Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

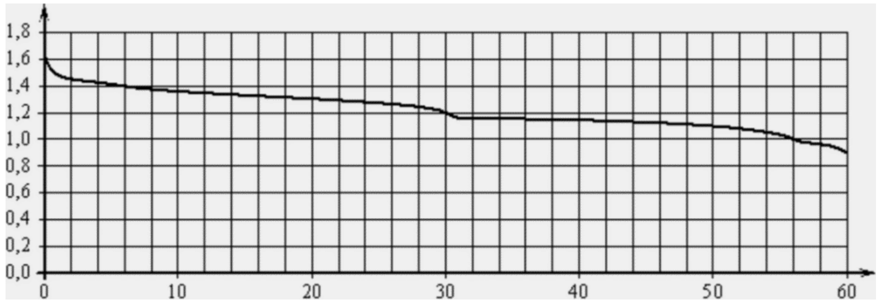
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 20 копеек. Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 669 киловатт-часов, а 1 декабря показывал 846 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь? Ответ дайте в рублях.

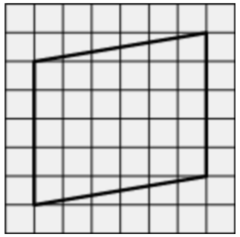
Ответ: ___________________________.

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение с 6-го по 56-й час работы фонарика.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

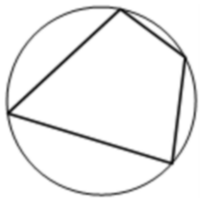
4 На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ___________________________.

5 Решите уравнение
$\sqrt{40+3x}=x.$
Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

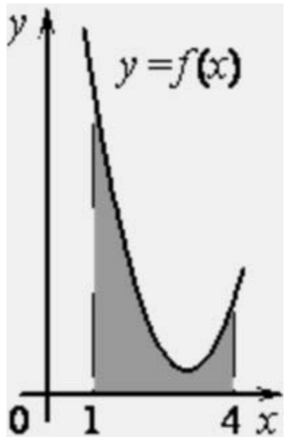
Ответ: ___________________________.

6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 56° и 77°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



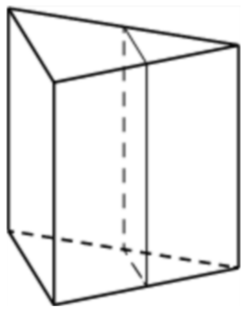
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+14x-10-$ одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ___________________________.

8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{24}}.$$

Ответ: ___________________________.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 96 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = \dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-12;-1]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\log_7(2\cos^2 x + 3\cos x - 1) = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

15 Решите неравенство

$$9\log_{12}(x^2-3x-4) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

16 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 2$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180422

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180422

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	212,4
2	0,4
3	30
4	0,2
5	8
6	103
7	6
8	74
9	2
10	15
11	18
12	-10
13	а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\frac{7\pi}{3}$
14	2,4
15	$[-8;-1)\cup(4;16]$
16	$\frac{1}{2}$
17	11 млн
18	$\{7-3\sqrt{2};4;1+3\sqrt{2}\}$
19	а) да, например, для числа 140, б) Нет, в) 11

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение
$\log_7(2\cos^2 x+3\cos x-1)=0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение:
а)

Определение логарифма
Если $\log_a b=c$, то:
$a^c=b$

$7^0=2\cos^2 x+3\cos x-1$
$1=2\cos^2 x+3\cos x-1$
$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$

Пусть $\cos x=t$

$2t^2+3t-2=0$

$D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3 + 5}{4} = \dfrac{1}{2}$

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3 - 5}{4} = -2$ (не подходит)

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{13\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

