с дипломом победителя заключительного этапа Всеросса. Этот диплом гарантирует автоматическое зачисление в любой вуз России без всяких экзаменов.

Однако в перечень мероприятий, участники которых могут претендовать на грант, помимо Всеросса входят еще и некоторые олимпиады РСОШ. Ищите информацию на сайте и все вопросы адресуйте непосредственно оператору программы: grants@talantiuspeh.ru.

Забывая про Всеросс и возвращаясь к олимпиадам РСОШ, вспомним о том, что можно и нужно усиленно готовиться только по одному школьному предмету.

Действительно, система «диплом олимпиады + не ниже 75 баллов ЕГЭ по предмету олимпиады = автоматическое зачисление» не учитывает баллы по остальным предметам, требуемым на данное направление обучения.

Получается, что подготовка к олимпиаде по одному предмету на совершенно законных основаниях позволяет чуть снизить нагрузку по другим предметам. Например, если человек ходит к репетиторам по математике и физике, то можно пару часов занятий физики отдать занятиям математике и чаще посещать первого репетитора.

Я ни в коем случае не призываю заниматься исключительно математикой, а про все остальные предметы напрочь забыть! Обязательно изучайте все школьные предметы, учитесь на «4» и «5». Человек должен быть всесторонне развитым.

3. Благодаря системе «диплом олимпиады + не ниже 75 баллов ЕГЭ по предмету олимпиады» родители могут тратить меньше денег на репетиторов. Нагрузка на школьника снижается

Или хотя бы до февраля-марта (сезон заключительных этапов олимпиад) ходить к репетитору по предмету олимпиады, а уже после всех конкурсов начать посещение других репетиторов.

4. Школьник, качественно готовящийся к участию в олимпиадах, автоматически готовится к ЕГЭ и наоборот

Работает четвертая причина следующим образом. В ЕГЭ нет задач, решение которых требует знаний, выходящих за рамки школьной программы. То же самое и с олимпиадными заданиями.

Олимпиадные задачи, которые похожи на задачи 13 – 19 из ЕГЭ по математике профильного уровня, номинально сложнее последних. Поэтому олимпиадник, решая более сложные задачи, автоматически готовится к ЕГЭ.

Если же школьник *действительно* готовится к экзамену по математике, то есть *старается* научиться решать все задачи с развернутым ответом (особенно задачи по планиметрии и с параметром), то он автоматически готовится к участию в математических олимпиадах II, III уровня.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Вспомним, что диплом призёра математической олимпиады II уровня гарантирует зачисление в большинство вузов России, а в Университете ИТМО, например, вы еще будете за него получать 10 000 в месяц.

В 2018 году диплом III степени (диплом призёра) Объединенной межвузовской математической олимпиады[6] (2 уровень) вручался всем, кто смог решить без ошибок любые четыре задачи из десяти. Из четырех с половиной тысяч участников дипломы получили 500.

Приведу решения избранных задач, а вы уж сами судите, сложные они или нет. Номера задач указаны те же, что были на заключительном этапе в варианте. Внимательно изучайте решения до тех пор, пока они не начнут казаться вам не очень трудными.

Задача 1. Докажите неравенство:

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \cdots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

Решение.

Применим свойство логарифмов:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c).$$

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2016)}{2016}.$$

$$2016 \cdot \log_{2015} 2017 > \log_{2015}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2016).$$

Еще одно свойство логарифмов:

$$a \cdot \log_b c = \log_b c^a.$$

$$\log_{2015} 2017^{2016} > \log_{2015}(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2016).$$

Переходим к неравенству аргументов (знак неравенства не меняется, поскольку $2015 > 1$).

$$2017^{2016} > 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2016.$$

[6] http://olympiads.mccme.ru/ommo/18/

Ответ: что и требовалось доказать.

Задача 2. n грибников ходили в лесс и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!». При каком Наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

Решение.

Для начала докажем, что при $n \leq 20$ Петя может ошибиться. Предположим, что первые $n-1$ грибников собрали соответственно $0, 1, \dots, n-2$ гриба, а n-й – все остальные. Поскольку

$$0 + 1 + \cdots + (n-2) \leq 0 + 1 + \cdots + 18 = 171 = 200 - 29,$$

то последний грибник собрал не менее 29 грибов, т.е. больше, чем каждый из остальных. Итак, при $n \leq 20$ существует пример, когда Петя мог быть не прав.

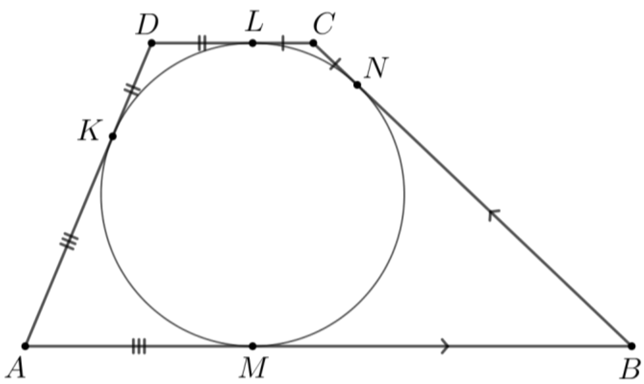
Покажем, что при $n = 21$ Петя всегда окажется прав. Предположим, что он не прав и пусть грибники собрали $a_0 < a_1 < \cdots < a_{20}$ грибов. Несложно видеть, что $a_i \geq i$, откуда

$$200 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{20} \geq 0 + 1 + \cdots + 20 = 210,$$

противоречие.

Ответ: 21.

Задача 4. В трапецию *ABCD* вписана окружность, касающаяся боковой стороны *AD* в точке *K*. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.



