Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

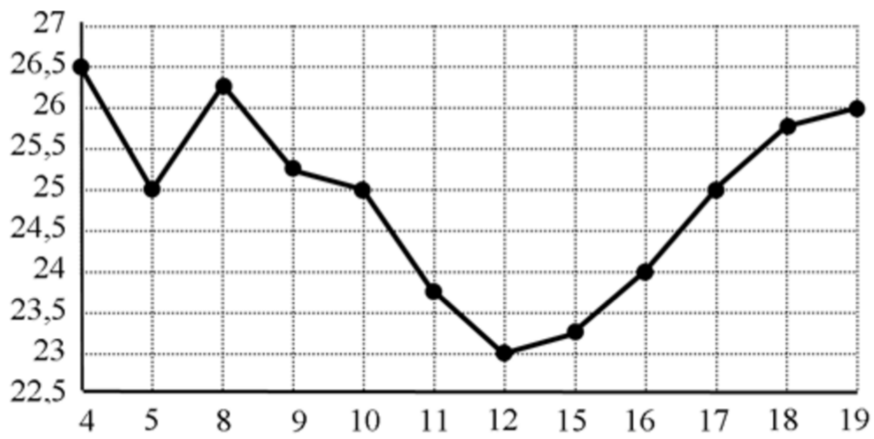
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 7 недель?

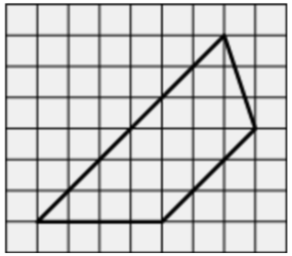
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов составила 24 доллара за баррель.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

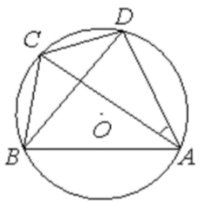
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\lg(x+11)=1.$

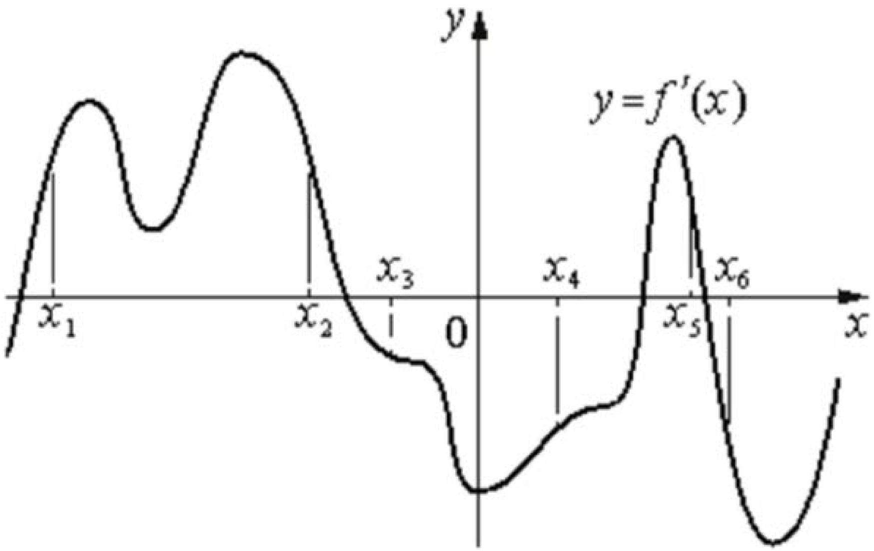
Ответ: ___________________________.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 82°, угол ABD равен 47°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



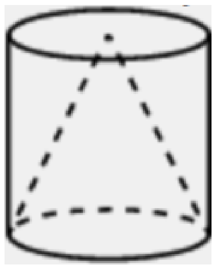
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y=f`(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ___________________________.

8 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 162.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180506

9 Найдите значение выражения

$7\sqrt{2}\sin\frac{15\pi}{8}\cdot\cos\frac{15\pi}{8}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 20$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$.

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: ___________________________.

