Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

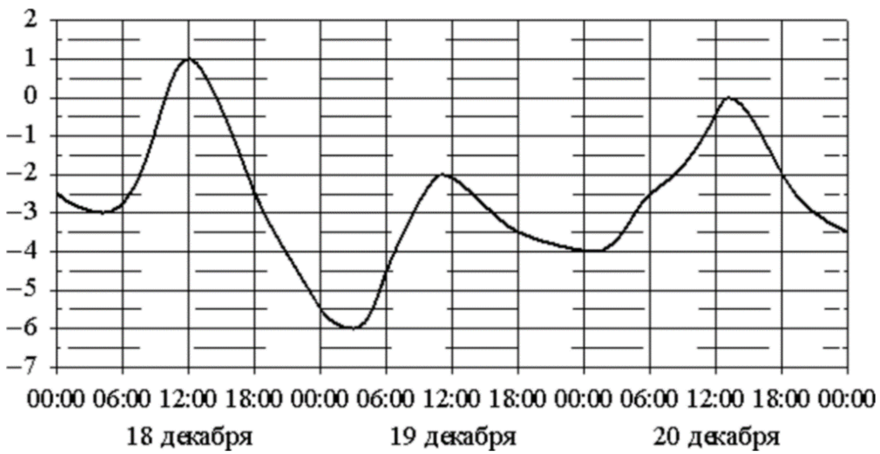
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Шоколадка стоит 31 рубль. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 рублей в воскресенье?

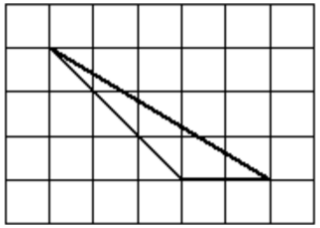
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 18 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

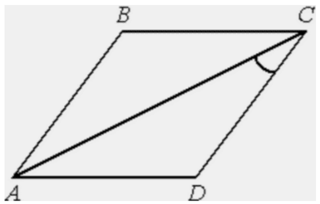
4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(x+7)^3 = 216$.

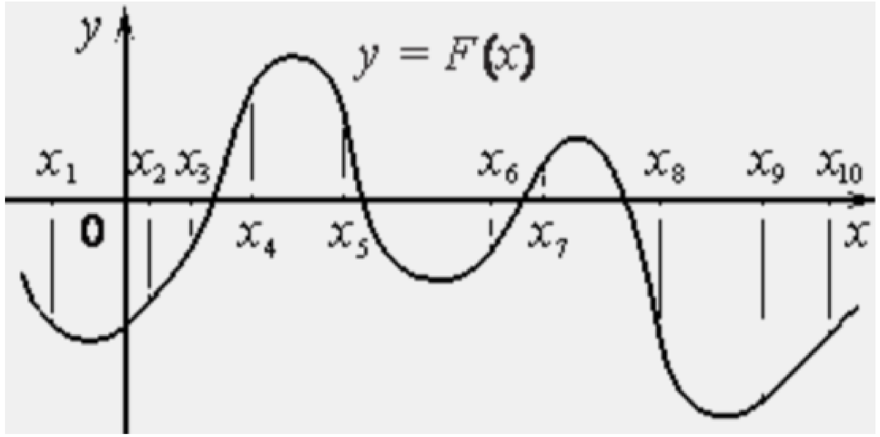
Ответ: ___________________________.

6 В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 150°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



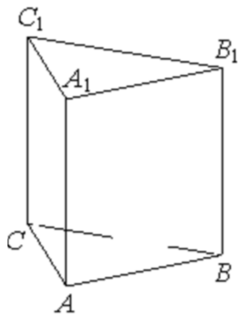
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 7, а боковое ребро равно 9.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} : 4^{-4,9}$.

Ответ: ___________________________.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 4500$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 90 км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = 25x - 25\,\mathrm{tg}\,x + 41$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

15 Решите неравенство

$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}$.