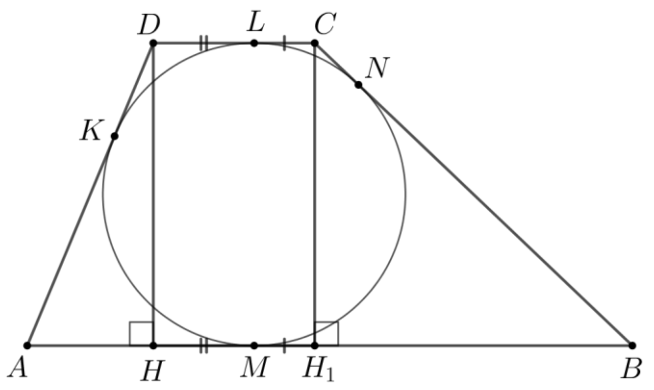
Решение.

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности:

$$AM = AK = 16, \qquad DK = DL = 4,$$

$$CL = CN = DC - DK = 2,$$

$$BM = BN = x.$$



Проведем перпендикуляры DH и CH_1 к стороне AB. DHH_1C – прямоугольник, откуда

$$DH = CH_1, \qquad DL = HM = 4,$$
$$LC = MH_1 = 2,$$
$$AH = AM - HM = 12,$$
$$BH_1 = BM - MH_1 = x - 2.$$

Из прямоугольного треугольника ADH:

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{8 \cdot 32} = 16.$$

Из прямоугольного треугольника CBH_1:

$$16^2 = BC^2 - BH_1^2, \qquad 16^2 = (x+2)^2 - (x-2)^2, \qquad x = 32.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DH = \frac{48 + 6}{2} \cdot 16 = 432.$$

Ответ: 432.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 3, \\ y^2 = (z-x)^2 - 7, \\ z^2 = (x-y)^2 + 21. \end{cases}$$

Решение.

Применим формулу разности квадратов, предварительно перенеся квадраты в левую часть.

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) = -3, \\ (y-z+x)(y+z-x) = -7, \\ (z-x+y)(z+x-y) = 21. \end{cases}$$

Введем обозначения: $X = -x + y + z$, $Y = x - y + z$, $Z = x + y - z$. Тогда

$$\begin{cases} YZ = -3, \\ ZX = -7, \\ XY = 21. \end{cases}$$

Перемножая все получившиеся равенства, имеем $(XYZ)^2 = 3 \cdot 7 \cdot 21$, откуда $XYZ = 21$ или $XYZ = -21$. Разберем случай $XYZ = 21$. В нём $X = \frac{XYZ}{YZ} = -7$,

$Y = -3$, $Z = 1$; тогда $x = \frac{Y+Z}{2} = -1$, $y = -3$, $z = -5$. Второй случай дает $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.

Ответ: $(-1, -3, -5)$, $(1,3,5)$.

В решении приведенных задач нам понадобились: навыки выполнения действий с логарифмами; навыки естественных логических рассуждений; навыки решения систем уравнений; знание основных свойств, возникающих при касании окружности, а также формулы трапеции. Не так уж и много, не правда ли?

Еще один интересный момент связан с математической олимпиадой 1 уровня – «Ломоносов»[7]. Диплом победителя (I степени) вручался участникам, набравшим не менее 85 баллов. Такой диплом открывает двери практически во все вузы России. На заключительном туре 2018 года предлагалось 8 задач, каждая из которых оценивалась в 15 баллов.

Таким образом, необходимо и достаточно было решить 6 задач из 8.

Приведу условия и решения шести подряд идущих задач. Перечитывайте условия и решения до полного понимания.

Задача 1. На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки

$$x^5 < y^8 < y^3 < x^6,$$

лежит число 0?

Решение.

Заметим, что $y > 0$, что следует из неравенства $y^8 < y^3$. По свойству степенной функции, также $y < 1$. Поскольку $x^5 < y^8$, то либо $x^5 < 0$, либо $0 < x^5 < 1$. Второй случай не удовлетворяет условию $x^5 < x^6$ по свойству степенной функции. Тогда $0 \in (x^5; y^8)$.

Ответ: $(x^5; y^8)$.

[7] http://olymp.msu.ru/

Задача №2. Какое из чисел больше:

$$\underbrace{\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\ldots}}}}}}_{2018\text{ знаков корня}} \quad \text{или} \quad 17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}?$$

Решение.

Пусть A – первое число, B – второе. Тогда

$$A = 17^{\frac{1}{2}} \cdot 13^{\frac{1}{4}} \cdot 17^{\frac{1}{8}} \cdot 13^{\frac{1}{16}} \cdot \ldots \cdot 17^{\frac{1}{2^{2017}}} \cdot 13^{\frac{1}{2^{2018}}} =$$

$$= 17^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{2017}}} \cdot 13^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{2^{2018}}}.$$

Поскольку (формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{2017}} < \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{2^{2018}} < \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3},$$

число A меньше, чем $17^{2/3} \cdot 13^{1/3} = B$.

Ответ: второе.

Задача 3. В треугольнике *ABC*, площадь которого равна 20, проведена медиана *CD*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник *ACD*, лежит на окружности, описанной около треугольника *BCD*.

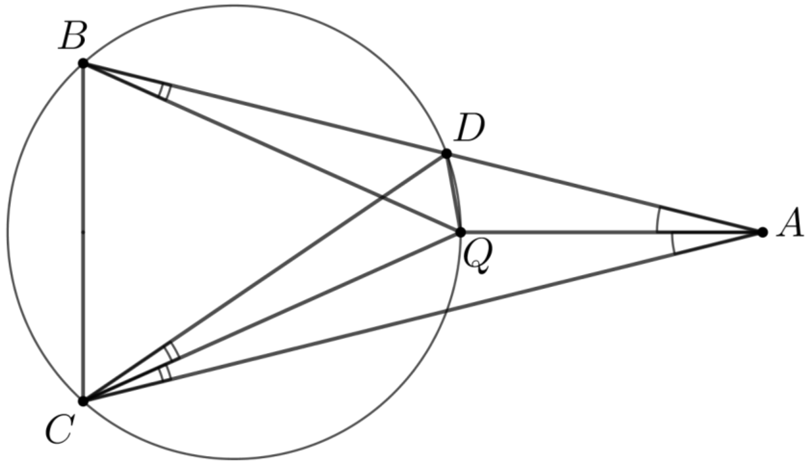
Решение.