11 Первый сплав содержит 5% меди, второй – 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y = (x+5)^2\cdot e^{2-x}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

15 Решите неравенство

$\frac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\frac{1}{3^x-2}$.

16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 10%.
В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 1$$
на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180506

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	17
2	16
3	18
4	0,5
5	-1
6	35
7	3
8	54
9	-3,5
10	24
11	18
12	-3
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \frac{19\pi}{4}$
14	3,75
15	$(-\infty; 0] \cup (\log_3 2\,; 1)$
16	$\frac{3}{4}$
17	21
18	$\left(\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right)$
19	а) нет, б) нет, в) да

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Решение:

а)

$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}-2\pi+x\right)\cdot\sin x=\cos x$$

$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi+x\right)\cdot\sin x=\cos x$$

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$$

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x=\cos x$$
$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x-\cos x=0$$

$\cos x \cdot \left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$	$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ $\sqrt{2}\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Если $n = 4$, то $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2} \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Если $n = 5$, то $x = \frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{11\pi}{2} \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Если $n = 6$, то $x = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Подберём корни для $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4} \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{3\pi}{4} + 6\pi = \frac{27\pi}{4} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \frac{19\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

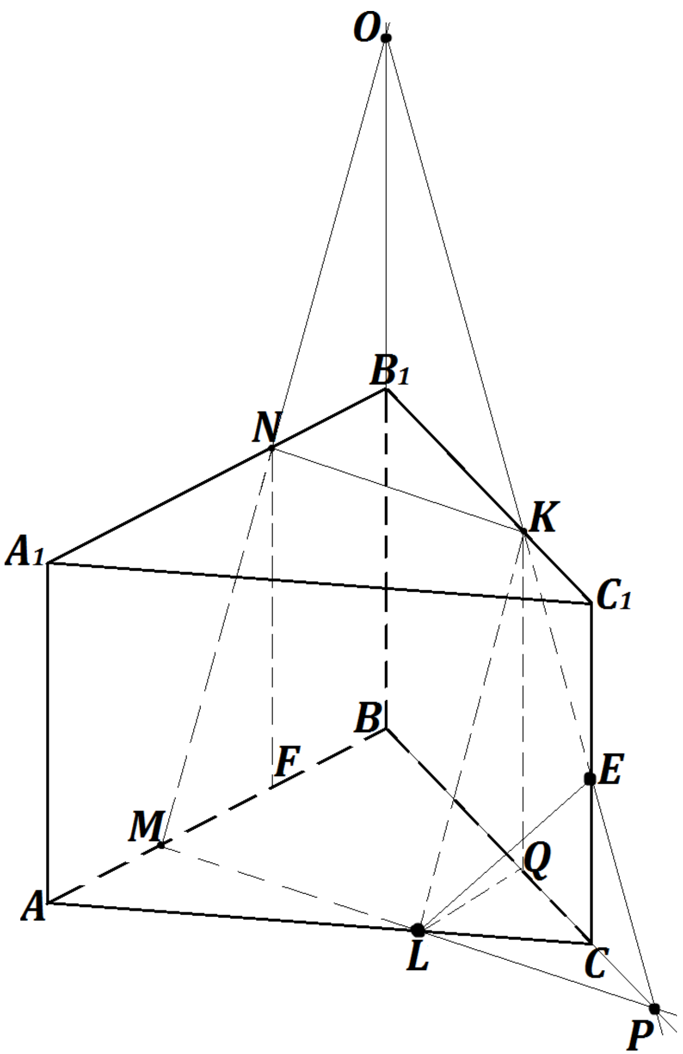
14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Решение:

а)



Построим сечение:
Построим прямую KN, т.к. точки K и N лежат в одной плоскости
Построим прямую MN, т.к. точки M и N лежат в одной плоскости
Пусть $MN \cap BB_1 = O$
Построим прямую KO, т.к. точки K и O лежат в одной плоскости
Пусть $KO \cap CC_1 = E$
Пусть $KO \cap BC = P$
Построим прямую MP, т.к. точки M и P лежат в одной плоскости