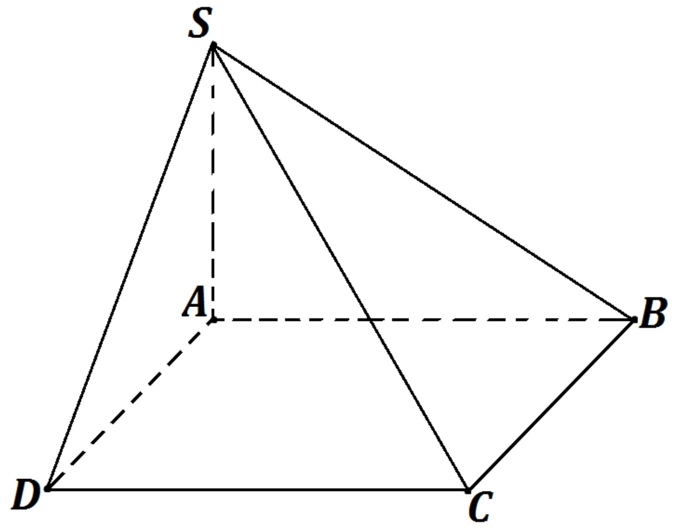
Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{7\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение:
а)



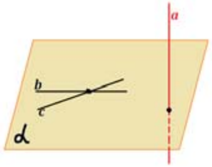
Заметим, что в $\triangle ABS$ выполняется теорема Пифагора:
$SB^2 = SA^2 + AB^2$
$5^2 = 3^2 + 4^2$
$25 = 9 + 16$
$25 = 25$
=> $\triangle ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\triangle ADS$ выполняется теорема Пифагора:
$SD^2 = SA^2 + AD^2$
$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + 6^2$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180422

$45 = 9 + 36$
$45 = 45$
$\Rightarrow \triangle ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

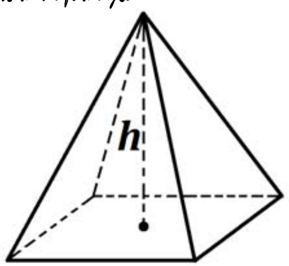


Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$\left.\begin{array}{l} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{array}\right.$ (т. к. $\triangle ABS$ и $\triangle ADS$ – прямоугольные)
$AB \cap AD = A$
$\Rightarrow SA \perp (ABC)$
$\Rightarrow SA$ – высота пирамиды
■

б)
Расстояние от вершины A до плоскости SBC – это высота пирамиды $SABC$ с основанием SBC
Пусть h – искомое расстояние

Объём пирамиды



$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$

Найдём объём пирамиды $SABC$ двумя способами:

$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AS$
$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot h$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$ (по теореме Пифагора)
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + \sqrt{52}^2} = \sqrt{61}$ (по теореме Пифагора)
Заметим, что в $\triangle SBC$ выполняется теорема Пифагора:
$SC^2 = SB^2 + BC^2$
$\sqrt{61}^2 = 5^2 + 6^2$
$61 = 25 + 36$
$61 = 61$
$\Rightarrow \triangle SBC$ – прямоугольный и $\angle SBC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 12$
$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot h = 5h$

$5h = 12$
$h = 2{,}4$

Ответ: 2,4

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$9\log_{12}(x^2 - 3x - 4) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180422

.

Решение:

ОДЗ:

1.

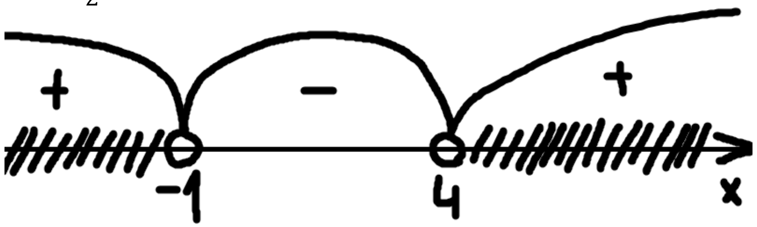
$x^2-3x-4>0$

$x^2-3x-4=0$

$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25$

$t_1=\dfrac{3+5}{2}=4$

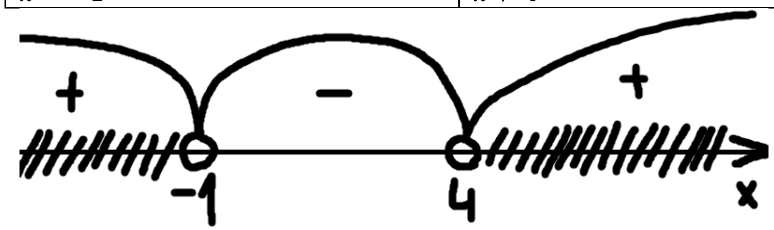
$t_2=\dfrac{3-5}{2}=-1$



2.