Пусть Q – центр окружности, вписанной в треугольник *ACD*. Тогда отрезки AQ и CQ – биссектрисы углов *BAC* и *ACD* соответственно, по свойствам вписанных углов, опирающихся на одну дугу, $\angle DBQ = \angle DCQ$. Значит, треугольники *ABQ* и *ACQ* равны по стороне и двум углам. Следовательно, $AB = AC$, т.е. треугольник *ABC* равнобедренный.

Положим $BC = 2x$, тогда $S_{ABC} = x\sqrt{41 - x^2}$, поэтому с учетом условия получаем уравнение $x\sqrt{41 - x^2} = 20$, имеющее два корня $x = 4$ или $x = 5$. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{41 \cdot 2x}{4 \cdot 20} = \frac{41x}{40}.$$

Подставляя сюда найденные значения x, получаем два ответа, причем обе возможности реализуются.



Ответ: 41/10 или 41/8.

Задача 4. Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счёту фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я – на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

Решение.

Пусть x, y – номера альбомов, в которые попали 81-я и 171-я фотографии соответственно, $n > 4$ – количество страниц в альбоме. Тогда

$$4n(x-1) + 16 < 81 \le 4n(x-1) + 20,$$

$$4n(y-1) + 8 < 171 \le 4n(y-1) + 12.$$

После преобразований:

$$61 \le 4n(x-1) < 65,$$

$$159 \le 4n(y-1) < 163.$$

Тогда $n(x-1)=16$, $n(y-1)=40$. Из первого равенства следует, что n может быть равно 1, 2, 4, 8, 16, из второго – 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Таким образом, $n=8$, $4n=32$.

Ответ: 32.

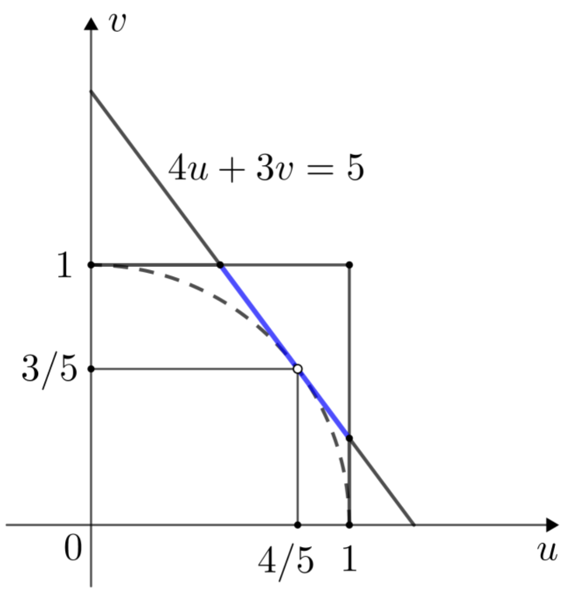
Задача 5. Решите неравенство

$$\arcsin\left(\frac{5}{2\pi}\arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi}\arcsin x\right).$$

Решение.

Обозначим $u=\frac{5}{2\pi}\arccos x$, $v=\frac{10}{3\pi}\arcsin x$. Тогда справедливо соотношение $4u+3v=5$:

$$\frac{20}{2\pi}\arccos x+\frac{30}{3\pi}\arcsin x=\frac{10}{\pi}(\arccos x+\arcsin x)=\frac{10}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=5.$$



Решением неравенства $\arcsin u > \arccos v$ является множество

$$0\le u\le 1,\qquad 0\le v\le 1,$$
$$u^2+v^2>1,$$

это область, заключенная между линиями $u=1$, $v=1$ и $u^2+v^2=1$. Прямая $4u+3v=5$ имеет общие точки с этим множеством – это отрезок с выколотой точкой $u=4/5$, $v=3/5$.

Таким образом

$$u\in\left[\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};1\right]\Leftrightarrow \arccos x\in\left[\frac{\pi}{5};\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\frac{8\pi}{25};\frac{2\pi}{5}\right],$$

откуда, с учётом убывания арккосинуса,

$$x\in\left[\cos\frac{2\pi}{5};\cos\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\cos\frac{8\pi}{25};\cos\frac{\pi}{5}\right].$$

Ответ: $\left[\cos\frac{2\pi}{5};\cos\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\cos\frac{8\pi}{25};\cos\frac{\pi}{5}\right]$.

Задача 6. Найдите все наборы чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, что $x_1 = x_{n+1}$ и при всех $k = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$2\log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

Решение.

Требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9 - 2\log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 + \log_2^2 x_1 = 0, \\ 9 - 2\log_2 x_2 \cdot \log_2 x_3 + \log_2^2 x_2 = 0, \\ \dots \\ 9 - 2\log_2 x_{n-1} \cdot \log_2 x_n + \log_2^2 x_{n-1} = 0 \\ 9 - 2\log_2 x_n \cdot \log_2 x_1 + \log_2^2 x_n = 0. \end{cases}$$

Замена $a_k = \frac{1}{3}\log_2 x_k$, $k = 1, \dots, n$, приводит систему к виду

$$\begin{cases} a_1 + a_1^{-1} = 2a_2, \\ \dots \\ a_{n-1} + a_{n-1}^{-1} = 2a_n, \\ a_n + a_n^{-1} = 2a_1. \end{cases}$$

Из неравенства для суммы взаимно обратных чисел следует, что либо $a_k \geq 1$, $k = 1, \dots, n$, либо $a_k \leq -1$, $k = 1, \dots, n$. Решениями системы являются наборы $a_k = 1$, $k = 1, \dots, n$ и $a_k = -1$, $k = 1, \dots, n$. Сложим все уравнения системы и перенесем все слагаемые в одну часть равенства, тогда получим

$$a_1 - a_1^{-1} + \dots + a_{n-1}^{-1} + a_n - a_n^{-1} = 0.$$

Левая часть последнего равенства больше нуля, если хотя бы одно $a_k > 1$ и меньше нуля, если хотя бы одно $a_k < -1$, поэтому других решений, кроме вышеуказанных, система не имеет. Найденным двум наборам значений a_k соответствуют два набора $x_k = 2^3 = 8$ и $x_k = 2^{-3} = \frac{1}{8}$, $k = 1, \dots, n+1$.