$MP \cap AC = L$
$MNKL -$ четырёхугольник, являющийся сечением призмы плоскостью MNK

Найдём все стороны $MNKL$:
По теореме косинусов:
$ML^2 = AM^2 + AL^2 - 2 \cdot AM \cdot AL \cdot \cos A$
$ML^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60$
$ML^2 = 1 + 4 - 2 = 3$
$ML = \sqrt{3}$

$KN^2 = B_1N^2 + B_1K^2 - 2 \cdot B_1N \cdot B_1K \cdot \cos B_1$
$KN^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60$
$KN^2 = 1 + 4 - 2 = 3$
$KN = \sqrt{3}$

Пусть $F -$ основание перпендикуляра из точки N на прямую AB
Пусть $Q -$ основание перпендикуляра из точки K на прямую BC

$MN = \sqrt{NF^2 + MF^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)
$KL = \sqrt{QK^2 + QL^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

Итак, все стороны четырёхугольника $MNKL$ равны, докажем равенство диагоналей:

$LN = \sqrt{NF^2 + FL^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)
$KM = \sqrt{QK^2 + QM^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)

=>
$MNKL -$ квадрат
■

б)
$S_{\text{сечения}} = S_{MNKL} + S_{EKL}$
$S_{MNKL} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

Найдём площадь треугольника EKL:

Заметим, что в $\triangle B_1NK$ выполняется теорема Пифагора:

$B_1K^2 = B_1N^2 + NK^2$

$2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$

$4 = 1 + 3$

$4 = 4$

=> $\triangle B_1NK -$ прямоугольный и $\angle B_1NK = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

$\angle BMP = 90°$ (т.к. это соответственные углы)

$\angle QLP = 90°$ (т.к. это соответственные углы)

$\angle CLP = 90 - 60 = 30°$

$\angle LCP = 180 - 60 = 120°$ (т.к. это смежные углы)

$\angle LPC = 180 - 120 - 30 = 30°$

=> $\triangle LCP -$ равнобедренный и $LC = CP = 1$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках KPQ и ECP

$$\frac{QK}{EC} = \frac{QP}{CP}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{EC} = \frac{1+1}{1}$$

$$EC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

=>

$E -$ середина CC_1

$$EK = \sqrt{C_1K^2 + C_1E^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$EL = \sqrt{CL^2 + CE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\triangle ELK -$ равнобедренный

Пусть $EG -$ высота $\triangle ELK$

$$GK = \frac{1}{2} \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$EG = \sqrt{EK^2 - GK^2} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{EKL} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$S_{\text{сечения}} = S_{MNKL} + S_{EKL} = 3 + 0{,}75 = 3{,}75$$

Ответ: 3,75

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \le 1 + \frac{1}{3^x - 2}.$$

Решение:

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t-1}{t-3} \le 1 + \frac{1}{t-2}$$

$$\frac{t-1}{t-3} - \frac{1}{t-2} - 1 \le 0$$

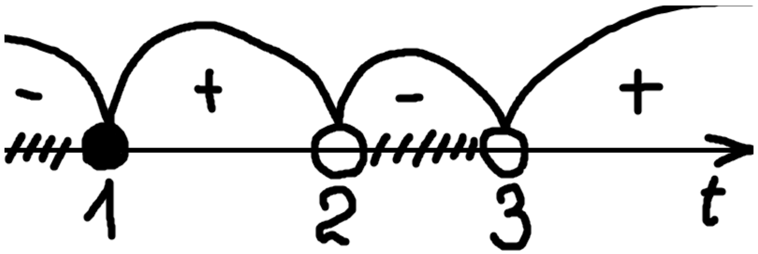
$$\frac{(t-1)(t-2) - 1 \cdot (t-3) - 1 \cdot (t-3)(t-2)}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t^2 - 3t + 2 - t + 3 - (t^2 - 5t + 6)}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t^2 - 3t + 2 - t + 3 - t^2 + 5t - 6}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t-1}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$t-1=0$ $t=1$	$(t-3)(t-2) \neq 0$ $t \neq 3$ $t \neq 2$