$\dfrac{(x+1)^9}{x-4}>0$

$x+1=0$ $x=-1$	$x-4\neq 0$ $x\neq 4$



Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$9\log_{12}(x+1)(x-4)\leq 10+\log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m=m\cdot\log_a b$

$\log_{12}(x+1)^9(x-4)^9\leq 10+\log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b+\log_a c=\log_a b\cdot c$

Вычитание логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$

$\log_{12}(x+1)^9+\log_{12}(x-4)^9\leq 10+\log_{12}(x+1)^9-\log_{12}(x-4)$

$\log_{12}(x-4)^9\leq 10-\log_{12}(x-4)$

$\log_{12}(x-4)^9+\log_{12}(x-4)\leq 10$

$\log_{12}(x-4)^{10}\leq\log_{12}12^{10}$

$(x-4)^{10}\leq 12^{10}$

=>

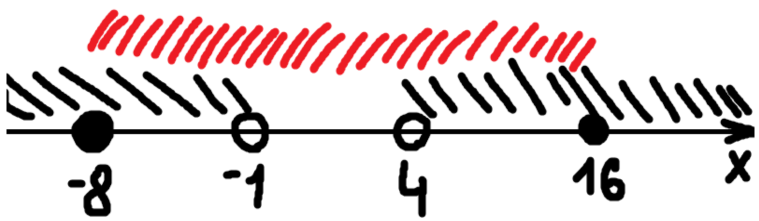
$|x-4|\leq 12$

=>

$-12\leq x-4\leq 12$

$-8\leq x\leq 16$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



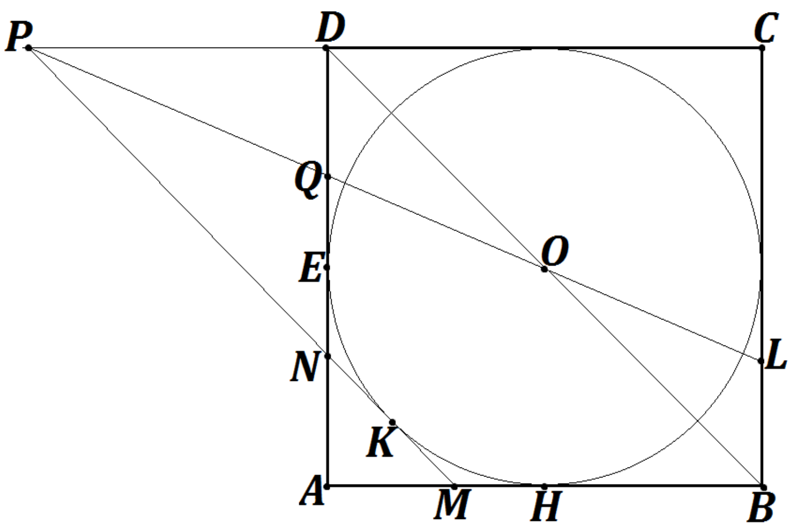
Ответ: $[-8;-1)\cup(4;16]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:2$?

Решение:
а)



Пусть
E — точка касания AD и окружности
K — точка касания MN и окружности
H — точка касания AB и окружности

$EN=NK$
$KM=MH$
(по свойству касательных)

$P_{AMN}=AM+MN+AN$
$P_{AMN}=AM+(NK+KM)+AN$
$P_{AMN}=AM+(EN+MH)+AN$
$P_{AMN}=(AM+MH)+(AN+EN)=AH+AE$
$P_{AMN}=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(AB+AD)=\frac{1}{2}\cdot 2AB=AB$
■

б)
Пусть
O — центр вписанной в квадрат окружности
$PO\cap BC=L$
$PO\cap AD=Q$

$\frac{BL}{CL}$—?