Ответ: $x_k = 8$, $k = 1, \dots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{8}$, $k = 1, \dots, n+1$.

При решении задач олимпиады «Ломоносов» использовались: знания свойств степенной функции $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$; формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \qquad \text{если } |q| < 1;$$

свойства вписанной окружности, свойства вписанных углов, свойства равнобедренного треугольника; умение составлять двойные неравенства и работать с ними; знание о тригонометрических функциях и обратных тригонометрических функциях, их взаимосвязь, графическая интерпретация и характерные свойства, $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$; самое распространенное следствие из неравенства Коши о средних; навыки преобразований выражений, содержащих логарифмы; навыки оценки получаемых выражений.

5. Участвовать и побеждать в олимпиадах по математике можно и нужно. Задачи олимпиад часто не являются катастрофически трудными

А теперь посмотрим на задачи с развернутым ответом из ЕГЭ по математике профильного уровня. Эти задачи вы обязаны уметь решать. Без них высокий балл не набрать.

13. а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$[\log_5 2\,; \log_5 20]$$

Решение.

$$2^{3x} - 18 \cdot 2^x + 32 \cdot 2^{-x} = 0.$$

Замена $2^x = t > 0$. Умножим обе части на t:

$$t^4 - 18t^2 + 32 = 0, \qquad t_1^2 = 2, \qquad t_2^2 = 16.$$

Возвращаемся к старой переменной

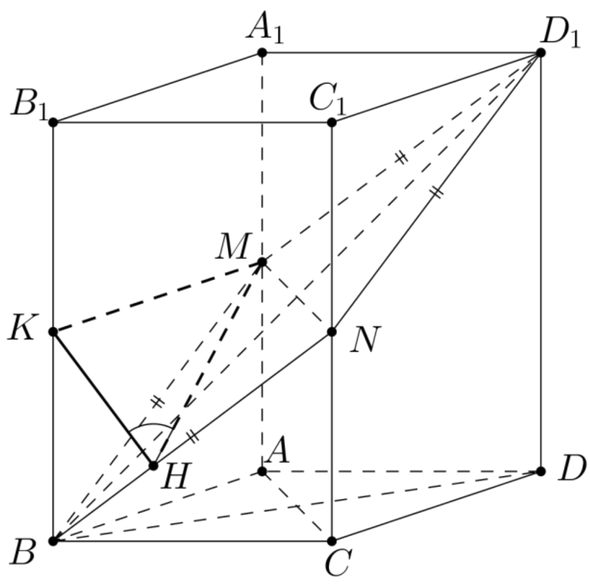
$$2^x = \sqrt{2} = 2^{1/2}, \qquad x = \frac{1}{2};$$

$$2^x = 4 = 2^2, \qquad x = 2.$$

Отбор корней:

$$\log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5} < \log_5 20 < \log_5 25 = 2.$$

Ответ: а) 1/2, 2; б) 1/2.



14. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань *ABCD* – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Решение.

а) Диагонали ромба перпендикулярны, проекциями этих диагоналей на плоскость *ABCD* являются диагонали прямоугольника *ABCD*, которые также должны быть перпендикулярны. Значит *ABCD* – квадрат.

б) Из доказанного следует, что треугольники *BCN*, *BAM*, D_1A_1M, D_1C_1N равны по катету и гипотенузе, откуда *M* и *N* являются серединами рёбер AA_1 и CC_1 соответственно.

Проведем перпендикуляр из M к плоскости BCC_1 – *MK*. Из точки *K* проведем перпендикуляр к *BN*, получим точку *H*. Угол *MHK* – искомый линейный угол между плоскостями.

Из треугольника *BKN* с катетами 3 и 4 находим высоту

$$KH = \frac{12}{5}.$$

По построению $KM = 4$, поэтому угол *MHK* найдется:

$$\angle MHK = \operatorname{arctg} \frac{MK}{KH} = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}.$$

Ответ: а) ч.т.д.; б) $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

15. Решите неравенство

$$\log_2^2(25 - x^2) - 7\log_2(25 - x^2) + 12 \geq 0.$$

Решение.

Пусть $t = \log_2(25 - x^2)$.

$$t^2 - 7t + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 3, \\ t \geq 4. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к старой переменной. Исходное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(25 - x^2) \leq 3, \\ \log_2(25 - x^2) \geq 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 25 - x^2 \leq 8, \\ \;25 - x^2 \geq 16; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -25 < -x^2 \leq -17, \\ \quad -3 \leq x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25 > x^2 \geq 17, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 < x \leq -\sqrt{17}, \\ \sqrt{17} < x < 5, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-5; -\sqrt{17}\right] \cup [-3; 3] \cup \left[\sqrt{17}; 5\right).$$

Ответ: $\left(-5; -\sqrt{17}\right] \cup [-3; 3] \cup \left[\sqrt{17}; 5\right)$.

16. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

Решение.