$t \le 1$ $3^x \le 1$ $3^x \le 3^0$ $x \le 0$	$2 < t < 3$ $3^{\log_3 2} < 3^x < 3^1$ $\log_3 2 < x < 1$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_3 2\,; 1)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

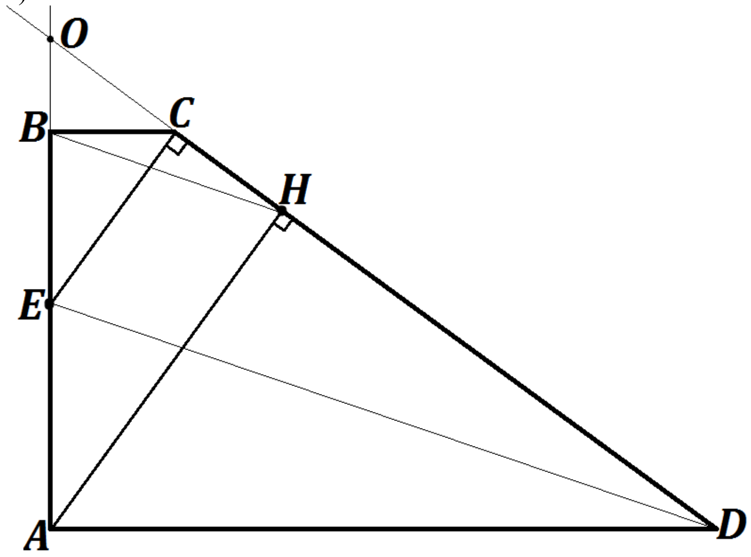
16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Решение:

а)



Пусть $AB \cap CD = O$

BH будет параллельна ED, если треугольник OBH будет подобен треугольнику OED

У этих треугольников есть общий угол, поэтому для второго признака подобия осталось получить тождество:

$$\frac{OD}{OH} = \frac{OE}{OB}$$

$\triangle BCO \sim \triangle CEO \sim \triangle AOH \sim \triangle AOD$ по двум углам $\left(\begin{matrix} 90° \\ \angle O - \text{общий} \end{matrix}\right)$

Запишем отношение прилежащего к углу O катета к гипотенузе в каждом из треугольников:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OE} = \frac{OH}{AO} = \frac{OA}{OD}$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD}$$
=>
$$OC \cdot OA = OB \cdot OD$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OH}{AO}$$
=>
$$OC \cdot OA = OE \cdot OH$$

=>
$$OB \cdot OD = OE \cdot OH \qquad \Big| : OB$$

$$OD = \frac{OE \cdot OH}{OB} \qquad \Big| : OH$$

$$\frac{OD}{OH} = \frac{OE}{OB}$$

=>
$\triangle OBH \sim \triangle OED$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
$$\begin{pmatrix} \dfrac{OD}{OH} = \dfrac{OE}{OB} \\ \angle O - \text{общий} \end{pmatrix}$$

=>
$BH \parallel ED$
■

б)
Искомое отношение BH к ED – это коэффициент подобия треугольников OBH и OED

$\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 120 - 90 = 30°$
$\angle OCB = \angle OCE - \angle BCE = 90 - 30 = 60°$
$\angle BOC = 180 - \angle OBC - \angle OCB = 180 - 90 - 60 = 30°$
$\angle OEC = 180 - \angle OCE - \angle EOC = 180 - 90 - 30 = 60°$

$$\frac{BH}{ED} = \frac{OB}{OE}$$

Выразим OB и BE через BC

$$\operatorname{tg} \angle OCB = \frac{OB}{BC}$$
$$\operatorname{tg} 60° = \frac{OB}{BC}$$
=>
$$OB = BC \cdot \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \angle BEC = \frac{BC}{BE}$$
$$\operatorname{tg} 60° = \frac{BC}{BE}$$
=>
$$BE = \frac{BC}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OB}{OB + BE} = \frac{BC \cdot \sqrt{3}}{BC \cdot \sqrt{3} + \frac{BC}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{4}$$

=>
$$\frac{BH}{ED} = \frac{3}{4}$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

перечисленных выше	
Максимальный балл	3

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 10%.
В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей?

