Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

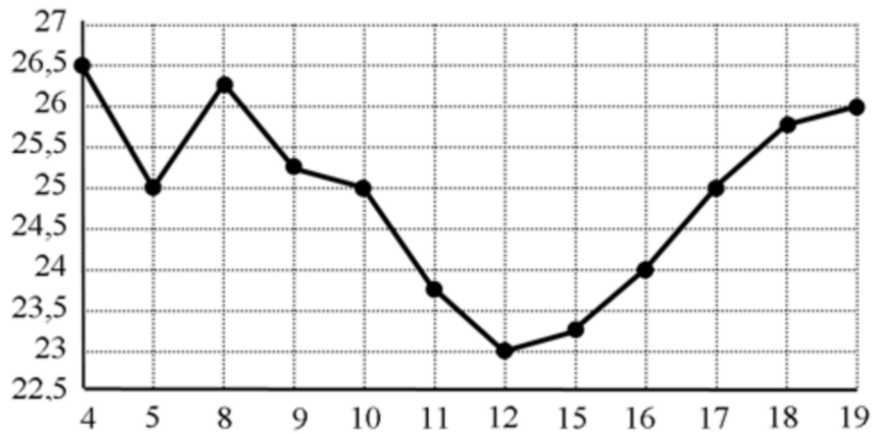
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В доме, в котором живёт Петя, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Петя живёт в квартире 45. На каком этаже живёт Петя?

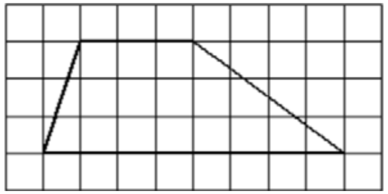
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ____________________________.

4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов меньше 2.

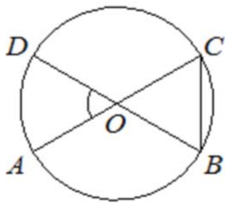
Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения

$36^{x-5} = \frac{1}{6}$.

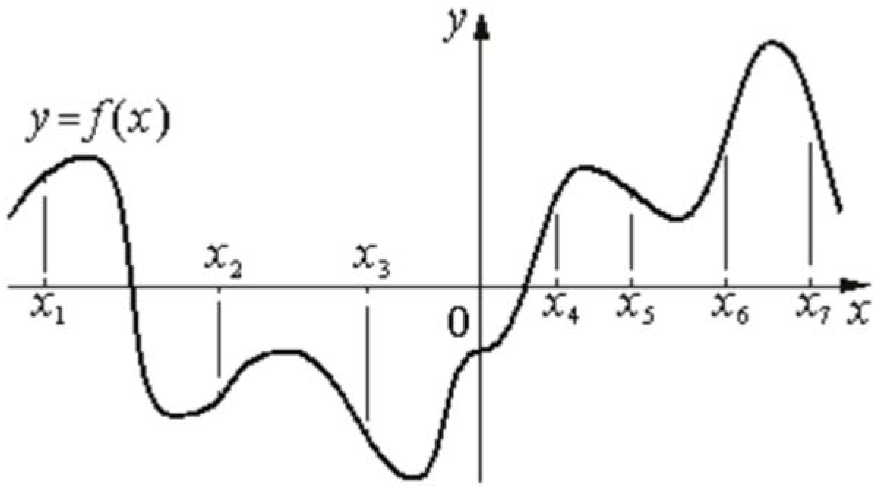
Ответ: ____________________________.

6 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 56°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ____________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 500 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,2 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.

Ответ: ____________________________.

9 Найдите значение выражения

$12\sqrt{2}\cos(-225°)$.

Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180429

10 Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2\alpha$, где m – масса (в кг), v – скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

11 Один мастер может выполнить заказ за 30 часов, а другой – за 15 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции
$y = -\frac{x}{x^2 + 256}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство
$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40.$$

16 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что
$BM : MC = 1 : 3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$(6\sin x - 2 - 3a)\cdot\sin x + 3{,}5\cos 2x + 0{,}5 = 0$
имеет хотя бы один корень.