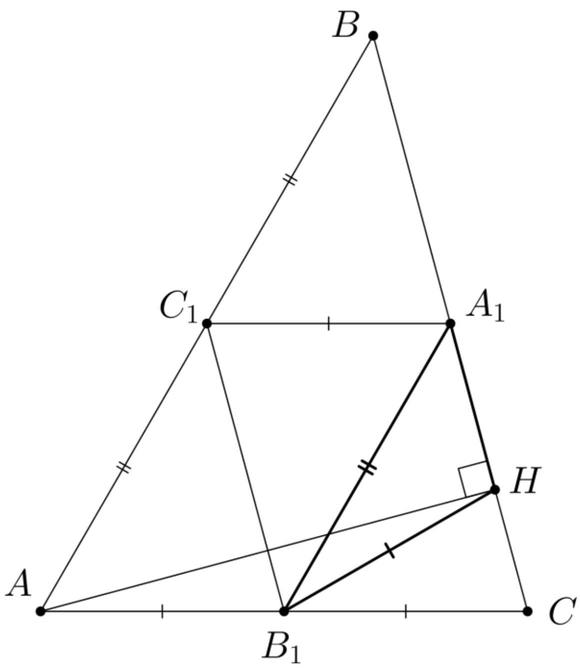
а) B_1H – медиана прямоугольного треугольника AHC, поэтому

$$AB_1 = B_1C = B_1H, \qquad \angle B_1CH = \angle CHB_1, \qquad \angle AHB_1 = 15°, \qquad \angle CB_1H = 30°.$$

Из равенства треугольников $A_1B_1C_1$, AC_1B_1, B_1A_1C, C_1BA_1 следует

$$\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1HB_1 = 75° + 90° + 15° = 180°.$$

Значит около четырехугольника $A_1HB_1C_1$ можно описать окружность.



б) По теореме синусов находим:

$$AC = \frac{BC}{\sin 60°} \sin 45° = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$AB = \frac{BC}{\sin 60°} \sin 75° =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Тогда

$$A_1B_1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad B_1H = \sqrt{2}.$$

По теореме косинусов для треугольника A_1B_1H:

$$(A_1H)^2 = (B_1H)^2 + (A_1B_1)^2 - 2 \cdot B_1H \cdot A_1B_1 \cdot \cos\angle HB_1A_1,$$

$$(A_1H)^2 = 2 + 2 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 1, \qquad A_1H = 1.$$

Ответ: а) ч.т.д.; б) 1.

17. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение.

За год ценные бумаги увеличиваются в цене в

$$\frac{(t+1)^2}{t^2} = \frac{t^2+2t+1}{t^2} = 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \text{ раз.}$$

Видно, что относительное увеличение стоимости замедляется с каждым годом. Продавать бумаги и класть деньги в банк имеет смысл в том случае, когда в банке прирост за год (а, значит, и за все последующие годы) станет больше.

По условию, продавать бумаги нужно в конце 21-го года, значит, за 21-ый год прирост стоимости ценных бумаг еще больше банковского процента, а в 22-м году – уже нет. Записываем:

21-ый год:

$$\frac{21^2}{20^2} > 1 + r,$$

22-й год:

$$\frac{22^2}{21^2} < 1 + r.$$

$$\frac{22^2}{21^2} < 1 + r < \frac{21^2}{20^2}, \qquad \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

Ответ: $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение.

Рассмотрим семейства следующих графиков:

$$y = ax - 2, \qquad g = \sqrt{x-1} - a, \qquad h = 3x - 2a - 11.$$

Неравенство $y \geq 0$ будет выполняться хотя бы для одного x из $[3; 4]$ в том случае, если прямая $y = ax - 2$ будет иметь общую точку с фигурой, ограниченной осью Ox и линиями $x = 3$, $x = 4$ для всех $y \geq 0$. Это достигается при всех $a \geq \frac{1}{2}$.

Из аналогичных рассуждений для g получаем $a < \sqrt{3}$.

Неравенство $h \leq 0$ будет выполняться хотя бы для одного x из $[3; 4]$ в том случае, если прямая $h = 3x - 2a - 11$ будет иметь общую точку с фигурой, ограниченной осью Ox и линиями $x = 3$, $x = 4$ для всех $y \leq 0$. Это достигается при всех $a \geq -1$.

Пересекая полученные неравенства, получаем ответ.

Ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

19. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Решение.

а) Да, например 6, 7, 8, 9, 10.

б) Нет. Если попытаться добавить число к набору 6, 7, 8, 9, 10, которое будет меньше 6, то произведение этого числа и 6 будет меньше 40. А если к этому же набору прибавить число, большее 10, то произведение этого числа и 10 будет больше 100.

в) 35. Докажем, что четыре подходящих числа 7, 8, 9, 11 обладают наибольшей суммой среди всех подходящих четверок чисел. Этот набор можно изменить, заменив 7 на 6 – сумма будет меньше. Также можно заменить 11 на 10 – снова получим уменьшение. А вот заменять число из данного набора на число, которое будет больше 11 нельзя: произведение этого числа и 10 будет больше 100. Поэтому данная четверка обладает наибольшей суммой.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.

Возвращаясь к ранее упомянутой Самарской математической олимпиаде, давайте решим три избранные задачи из десяти и обеспечим себе 100 баллов ЕГЭ (а в некоторые вузы – поступление без вступительных испытаний). Национальный исследовательский технический университет «Московский институт стали и сплавов» платит 20 000 рублей в месяц за диплом.

Задача 1. Известно, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и для любых действительных x удовлетворяют уравнению $20f(18x) = f(x) + x^2$. Сколько существует целых x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) < \frac{x}{2018}?$$

Решение.