Решение:

Если продать бумаги в конце 1-го года, то за оставшиеся 24 года сумма на счёте будет: $1 \cdot 1{,}1^{24}$
Если в конце 2-го, то: $4 \cdot 1{,}1^{23}$
Если в конце 3-го, то: $9 \cdot 1{,}1^{22}$
Если в конце 4-го, то: $16 \cdot 1{,}1^{21}$
Если в конце 5-го, то: $25 \cdot 1{,}1^{20}$
Если в конце 6-го, то: $36 \cdot 1{,}1^{19}$
Если в конце 7-го, то: $49 \cdot 1{,}1^{18}$
Если в конце 8-го, то: $64 \cdot 1{,}1^{17}$
Если в конце 9-го, то: $81 \cdot 1{,}1^{16}$
Если в конце 10-го, то: $100 \cdot 1{,}1^{15}$
Если в конце 11-го, то: $121 \cdot 1{,}1^{14}$
Если в конце 12-го, то: $144 \cdot 1{,}1^{13}$
Если в конце 13-го, то: $169 \cdot 1{,}1^{12}$
Если в конце 14-го, то: $196 \cdot 1{,}1^{11}$
Если в конце 15-го, то: $225 \cdot 1{,}1^{10}$
Если в конце 16-го, то: $256 \cdot 1{,}1^{9}$
Если в конце 17-го, то: $289 \cdot 1{,}1^{8}$
Если в конце 18-го, то: $324 \cdot 1{,}1^{7}$
Если в конце 19-го, то: $361 \cdot 1{,}1^{6}$
Если в конце 20-го, то: $400 \cdot 1{,}1^{5}$
Если в конце 21-го, то: $441 \cdot 1{,}1^{4}$
Если в конце 22-го, то: $484 \cdot 1{,}1^{3}$
Если в конце 23-го, то: $529 \cdot 1{,}1^{2}$
Если в конце 24-го, то: $576 \cdot 1{,}1^{1}$
Если в конце 25-го, то: $625 \cdot 1{,}1^{0}$

Сравним суммы на счёте в конце 20-го, 21-го и 22-го

В конце 20-го года	В конце 21-го года	В конце 22-го года
$400 \cdot 1{,}1^5$ $400 \cdot 1{,}21 \cdot 1{,}1^3$ 484	$441 \cdot 1{,}1^4$ $441 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1^3$ $485{,}1$	$484 \cdot 1{,}1^3$ $484 \cdot 1{,}1^3$ 484

=>
продать в конце 21 года выгоднее всего

Ответ: 21

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 1$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение:

Решим графически:

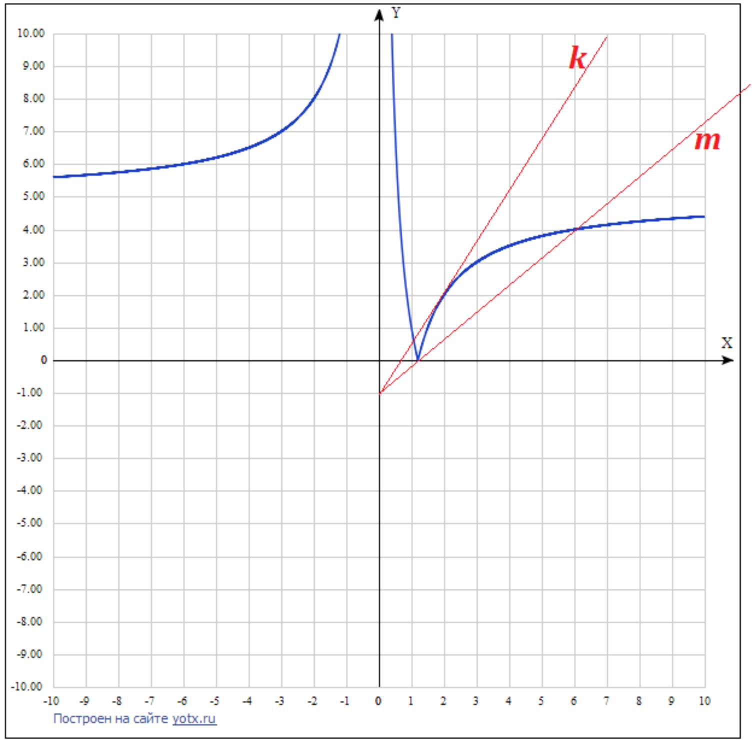
Построим $y = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$ (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