19 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180429

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	8
2	23
3	16,5
4	0,5
5	4,5
6	68
7	4
8	100
9	-12
10	60
11	10
12	16
13	а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $-\frac{11\pi}{3}$
14	$8+2\sqrt{2}$
15	$\left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2};\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$
16	96
17	20
18	$\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$
19	а) Можно, б) Нельзя, в) 39

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение
$\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$

Решение:
а)

Косинус двойного угла
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$
$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

Пусть $\cos x = t$
$2t^2 + 3t - 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = -2$ (не подходит)

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{3} - 6\pi = -\frac{17\pi}{3} \notin \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \notin \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \notin \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{13\pi}{3} \notin \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{11\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

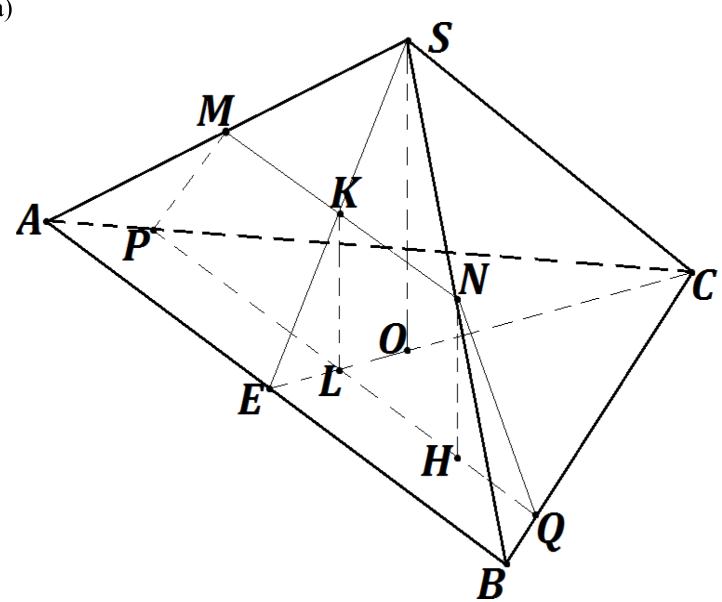
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение:

а)



Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:

Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$

Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$

Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости

Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости

$MNQP$ – сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:
Т.к. K — середина SE и $KL \parallel SO$, то KL — средняя линия $\triangle SOE$
=> L — середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE — медиана в $\triangle ABC$, то:
$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$
$$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$
$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$
■

б)
Найдём все стороны и высоту равнобедренной трапеции $MNQP$:
$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (т.к. MN — средняя линия $\triangle ABS$)
$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 6 = 5$ (т.к. $\frac{CL}{LE} = 5:1$)
$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{6}{\sqrt{3}}$$
$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2$ (по теореме Пифагора)
$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (т.к. KL — средняя линия $\triangle SOE$)
Пусть NH — высота трапеции, тогда:
$$HQ = \frac{PQ - MN}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$
Рассмотрим $\triangle NHQ$ — прямоугольный:
$NQ = MP = \sqrt{HQ^2 + NH^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
$P = NQ + MP + MN + PQ = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 3 + 5 = 8 + 2\sqrt{2}$
Ответ: б) $8 + 2\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство
$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40.$$

Решение:

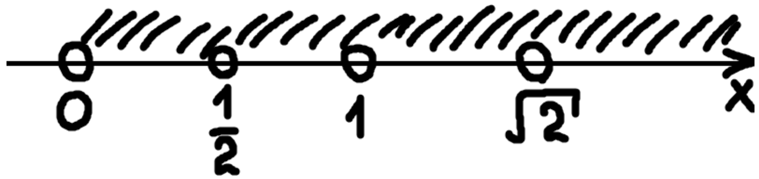
ОДЗ:
1.
$x > 0$

2.
$x \neq 1$

3.
$2x \neq 1$
$x \neq \frac{1}{2}$

4.
$2x^{-2} \neq 1$
$x^{-2} \neq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x^2} \neq \frac{1}{2}$
$x^2 \neq 2$
$x \neq \pm\sqrt{2}$

Объединим ОДЗ:



$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40$$

Задача: привести каждый логарифм к основанию x

Свойство логарифмов

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$$\frac{\log_x 2\,x^{-1} \cdot \log_x 2\,x^2}{\frac{1}{\log_x 2x} \cdot \frac{1}{\log_x 2x^{-2}}} < 40$$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

$$\frac{(\log_x 2 + \log_x x^{-1}) \cdot (\log_x 2 + \log_x x^2)}{\frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x^{-2})}} < 40$$

$$\frac{(\log_x 2 - 1) \cdot (\log_x 2 + 2)}{\frac{1}{(\log_x 2 + 1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2 - 2)}} < 40$$