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180415

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	7
2	6,5
3	3
4	0,5
5	-1
6	15
7	7
8	42
9	0,8
10	0,9
11	10
12	41
13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $-\frac{7\pi}{6}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$
15	$(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6\,; 3]$
16	7
17	800 тыс.
18	$(-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$
19	а) да, б) нет, в) 20

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

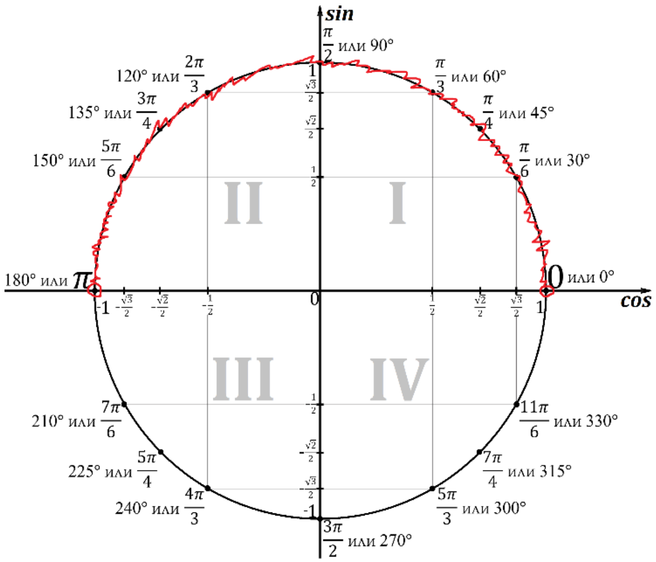
13 а) Решите уравнение
$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$

.

Решение:
а)

ОДЗ логарифма
Для $\log_a b$:
$a > 0$
$a \neq 1$
$b > 0$

ОДЗ:
$4\sin x > 0$
$\sin x > 0$



Пусть $\log_4(4\sin x) = t$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 = 3^2$
$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5+3}{4} = 2$
$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\log_4(4\sin x) = 2$ $4^2 = 4\sin x$ $\sin x = 4$ (Нет решений, т.к. синус принимает значения от -1 до 1)	$\log_4(4\sin x) = \dfrac{1}{2}$ $4^{\frac{1}{2}} = 4\sin x$ $2 = 4\sin x$ $\sin x = \dfrac{1}{2}$ $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -2$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\frac{19\pi}{6} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
Если $n = -1$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{7\pi}{6}$

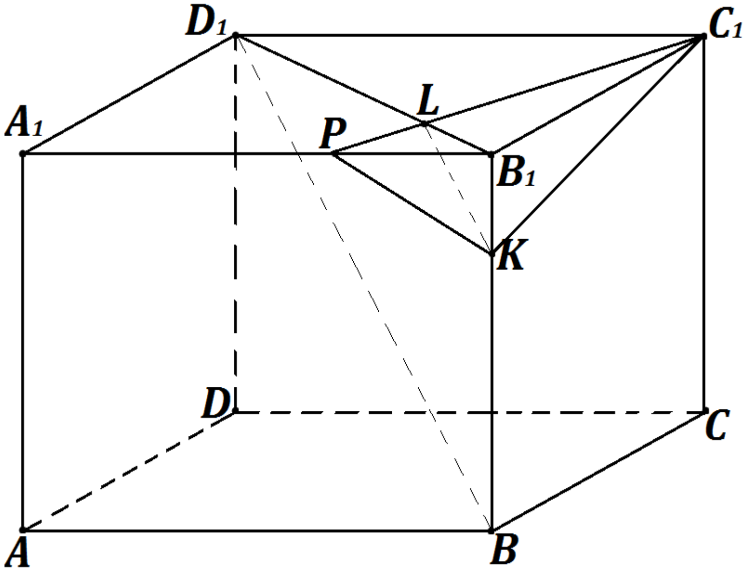
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.
.