Применим функцию несколько раз.

$$20f(18x) = f(x) + x^2;$$

$$20f(x) = f\left(\frac{x}{18}\right) + \frac{x^2}{18} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{20}\cdot\frac{x^2}{18^2} + \frac{1}{20}\cdot f\left(\frac{x}{18}\right);$$

$$20f\left(\frac{x}{18}\right) = f\left(\frac{x}{18^2}\right) + \frac{x^2}{18^4} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{20}\cdot\frac{x^2}{18^2} + \frac{1}{20^2}\cdot\left(f\left(\frac{x}{18^2}\right) + x^2/18^4\right) =$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{x^2}{18^2} + \frac{1}{20^2}\cdot\frac{x^2}{18^4} + \frac{1}{20^2}\cdot f\left(\frac{x}{18^2}\right);$$

$$f(x) = x^2\cdot\left(\frac{1}{20\cdot 18^2} + \frac{1}{20^2\cdot 18^4} + \cdots + \frac{1}{20^n\cdot 18^{2n}}\right) + \frac{1}{20^n}\cdot f\left(\frac{x}{18^{2n}}\right).$$

Применяя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$f(x) = \frac{x^2}{20\cdot 18^2 - 1} + \frac{1}{20^n}\cdot f\left(\frac{x}{18^{2n}}\right).$$

Исходя из условия, предел функции $f(x)$ в точке $x = 0$ равен значению функции в этой точке. Поэтому найдем $f(0)$:

$$20f(0) = f(0) + 0, \qquad f(0) = 0.$$

Поскольку $\frac{x}{18^{2n}} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow +\infty$, то выполняется следующее равенство:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = \frac{x^2}{20\cdot 18^2 - 1}.$$

Подставляя выражение функции в неравенство, получим:

$$\frac{x^2}{20\cdot 18^2 - 1} < \frac{x}{2018} \Leftrightarrow 0 < x < 3\frac{425}{2018}.$$

Только три целых числа входят в полученный интервал.

Ответ: 3.

Задача 2. Три равных шара радиусом 1 лежат на одной плоскости и попарно касаются друг друга. Конус с углом 60° в вершине осевого сечения стоит основанием на той же плоскости и касается боковой поверхности каждого шара. Найти радиус основания конуса.

Решение.

Заметим, что центры шаров образуют равносторонний треугольник со стороной 2, который лежит в плоскости, параллельной плоскости основания конуса. Тогда расстояние от центра шаров до центра этого треугольника (то есть до оси конуса) равно $2/\sqrt{3}$.

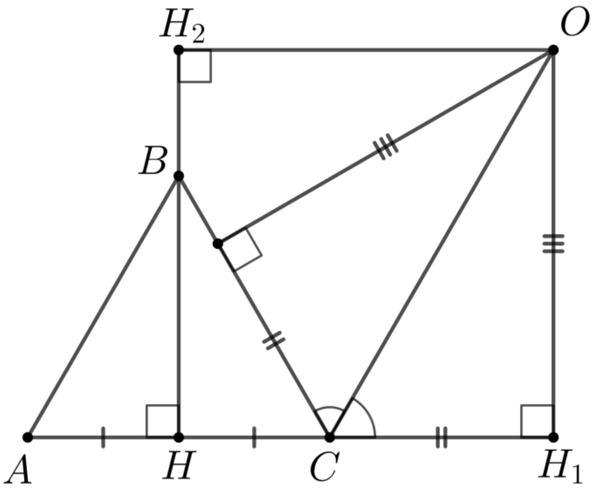
Рассмотрим случай касания конуса с одним из шаров, когда конус касается шаров внешним образом. Отметим, что осевое сечение прямого конуса с углом 60° есть равносторонний треугольник.

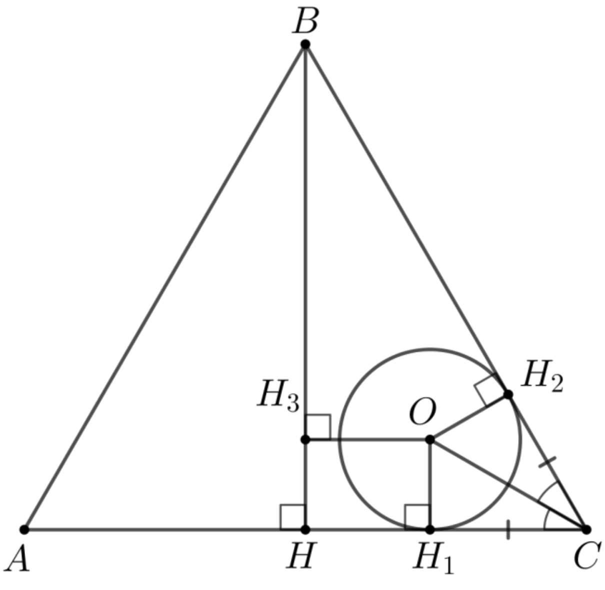
Поскольку $\angle ACB = 60°$, то смежный с ним $\angle BCH_1 = 120°$. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $\angle OCH_1 = 60°$. Заметим, что HH_1OH_2 – прямоугольник, откуда

$$r = HC = OH_2 - CH_1 = HH_1 - CH_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда все шары расположены внутри конуса и касаются его внутренним образом. Применяя аналогичные рассуждения, имеем:

$$CH_1 = \frac{OH_1}{\operatorname{tg} 30°} = \sqrt{3}, \qquad r = HH_1 + CH_1 = OH_3 + CH_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$





Ответ: $1/\sqrt{3}$ и $5/\sqrt{3}$.

Задача 5. При каких натуральных n существует ровно 2018 острых углов α таких, что

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin(2n-1)\alpha = 0?$$

Решение.

Заметим, что среди решений уравнения $\sin\alpha = 0$ нет ни одного острого угла. Значит при всех значениях α, являющихся решением исходного уравнения, выражение $\sin\alpha$ не обращается в ноль. Поэтому умножим обе части исходного уравнения на $2\sin\alpha \neq 0$.

$$2\sin\alpha\sin\alpha + 2\sin\alpha\sin 3\alpha + 2\sin\alpha\sin 5\alpha + \dots + 2\sin\alpha\sin(2n-1)\alpha = 0.$$

Применяя формулу $2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$, получим:

$$\cos 0 - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \dots - \cos 2n\alpha = 0,$$

$$1 - \cos 2n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi k}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку требуется, чтобы все значения α были от 0 до $\pi/2$ (острыми), перепишем:

$$0 < \frac{\pi k}{n} < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < k < \frac{n}{2}, \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

Последнее неравенство должно иметь 2018 решений для k. Это достигается при

$$2018 < \frac{n}{2} \leq 2019, \qquad n = 4037, \qquad 4038.$$

Ответ: 4037, 4038.