$AM:MB=1:2$
Пусть
$AM=2x$
$MB=4x$
$AD=AM+MB=2x+4x=6x$
$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\cdot 6x=3x=AH$
$EN=y=NK$

Рассмотрим $\triangle AMN$ — прямоугольный
$AM=2x$
$AN=AE-EN=3x-y$
$MH=AH-AM=3x-2x=x=KM$
$MN=NK+KM=x+y$

По теореме Пифагора:

$MN^2 = AN^2 + AM^2$
$(x+y)^2 = (3x-y)^2 + (2x)^2$
$x^2 + 2xy + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2 + 4x^2$
$12x^2 - 8xy = 0$
$4x(3x - 2y) = 0$

$4x = 0$ $x = 0$ (посторонний корень)	$3x - 2y = 0$ $3x = 2y$ $y = \frac{3}{2}x$

=>

$EN = \frac{3}{2}x$

$AN = 3x - y = 3x - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x$

$MN = x + y = x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x$

Проведём BD — диаметр квадрата

$\triangle ODQ = \triangle OBL$ по двум сторонам и углу между ними

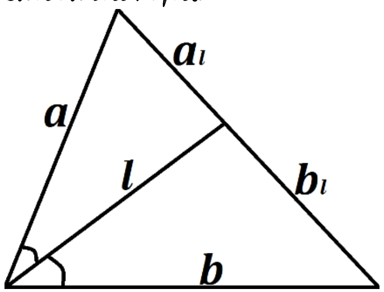
$$\left(\begin{array}{c} DO = BO \\ QO = LO \\ \angle DOQ = \angle BOL - \text{вертикальные} \end{array}\right)$$

=>

$BL = DQ$

PO — биссектриса угла P
(по свойству касательных, проведённых из одной точки)

Свойство биссектрисы



$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$

Воспользуемся свойством биссектрисы для $\triangle DPN$

$\frac{QD}{QN} = \frac{PD}{PN}$

$\triangle PDN \sim \triangle AMN$ по двум углам

$\frac{PD}{AM} = \frac{PN}{MN}$

$\frac{PD}{2x} = \frac{PN}{\frac{5}{2}x}$

$\frac{5}{2}PD = 2PN \quad \Big|: 10PN$

$\frac{PD}{4PN} = \frac{1}{5} \quad \Big| \cdot 4$

$\frac{PD}{PN} = \frac{4}{5} = \frac{QD}{QN}$

$DN = AD - AN = 6x - \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x$

=>

$QD = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2}x = 2x = BL$

=>

$CL = BC - BL = 6x - 2x = 4x$

$\frac{BL}{CL} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при	2

обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot S = 1{,}25\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}7\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}25\cdot S - 0{,}7\cdot S = 0{,}55\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}25\cdot 0{,}7\cdot S = 0{,}875\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}4\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}875\cdot S - 0{,}4\cdot S = 0{,}475\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}25\cdot 0{,}4\cdot S = 0{,}5\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	0

=>

01.04.2019	$0{,}5\cdot S - 0 = 0{,}5\cdot S$

По условию, каждая из выплат должна быть больше 5 млн рублей, получаем систему неравенств:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180422

$$\begin{cases} 0{,}55 \cdot S > 5 \\ 0{,}475 \cdot S > 5 \\ 0{,}5 \cdot S > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \dfrac{500}{55} \\ S > \dfrac{5000}{475} \\ S > \dfrac{50}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \dfrac{100}{11} \\ S > \dfrac{200}{19} \\ S > 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > 9\dfrac{1}{11} \\ S > 10\dfrac{10}{19} \\ S > 10 \end{cases}$$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S
=>
$S = 11$