Уравнение $y = ax - 1$ задаёт множество прямых, проходящих через точку $(0; -1)$

Если $a = 1$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $a < 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая в 4-й четверти будет располагаться ниже оси Ox)
Если $a = 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая станет параллельна оси абсцисс)

Пусть
m – прямая, проходящая через точку $\left(\frac{6}{5};0\right)$, т.е. через точку «перелома» гиперболы
k – прямая, проходящая через точку касания гиперболы

Проведём прямые m и k:



Гипербола в точке касания – это гипербола с отрицательным коэффициентом, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные

$$y = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$$

$y = -\frac{6}{x} + 5$ – гипербола при $x > \frac{6}{5}$

Графики имеют три общие точки, если прямые $y = ax - 1$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми m и k, найдём значения параметров a, соответствующих этим прямым:

Найдём значение параметра a у прямой m:
$y = ax - 1$ проходит через т. $\left(\frac{6}{5};0\right)$

$$0 = a \cdot \frac{6}{5} - 1$$
$$1 = \frac{6}{5}a$$
$$a = \frac{5}{6}$$

Найдём значение параметра a у прямой k:
$y = ax - 1$ является касательной к гиперболе $-\frac{6}{x} + 5$

Условие касания функции и прямой

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ax-1)' = \left(-\frac{6}{x} + 5\right)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (-6 \cdot x^{-1} + 5)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6}{x^2} \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 5 \end{cases}$$

Подставим значение a под второе уравнение системы:

$$\frac{6}{x^2} \cdot x - 1 = -\frac{6}{x} + 5$$

$\frac{6}{x} - 1 = -\frac{6}{x} + 5$

$\frac{12}{x} = 6$

$x = 2$

$a = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{2^2} = \frac{3}{2}$

Если $a = \frac{5}{6}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $a = \frac{3}{2}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой

Ответ: $\left(\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение:

Разложим 720 на простые множители:

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 1$
а)
Пусть
b_1 – первый член геометрической прогрессии
q – знаменатель геометрической прогрессии ($q \neq 1$)

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = 720$

${b_1}^5 q^{10} = 720$

Пусть
${b_1}^5 = 1^5$
=>
$b_1 = 1$

Но q^{10} мы подобрать не сможем, используя делители числа 720, т.к. среди этих делителей нет десятой степени какого-либо числа
=>
Нет

б)
Пусть
k – число, не входящее в геометрическую прогрессию

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot k = 720$

${b_1}^4 q^6 \cdot k = 720$

Пусть
$b_1{}^4 = 1^4$
=>
$b_1 = 1$

Но q^6 мы подобрать не сможем, используя делители числа 720, т.к. среди этих делителей нет шестой степени какого-либо числа
=>
Нет

в)
Пусть
k — первое число, не входящее в геометрическую прогрессию
m — второе число, не входящее в геометрическую прогрессию

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot k \cdot m = 720$

$b_1{}^3 q^3 \cdot k \cdot m = 720$

Пусть
$b_1{}^3 = 1^3$
=>
$b_1 = 1$

$q^3 = 2^3$
=>
$q = 2$

$k = 2 \cdot 3^2 = 18$
$m = 5$

Получаем пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и первые три образуют геометрическую прогрессию:
1 2 4 18 5

=>
Да

Ответ: а) нет, б) нет, в) да

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4