При решении использовались: навыки решений так называемых функциональных уравнений и неравенств; основы математического анализа (непрерывность, предел), не выходящие за рамки школьной программы; понимание взаимного положения достаточно не сложных стереометрических конструкций; вычислительные навыки в планиметрии; свойства тригонометрических функций и преобразование тригонометрических выражений; работа с двойными неравенствами.

Если вот после прочтения условий задач олимпиад и ЕГЭ вам в н е з а п н о показалось, что задачи-то довольно тяжелые, то вот вам немного мотивации. Стипендию возьмем среднюю, 10 тысяч рублей в месяц – за первый курс уже набегает 120 тысяч рублей.

Теперь представим, что вы не прошли на бюджет и попали на коммерческую форму обучения – то есть каждый год (или полгода) будете платить огромные деньги. Возьмем среднюю стоимость, 100 тысяч рублей в год (примерно столько в Кубанском государственном университете[8], а в Высшей школе экономики[9] есть направления, полугодовая стоимость обучения на которых превышает полмиллиона рублей; в РАНХиГС[10] при Президенте РФ в 2017 годовая стоимость варьировалась от 150 до 448 тысяч). У вас есть шанс перевестись на бюджет при выполнении нескольких условий:

1) отличная учеба в течение трех семестров (уточните в правилах приема);

2) кто-то из бюджетников в вашей группе должен быть отчислен, чтобы образовалось вакантное место;

3) ваше «портфолио» претендента на бюджетное место должно быть лучше, чем у остальных;

4) у деканата или учебной части должно быть желание вас перевести.

Поскольку семестр это полугодие, то как минимум *две полные годовые стоимости* придется заплатить – 200 тысяч. Итого, стипендия + оплата обучения = 320 тысяч рублей. Мы посчитали самый минимальный минимум денег, которые вы можете заработать, если будете решать (добросовестно, честно и качественно) задачи математических олимпиад. А что же максимум?

Диплом любой степени математической олимпиады 1 или 2 уровня дает БВИ на направление «Бизнес-информатика» в ВШЭ, а годовая стоимость равна 440 тысяч рублей – уже заработали 880 тысяч. А с учётом гарантированного общежития, практически бесплатного проживания в Москве? Теперь научиться решать задачи по математике уже не кажется такой страшной задачей.

8 https://www.kubsu.ru/sites/default/files/insert/page/prikaz_stoimost_2_i_posl._kursy_2018-2019_uch.g.pdf
9 https://ba.hse.ru/icef2018
10 http://www.ranepa.ru/images/docs/pk/Stoimost_obuch_bac_o_2017.pdf

РАЗРУШАЕМ МИФЫ

Первый миф о непостижимой трудности олимпиадных задач мы успешно разрушили. Чем больше вы изучаете, чем чаще решаете задачки, тем лучше у вас получается, а иногда даже начинает нравиться. В конце концов, решение любой олимпиадной задачи не выходит за рамки школьной программы.

Второй миф имеет несколько формулировок: «победитель олимпиады только один» или «диплом олимпиады только один». Разрушаем его:

1) http://olymp.mipt.ru/articles/1191 – 915 обладателей дипломов;

2) https://olymp.msu.ru/rus/event/4591/page/947 – сотни дипломантов.

Третий миф: олимпиады платные. Он разрушается законом о порядке проведения олимпиад. Ни под каким предлогом олимпиады из перечня Минобрнауки не взимают деньги с участников.

Четвертый миф: олимпиады только для москвичей и питерцев. Этот миф разрушается простым переходом на сайты олимпиад, где указаны обладатели дипломов. Победители олимпиад первого уровня встречаются по всей России: Адыгея, Марий Эл, Ярославль, Алтайский край... Что уж говорить о призёрах.

Заключительные туры олимпиад проводятся во многих городах России. А оргкомитет олимпиады «Покори Воробьевы горы!», например, даже оплачивает транспортные расходы всем участникам.

Миф пятый, экзотический: вузы учитывают только свои олимпиады. Это не так. Вузы могут ограничить перечень засчитываемых олимпиад, как это сделал МФТИ в 2018 году. Но вузы пока еще не опускаются до того, чтобы учитывать дипломы только своих олимпиад. Наряду с «Физтехом», МФТИ учитывал также дипломы других олимпиад (в основном 1 уровня).

КАК ГОТОВИТЬСЯ К ОЛИМПИАДАМ?

На сайте олимпиады всегда указаны контакты оргкомитета. Все свои вопросы в первую очередь нужно адресовать оргкомитету олимпиады.

Также на сайтах многих олимпиад имеются списки рекомендованной литературы. Книги, которые встречаются почти в каждом таком списке вне зависимости от олимпиады:

- Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов;
- Ленинградские математические кружки / С.А. Генкин и д.р.

Помимо собирания всей рекомендуемой литературы, **важнейшим этапом при подготовке является решение (разбор решений) всех задач прошлых лет**. Делать это нужно в том числе потому, что частенько задания олимпиад повторяются.

Все материалы эти доступны на сайтах олимпиад.

Итак, самые главные материалы для подготовки свободно скачиваются в интернете – никаких денежных затрат.

Я не раз упоминал о том, что решения задач олимпиад не выходят за рамки школьной программы. Это говорит о том, что уже купленных вами учебников и задачников вполне достаточно. Только необходимо прорешать *все* задачи в них, в том числе со «звездочками». Если вы честно и качественно проработаете ваши школьные учебники и задачники полностью, то диплом призера математической олимпиады второго уровня у вас в кармане. Вновь никаких дополнительных денежных затрат.