Ответ: 11 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

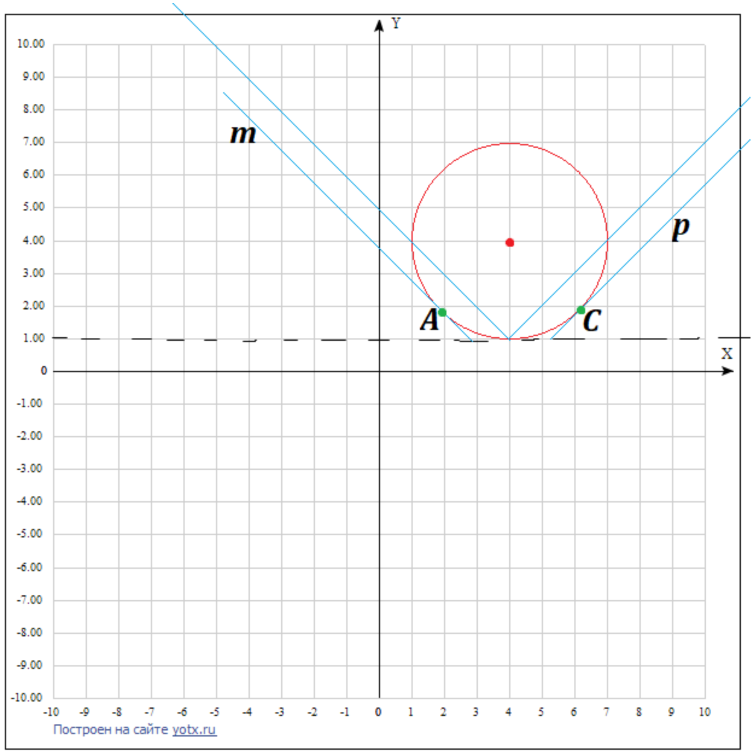
имеет ровно три различных решения.

Решение:

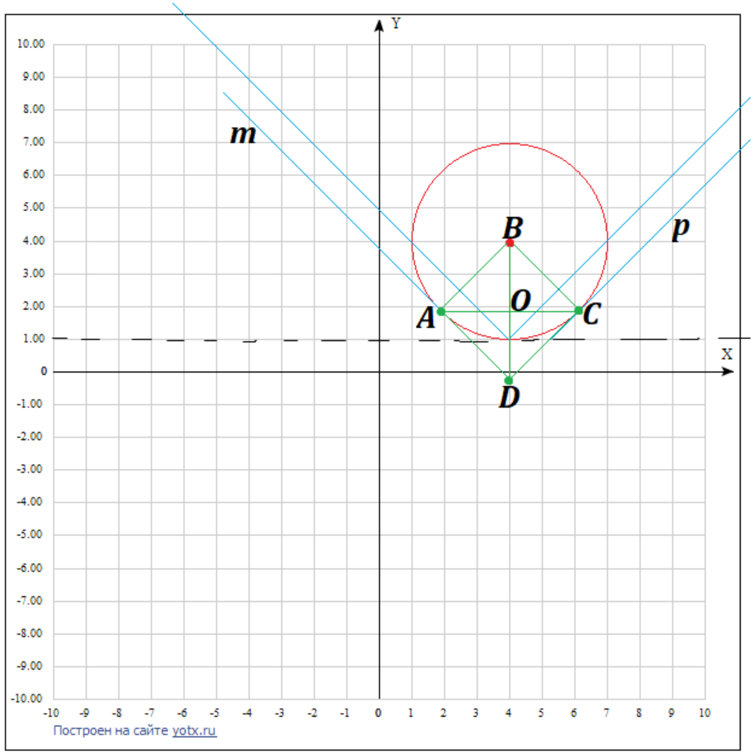
Решим графически:
Первое уравнение – окружность с центром $(4; 4)$ и радиусом 3
Второе уравнение – прямой угол с вершиной $(a; 1)$

Пусть
$m -$ прямая с $k = -1$ из семейства прямых $y = -x + a + 1$, проходящая через точку касания окружности (слева), т.е. через т. A
$p -$ прямая с $k = 1$ из семейства прямых $y = x - a + 1$, проходящая через точку касания окружности (справа), т.е. через т. C