$(\log_x 2 - 1)(\log_x 2 + 1) \cdot (\log_x 2 + 2)(\log_x 2 - 2) < 40$

Пусть $\log_x 2 = t$

$(t-1)(t+1) \cdot (t+2)(t-2) < 40$

$(t^2 - 1) \cdot (t^2 - 4) - 40 < 0$

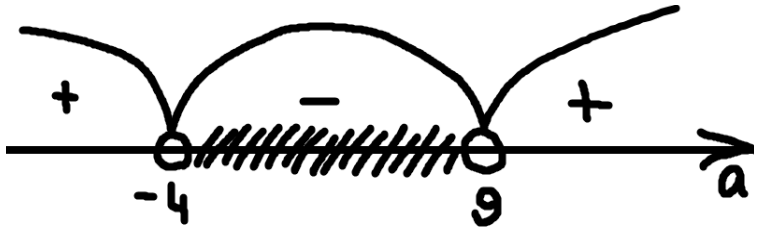
$t^4 - 5t^2 + 4 - 40 < 0$

$t^4 - 5t^2 - 36 < 0$

Пусть $t^2 = a$

$a^2 - 5a - 36 < 0$
$a^2 - 5a - 36 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169$
$a_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9$

$a_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4$



$-4 < a < 9$
$-4 < t^2 < 9$
=>
$t^2 < 9$
$t^2 - 9 < 0$
$(t-3)(t+3) < 0$

$-3 < t < 3$
$-3 < \log_x 2 < 3$

$\begin{cases} \log_x 2 > -3 \\ \log_x 2 < 3 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_x 2 > \log_x x^{-3} \\ \log_x 2 < \log_x x^3 \end{cases}$

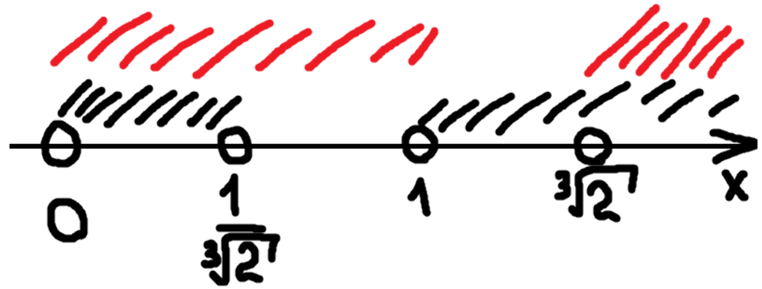
Решим каждое неравенство, а потом объединим решения:
1.
$\log_x 2 > \log_x x^{-3}$

$\begin{cases} x > 1 \\ 2 > x^{-3} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{1}{x^3} < \dfrac{2}{1} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ 1 < 2x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x^3 > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ => $x > 1$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 < x^{-3} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^3} > \dfrac{2}{1} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ => $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

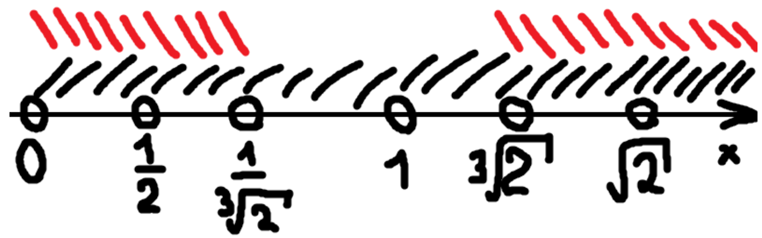
2.
$\log_x 2 < \log_x x^3$

$\begin{cases} x > 1 \\ 2 < x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x > \sqrt[3]{2} \end{cases}$ => $x > \sqrt[3]{2}$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 > x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \sqrt[3]{2} \end{cases}$ => $0 < x < 1$

Оценим значение $\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$
$\sqrt[3]{2{,}197} = 1{,}3$
=>
$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$