Если же вы всё-таки хотите тратить деньги, то первой покупкой, как мне кажется, должна стать книга[11] «Математика – абитуриенту» В.В. Ткачука. Если вы решите все задачи в ней, то диплом победителя двух математических олимпиад первого уровня – «Ломоносов» и «Покори Воробьевы горы!», – я вам гарантирую.

Если хотите подготовиться к олимпиаде «Физтех», то есть море информационных ресурсов:

https://mipt.ru/abiturs/olympiads/fizteh/

http://abitu.net/

https://vk.com/abitunet

http://school.mipt.ru/

http://phystech.academy/

https://zftsh.online/

И всё это тоже бесплатно.

Лучший сайт для подготовки к олимпиадам по математике и физике с бесплатными и актуальными материалами, созданными профессиональным репетитором: http://mathus.ru/

[11] http://biblio.mccme.ru/node/6098/shop

РЕКЛАМА «КНИГИ» ПРО ОММО И ЧТО ДЕЛАТЬ ДАЛЬШЕ

Поскольку вы дошли до этих строк, то уже достаточно основательно мотивированы на подготовку и участие в математических олимпиадах. Теперь нужно выбрать одну или несколько олимпиад и начать непосредственно заниматься, решать задачи прошлых лет.

Как я уже говорил, выбрав олимпиаду первого уровня вы не прогадаете. Вот некоторые из них:

«Покори Воробьевы горы!» – https://pvg.mk.ru/

«Ломоносов» – http://olymp.msu.ru/

Олимпиада школьников СПбГУ – http://olympiada.spbu.ru/

«Высшая проба» – https://olymp.hse.ru/mmo/

Поскольку все олимпиады бесплатные и проводятся во многих городах России, то по крайней мере неприлично игнорировать их. Обратите внимание и на некоторые олимпиады второго уровня:

«Физтех» – http://olymp.mipt.ru/

Всесибирская открытая олимпиада школьников – http://sesc.nsu.ru/vsesib/

Олимпиада школьников СПб НИУ ИТМО – http://olymp.ifmo.ru/

Объединенная межвузовская математическая олимпиада – http://mccme.ru/ommo

Самарская математическая олимпиада – http://sammat.ru/

Если тщательно изучить задачи прошлых лет разных олимпиад, то можно заметить, как задания повторяются. Причем нередко задачи прошлых лет одной олимпиады предлагаются на заключительном туре другой.

Задача 8, **ОММО, 2017.** При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3)=0$$

имеет ровно три решения?

Задача 5, «Покори Воробьевы горы!», 2015 (Уфа). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{1/7}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

Вне зависимости от вашего выбора, я настаиваю на подготовке к Объединенной межвузовской математической олимпиаде. Исчерпывающую книгу для самостоятельного изучения вы можете найти здесь[12].

[12] https://vk.com/doc137774427_443603518

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Участвуйте в олимпиадах РСОШ, не игнорируйте их! Даже 310 баллов ЕГЭ из 310 иной раз не являются гарантией зачисления на бюджет, а диплом олимпиады является!

Если вы хотите поступить на направление «Юриспруденция», то участвуйте в олимпиадах по обществознанию, праву и истории.

Если вы хотите поступить на направление «Международные отношения», то участвуйте в олимпиадах по истории.

Я рекомендую участвовать именно в математических олимпиадах, потому что «математика» является профильным предметом на подавляющее большинство направлений обучения в вузах. А значит диплом математической олимпиады будет гарантировать БВИ в огромное количество мест.

Впереди лето, времени на подготовку более чем достаточно. С древнейших времен честная и качественная учёба ценилась высоко и давала привилегии. То же самое и сейчас.

Представим, что наступил апрель 2019 года. Вы нашли себя в списках победителей олимпиады «Ломоносов» по математике. Всё, вы поступили в МГУ. А если вы еще и победитель олимпиады 1 уровня по физике, то вам открыты двери и в МФТИ.

А если вы – призёр ОММО, то вы уже поступили в НИУ ВШЭ, СПбГУ, РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, РЭУ им. Г.В. Плеханова, Финансовый университет при Правительстве РФ, РАНХиГС при Президенте РФ, НИУ МЭИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Университет ИТМО, Санкт-Петербургский горный университет, МТУ, МИСиС, МАМИ, СПбПУ Петра Великого...

Еще и не менее 10 тысяч рублей в месяц будете получать, не говоря уже о гарантированном общежитии.

Совсем недавно Министерство образования и науки РФ было преобразовано в два министерства – Министерство просвещения и Министерство науки и высшего образования. Это во-первых.

Во-вторых, с конца приёмной кампании 2017 года Ольга Юрьевна Васильева говорила о том, что будет «решать проблему» с олимпиадами и олимпиадниками. Некоторые люди полагают, что некоторые олимпиады (в частности ОММО) могут снизить свой уровень, всё больше вузов перестанут давать льготы за дипломы таких олимпиад (или оставят только льготу «100 баллов», убрав льготу «БВИ»).

Однако отчаиваться не надо. Я не думаю, что крупные, массовые, престижные олимпиады престижных вузов пострадают от рук Васильевой. Если вы твердо решили готовиться к олимпиадам по математике, то властью, данной мне Бильдербергским клубом, я советую вам поставить минимальную цель – диплом III степени олимпиады 2 уровня, и максимальную – диплом I степени олимпиады 1 уровня. И, соответственно, обратить внимание на олимпиады «Физтех» и «Ломоносов» по математике. Обязательных книг для олимпиады «Физтех» всего лишь две:

1) Методическое пособие по математике для учащихся старших классов и абитуриентов / Под ред. проф. М.И. Шабунина. (6-е изд., испр.) – М.: Физматкнига, 2018;

2) Математика: пособие для поступающих в вузы / М.И. Шабунин. – 7-е изд., испр. и доп. – М.: Лаборатория знаний, 2017.

Желаю всяческих успехов и счастливого 11-го класса!