Проведём прямые m и p



Найдём координаты точек касания:
Проведём два радиуса в точки касания, достроим квадрат и введём точки, как показано на рисунке:



$ABCD$ — это квадрат, т.к. $AB = BC$ (радиусы)
$\angle BAD = 90°$
$\angle BCD = 90°$
(по свойству касательных)

Рассмотрим $\triangle AOB$ — прямоугольный и равнобедренный
$AB = 3$
$AO = BO$
(половины диагоналей квадрата)
$AB^2 = AO^2 + BO^2$
$3^2 = AO^2 + AO^2$
$9 = 2AO^2$
$AO^2 = \frac{9}{2}$
$AO = \frac{3}{\sqrt{2}}$
=>

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180422

$OB = OC = \frac{3}{\sqrt{2}}$

=>

$\left(4 - \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – координаты точки A

$\left(4 + \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – координаты точки C

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m

$y = -x + a + 1$ проходит через т. $A\left(4 - \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$4 - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 4 + a + 1$

$a = 7 - \frac{6}{\sqrt{2}} = 7 - 3\sqrt{2}$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой p

$y = x - a + 1$ проходит через т. $C\left(4 + \frac{3}{\sqrt{2}}; 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$4 - \frac{3}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{3}{\sqrt{2}} - a + 1$

$a = 1 + \frac{6}{\sqrt{2}} = 1 + 3\sqrt{2}$

Итак,

Если $a < 7 - 3\sqrt{2}$, то пересечений 2, 1 или 0

Если $a = 7 - 3\sqrt{2}$, то 3 пересечения

Если $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$, то 4 пересечения

Если $a = 4$, то 3 пересечения

Если $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$, то 4 пересечения

Если $a = 1 + 3\sqrt{2}$, то 3 пересечения

Если $a > 1 + 3\sqrt{2}$, то пересечений 2, 1 или 0

Ответ: $a \in \{7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение:

Пусть

a – число сотен $1 \le a \le 9$
b – число десятков $0 \le b \le 9$
c – число единиц $0 \le c \le 9$

Тогда

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ – данное трёхзначное число

а)

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 28$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 28 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 28a + 28b + 28c$
$72a = 18b + 27c$

Если $a = 1$, то
$72 = 18b + 27c$

Нетрудно подобрать подходящую комбинацию:
$b = 4$
$c = 0$

=>
Может, частное числа 140 и суммы его цифр равно 28

б)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 88$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 88 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c$
$12a = 78b + 87c$

Рассмотрим варианты комбинаций b и c, начиная с наименьших:
Вариант #1
$b = 0$
$c = 0$

Тогда
$12a = 0$
Не подходит, т.к. $1 \leq a \leq 9$
Вариант #2
$b = 0$
$c = 1$

Тогда
$12a = 87$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #3
$b = 1$
$c = 0$

Тогда
$12a = 78$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #4
$b = 1$
$c = 1$

Тогда
$12a = 78 + 87$
$12a = 165$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
$1 \leq a \leq 9$
$12 \leq 12a \leq 108$
=>
дальнейшее увеличение значений b и c не имеет смысла, т.к. правая часть уравнения будет всё больше и больше
=>
Не может

в)
Подбором можно заметить, что частное числа 198 и суммы его цифр равно 11

Проверим 10
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 10$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 10a + 10b + 10c$
$90a = 9c$
$10a = c$
=>
c в 10 раз больше, чем a
=>
противоречие, т.к. a и c — цифры

Проверим 9
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 9$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 9 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 9a + 9b + 9c$
$91a + b = 8c$
=>
левая часть уравнения больше правой
=>
противоречие

Проверим 8
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 8$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 8 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 8a + 8b + 8c$

$92a + 2b = 7c$
=>
левая часть уравнения стала ещё больше правой
=>
противоречие и дальнейший перебор натуральных значений частного от числа и суммы его цифр также не даст решения
=>
11

Ответ: а) да, например, для числа 140, б) Нет, в) 11

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4