Объединим получившийся ответ с ОДЗ



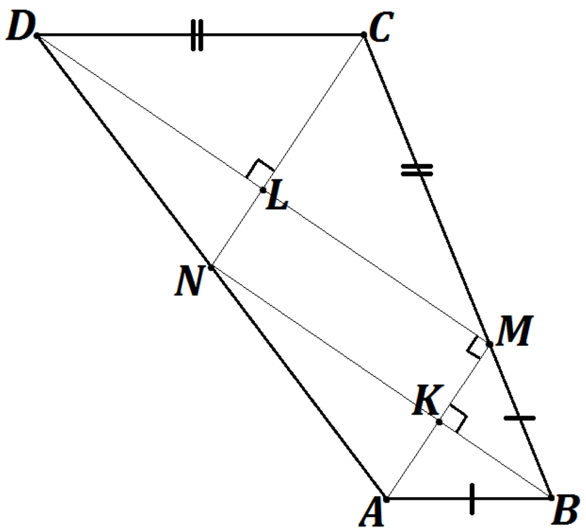
Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC = 1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Решение:
а)



Проведём биссектрису BK в $\triangle ABM$
BK — высота и медиана
(по свойству равнобедренного треугольника)

Пусть $BK \cap AD = N$

$BK \perp AM$
(т.к. BK — высота в $\triangle ABM$)
$MD \perp AM$
(по условию)
=>
$BK \parallel MD$
=>
$BN \parallel MD$
=>
$KN \parallel MD$

K — середина AM
(т.к. BK — медиана в $\triangle ABM$)
=>
KN — средняя линия в $\triangle ADM$
=>
N — середина AD

Аналогично,

Проведём биссектрису CL в $\triangle CDM$
CL — высота и медиана
(по свойству равнобедренного треугольника)

Пусть $CL \cap AD = E$

$CL \perp DM$
(т.к. CL — высота в $\triangle CDM$)
$AM \perp DM$
(по условию)
=>
$CL \parallel AM$
=>
$CE \parallel AM$
=>
$EL \parallel AM$

L — середина DM
(т.к. CL — медиана в $\triangle CDM$)
=>
EL — средняя линия в $\triangle ADM$
=>
E — середина AD

=> точки N и E совпадают в середине стороны AD
■

б)
$KLMN$ – прямоугольник
(т.к. $KN \parallel LM$, $KM \parallel LN$ и $\angle KML = 90°$)

Пусть
$BM = x$
$CM = 3x$
$\angle MBK = \angle CMD$
(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)

Пусть
$\angle MBK = \alpha = \angle CMD$

$\sin\alpha = \dfrac{MK}{BM} = \dfrac{MK}{x}$
=>
$MK = x \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{ML}{CM} = \dfrac{ML}{3x}$
=>
$ML = 3x \cdot \cos\alpha$

$MK \cdot ML = 18$
$x \cdot \sin\alpha \cdot 3x \cdot \cos\alpha = 18$
$x^2 \cdot \sin 2\alpha = 12$

$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{CDM} + S_{ADM}$

$S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin\angle ABM$
$S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 2\alpha = 0{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{CDM} = \dfrac{1}{2} \cdot CM \cdot DM \cdot \sin\angle CMD$
$S_{CDM} = \dfrac{1}{2} \cdot CM \cdot 2ML \cdot \sin\angle CMD$
$S_{CDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2 \cdot 3x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 4{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{ADM} = \dfrac{AM \cdot DM}{2}$
$S_{ADM} = \dfrac{2MK \cdot 2ML}{2}$
$S_{ADM} = \dfrac{2 \cdot x \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot 3x \cdot \cos\alpha}{2} = 3x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{ABCD} = 0{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha + 4{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha + 3x^2 \cdot \sin 2\alpha$
$S_{ABCD} = 8x^2 \cdot \sin 2\alpha$
$S_{ABCD} = 8 \cdot 12 = 96$

Ответ: 96

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:
4,5 млн это 4500 тыс.
1,4 млн это 1400 тыс.
0,6 млн это 600 тыс.

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	4500	$\frac{4500}{9} = 500$	$\frac{r}{100} \cdot 4500 = 45r$
…			
9	500	500	$\frac{r}{100} \cdot 500 = 5r$

Очевидно, что наибольший годовой платёж будет в первом году, а наименьший годовой платёж будет в последнем году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение 9 лет)
=>
Наибольший годовой платёж ≤ 1400 тыс.
Наименьший годовой платёж ≥ 600 тыс.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 500 + 45r \leq 1400 \\ 500 + 5r \geq 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45r \leq 900 \\ 5r \geq 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \leq 20 \\ r \geq 20 \end{cases}$$

=>
$r = 20$
(т.к. это единственное число, подходящее под оба неравенства системы)

Ответ: 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$(6 \sin x - 2 - 3a) \cdot \sin x + 3{,}5 \cos 2x + 0{,}5 = 0$
имеет хотя бы один корень.