Решение:
а)
$KB = 4$
=>
$KB_1 = BB_1 - KB = 5 - 4 = 1$

Построение плоскости α:



Построим прямую KC_1, т.к. точки K и C_1 лежат в одной плоскости
Построим вспомогательную прямую B_1D_1, которая является проекцией BD_1 на «потолок», т.е. на $(A_1B_1C_1)$
В $\triangle\, BB_1D_1$ построим KL такую, что $KL \parallel BD_1$
Построим C_1L, т.к. точки C_1 и L лежат в одной плоскости
Продлим C_1L до пересечения с ребром A_1B_1 в точке P
Построим прямую PK, т.к. точки P и K лежат в одной плоскости
=> $\triangle\, C_1PK$ − сечение куба плоскостью α

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках B_1KL и BB_1D_1

$$\frac{B_1K}{BB_1} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$

Пусть
$B_1L = x$
$B_1D_1 = 5x$
=> $D_1L = B_1D_1 - B_1L = 5x - x = 4x$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках PB_1L и C_1D_1L

$$\frac{B_1L}{D_1L} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
$$\frac{x}{4x} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$

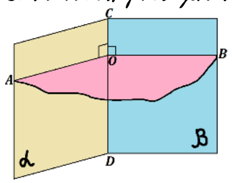
Пусть
$B_1P = y$
$C_1D_1 = 4y$
=> $A_1P = C_1D_1 - B_1P = 4y - y = 3y$

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{3y}{y}$$
$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{3}{1}$$

■

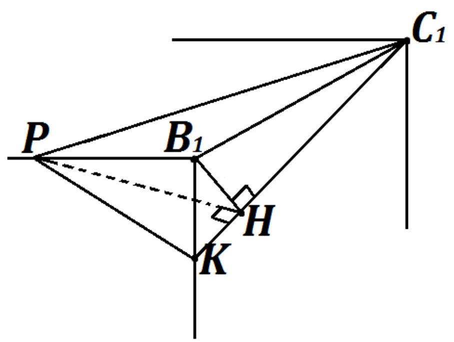
б)

Схема нахождения угла между плоскостями



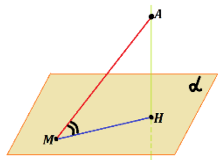
1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)
2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)
3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)
4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB$ − угол между плоскостями α и β)

Плоскость α и плоскость BCC_1 пересекаются по прямой KC_1, поэтому угол между этими плоскостями – это угол между перпендикулярами к этой общей прямой, проведёнными от каждой из плоскостей



Но мы пока что не знаем точку пересечения этих перпендикуляров

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость (на рисунке $\angle AMH$ – угол между прямой AM и MH (её проекцией на плоскость α))

Проведём высоту PH в $\triangle C_1PK$

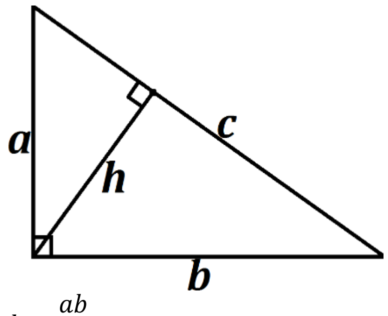
B_1H – это проекция PH на «правую стену», т.е. на плоскость BCC_1 =>

$\angle B_1HP$ – искомый угол между плоскостью α и плоскостью BCC_1

Рассмотрим $\triangle B_1C_1K$ – прямоугольный:

$C_1K = \sqrt{B_1K^2 + B_1C_1{}^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$ (по теореме Пифагора)

Высота, проведённая к гипотенузе



$h = \dfrac{ab}{c}$

$$B_1H = \frac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \frac{5\cdot 1}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$B_1P = \frac{1}{4}\cdot A_1B_1 = \frac{1}{4}\cdot 5 = \frac{5}{4}$$

(по доказанному в п. а)

Рассмотрим $\triangle B_1HP$ – прямоугольный:

$$\operatorname{tg}\angle B_1HP = \frac{B_1P}{B_1H} = \frac{5}{4} : \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{4}$$

$$\angle B_1HP = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5\cdot 2^x+4}\le\frac{2^x-9}{2^x-4}+\frac{1}{2^x-6}.$$

Решение:

Пусть $2^x=t$

$$\frac{t^2-8t+7}{t^2-5t+4}\le\frac{t-9}{t-4}+\frac{1}{t-6}$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$t^2-8t+7=0$

$D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 7=36$

$t_1=\dfrac{8+6}{2}=7$

$t_2=\dfrac{8-6}{2}=1$

$t^2-8t+7=(t-1)(t-7)$

$t^2-5t+4=0$

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=9$

$t_1=\dfrac{5+3}{2}=4$

$t_2=\dfrac{5-3}{2}=1$

$t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$

$$\frac{(t-1)(t-7)}{(t-1)(t-4)}\le\frac{t-9}{t-4}+\frac{1}{t-6}$$

ОДЗ:

1.

$t\ne 1$

$2^x\ne 1$

$2^x\ne 2^0$

$x\ne 0$

2.

$t\ne 4$

$2^x\ne 4$

$2^x\ne 2^2$

$x\ne 2$

3.

$t\ne 6$

$2^x\ne 6$

$2^x\ne 2^{\log_2 6}$

$x\ne \log_2 6$

$$\frac{t-7}{t-4}\le\frac{t-9}{t-4}+\frac{1}{t-6}$$

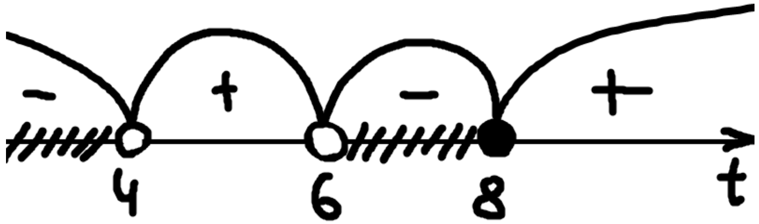
$$\frac{t-7}{t-4}-\frac{t-9}{t-4}\le\frac{1}{t-6}$$

$$\frac{2}{t-4}-\frac{1}{t-6}\le 0$$

$$\frac{2t-12-t+4}{(t-4)(t-6)}\le 0$$

$$\frac{t-8}{(t-4)(t-6)}\le 0$$

$t-8=0$ $t=8$	$(t-4)(t-6)\ne 0$ $t\ne 4$ $t\ne 6$	ОДЗ: $t\ne 1$



$t < 4$ $2^x < 4$ $2^x < 2^2$ $x < 2$	$6 < t \leq 8$ $6 < 2^x \leq 8$ $2^{\log_2 6} < 2^x \leq 2^3$ $\log_2 6 < x \leq 3$	ОДЗ: $x \neq 0$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6\,; 3]$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

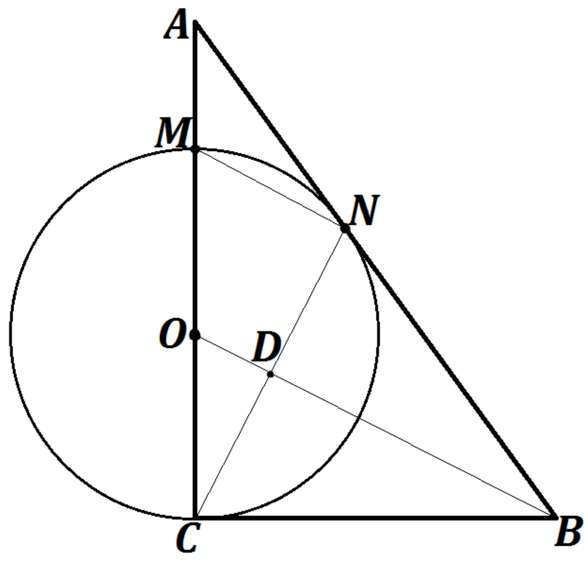
а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM: MC = 1: 3$.

.