Решение:

Косинус двойного угла
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$6\sin^2 x - (2 + 3a) \cdot \sin x + 3{,}5 - 7\sin^2 x + 0{,}5 = 0$
$-\sin^2 x - (2 + 3a) \cdot \sin x + 4 = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$
$\sin^2 x + (2 + 3a) \cdot \sin x - 4 = 0$

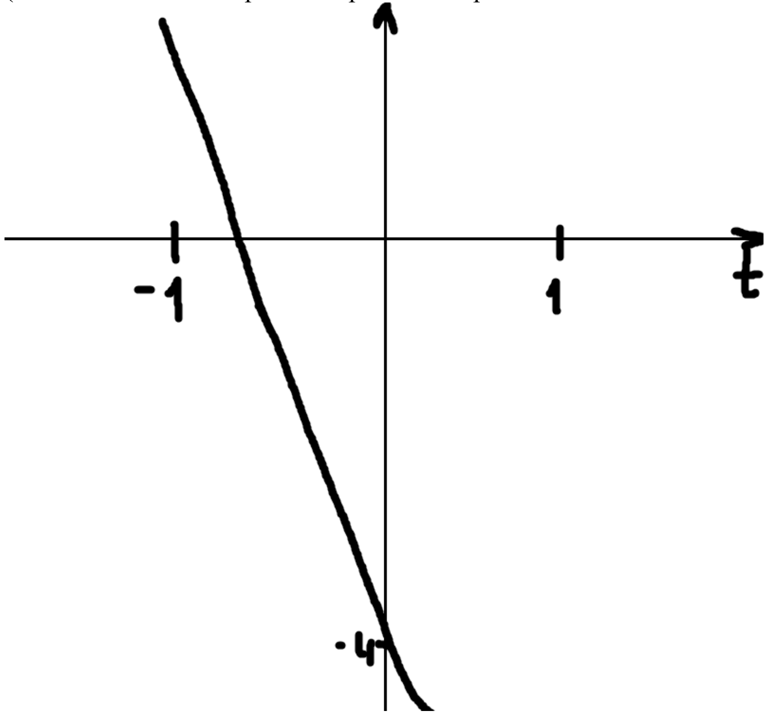
Пусть $\sin x = t$
$-1 \leq \sin x \leq 1$
=>

$-1 \le t \le 1$

Перефразируем вопрос:
Найдём все значения a, при каждом из которых уравнение
$t^2 + (2 + 3a) \cdot t - 4 = 0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $-1 \le t \le 1$

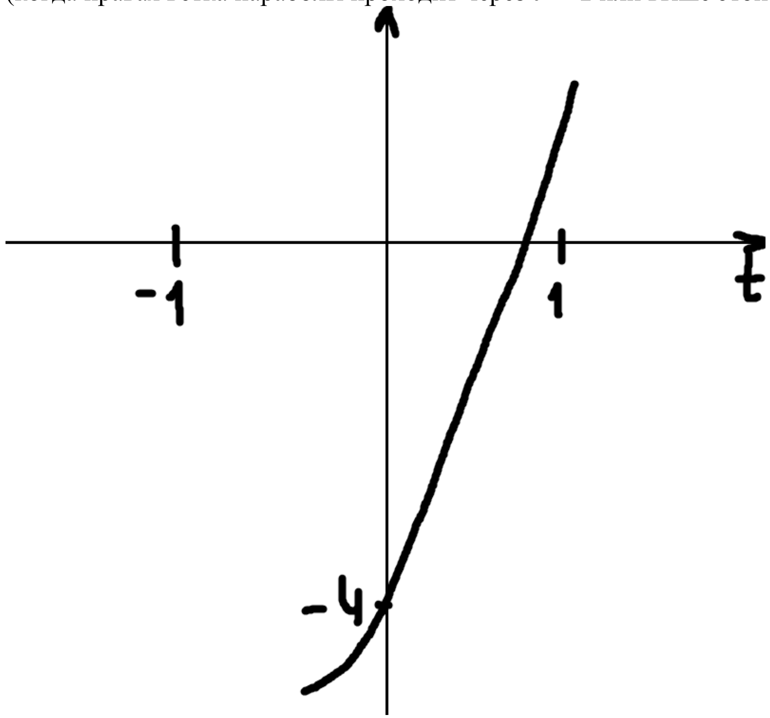
Рассмотрим квадратичную функцию:
$f(t) = t^2 + (2 + 3a) \cdot t - 4 -$ парабола (ветви вверх)
Проходит через точку $(0; -4)$

1 случай, при котором будет хотя бы одно решение, попадающее в отрезок $[-1; 1]$
(когда левая ветка параболы проходит через $t = -1$ или выше этой точки)



$f(-1) \ge 0$
$1 - 2 - 3a - 4 \ge 0$
$3a \le -5$
$a \le -\frac{5}{3}$

2 случай, при котором будет хотя бы одно решение, попадающее в отрезок $[-1; 1]$
(когда правая ветка параболы проходит через $t = 1$ или выше этой точки)



$f(1) \ge 0$
$1 + 2 + 3a - 4 \ge 0$
$3a \ge 1$
$a \ge \frac{1}{3}$

3 случай (когда парабола стартует из точки $(0; -4)$)
Не подходит, т.к. наша парабола имеет коэффициент $a = 1$
=>
такая парабола пересечёт ось Ox в точках $x = \pm 2$, т.е. решений на нужном нам отрезке не будет

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Решение:

а)
Если поместить в грузовик глыбы только одного типа, то:
1
$5000:800 = 6{,}25$
=>
6 (800 килограммовых глыб) поместится в один грузовик
=>
Для перевозки 50 штук таких глыб потребуется 9 грузовиков
2
$5000:1000 = 5$
=>
5 (1000 килограммовых глыб) поместится в один грузовик
=>
Для перевозки 60 штук таких глыб потребуется 12 грузовиков
3
$5000:1500 \approx 3{,}33\ldots$
=>
3 (1500 килограммовые глыбы) поместится в один грузовик
=>
Для перевозки 60 штук таких глыб потребуется 20 грузовиков

Итого:
Для перевозки всех глыб в указанном примере потребовалось:
$9 + 12 + 20 = 41$ (грузовик)
=>
Можно

б)
Найдём суммарную массу глыб:
$50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190000$ (кг)

Найдём суммарную грузоподъёмность грузовиков:
$38 \cdot 5000 = 190000$ (кг)

=>
Чтобы все глыбы было возможно увезти требуется, чтобы все 38 грузовиков были загружены полностью

Если помещать по одной 1500 килограммовой глыбе в грузовик, то грузовик невозможно будет загрузить полностью
Если помещать по три 1500 килограммовых глыбы в грузовик, то грузовик невозможно будет загрузить полностью
=>
Для перевозки 1500 килограммовых глыб нужно в каждый грузовик положить две такие глыбы, только тогда их будет возможно загрузить полностью

=>
30 грузовиков будут заполнены на $\frac{3000}{5000}$ и в каждый из тридцати грузовиков нужно добавить по две 1000 килограммовые глыбы, чтобы загрузить полностью эти 30 грузовиков

Итак, 30 грузовиков заполнены полностью, причём израсходованы все 1000 килограммовые и все 1500 килограммовые глыбы

Оставшиеся 8 грузовиков нужно загрузить полностью 800 килограммовыми глыбами, а это сделать невозможно, не разрезая их
=>
Нельзя

в)
В предыдущем пункте доказано, что в 38 грузовиков все глыбы не уместить.
Попробуем уместить все глыбы в 39 грузовиков:

Стараемся загружать грузовики полностью пока это возможно

10 грузовиков, каждый из которых заполнен:
пятью 800 килограммовыми и одной 1000 килограммовой
=>
Осталось разместить 50 1000 килограммовых и 60 1500 килограммовых по 29 грузовикам

25 грузовиков, каждый из которых заполнен:
двумя 1500 килограммовыми и двумя 1000 килограммовыми
=>
Осталось разместить 10 1500 килограммовых по 4 грузовикам

3 грузовика, каждый из которых заполнен:
тремя 1500 килограммовыми
=>
Осталось разместить 1 1500 килограммовую в 1 грузовик, делаем это

=>
39 - наименьшее количество грузовиков, которое потребуется для заданной цели

Ответ: а) Можно, б) Нельзя, в) 39

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4