Решение:

а)



Проведём CN

Пусть $CN \cap BO = D$

$BD -$ биссектриса угла B

$BC = BN$

(по свойству касательных)

Рассмотрим $\triangle\, BCN -$ равнобедренный

$BD -$ биссектриса, высота и медиана (по свойству равнобедренного треугольника)

=>

$BD \perp CN$

=>

$BO \perp CN$

$\angle CNM = 90°$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

=>

$MN \perp CN$

=>

$MN \parallel BO$

■

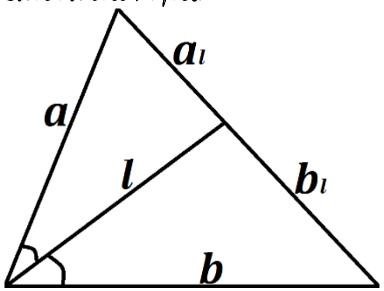
б)
$BOMN$ – трапеция
DN – высота трапеции
$DN = \frac{1}{2} \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
(по свойству равнобедренного треугольника)

Осталось найти основания трапеции:

Пусть
$AM = 2x$
$MC = 6x$

Тогда
$OM = 3x$
$OC = 3x$
$AO = 5x$
$AC = 8x$

Свойство биссектрисы



$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$

BO – биссектриса $\triangle ABC$
=>
$\frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{3x}{5x} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{3}{5} = \frac{BC}{AB}$

Пусть
$BC = 3y$
$AB = 5y$

Тогда
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(5y)^2 - (3y)^2} = 4y$ (по теореме Пифагора)

$AC = 4y = 8x$
$y = 2x$

=>
$BC = 6x$
$AB = 10x$

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{6x}{10x} = \frac{3}{5}$

По теореме косинусов из $\triangle BCN$:
$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2 \cdot BC \cdot BN \cdot \cos B$
$4^2 = 2BC^2 - 2BC^2 \cdot \frac{3}{5}$
$16 = \frac{4}{5} BC^2$
$BC^2 = 20$
$BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 6x$
$x = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$OC = 3x = 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$
$BC = 6x = 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$
$BO = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 5$ (по теореме Пифагора)

$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 4$ (по теореме Пифагора)

$OD = BO - BD = 5 - 4 = 1$
OD – средняя линия $\triangle CNM$

=>
$MN = 2 \cdot OD = 2 \cdot 1 = 2$

$$S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot DN$$

$$S_{BOMN} = \frac{5 + 2}{2} \cdot 2 = 7$$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

Решение:

Пусть x тыс. – сумма кредита

1000 тыс. – общая сумма выплат

Составим таблицу:

Месяц	Долг на начало месяца	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	x	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot x$
2	$\frac{23x}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot \frac{23x}{24}$
…			
24	$\frac{x}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot \frac{x}{24}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 24 \cdot \frac{x}{24} + \frac{\frac{2}{100} \cdot x + \frac{2}{100} \cdot \frac{x}{24}}{2} \cdot 24 = 1000$$

$$x + \frac{2x}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{24}\right) \cdot 12 = 1000$$

$$x + \frac{2x}{100} \cdot \frac{25}{24} \cdot 12 = 1000$$

$x + \frac{x}{100} \cdot 25 = 1000$

$1{,}25x = 1000$

$x = 800$ тыс.

Ответ: 800 тыс.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение:

Найдём корни уравнения $y^2 - xy + 3x - y - 6 = 0$

$y^2 - xy - y + 3x - 6 = 0$

$y^2 - (x+1)y + 3x - 6 = 0$

$D = x^2 + 2x + 1 - 12x + 24 = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

$$y = \frac{x + 1 + \sqrt{(x-5)^2}}{2} = \frac{x + 1 + |x-5|}{2}$$

$$y = \frac{x + 1 - \sqrt{(x-5)^2}}{2} = \frac{x + 1 - |x-5|}{2}$$

=>

$$y_1 = \frac{x + 1 + x - 5}{2} = x - 2$$

$$y_2 = \frac{x + 1 - x + 5}{2} = 3$$

Получаем новую систему:

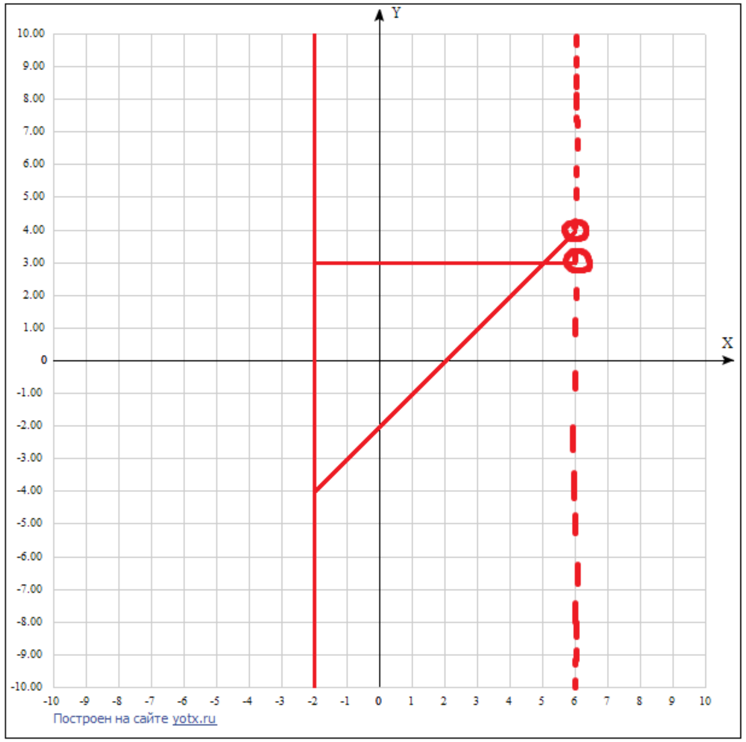
$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 6 - x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = 3 \\ \sqrt{x+2} = 0 \end{array}\right. \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = 3 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ y = -x + a \end{cases}$$

Решим графически:

Сначала построим график системы:

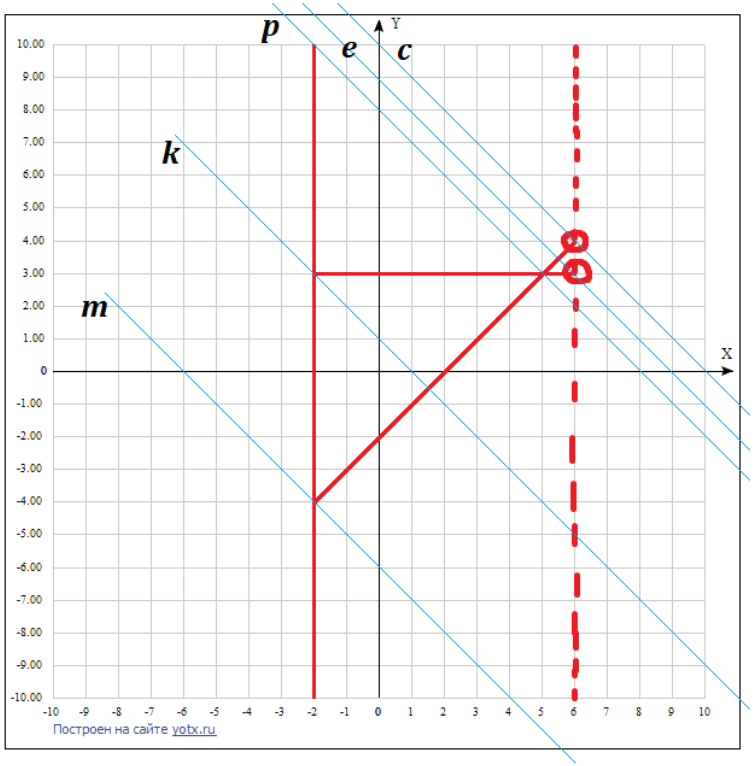
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = 3 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$



$y = -x + a -$ семейство прямых с коэффициентов угла наклона касательной $k = -1$

Пусть
$m -$ прямая, проходящая через точку $(-2; -4)$ из семейства прямых $y = -x + a$
$k -$ прямая, проходящая через точку $(-2; 3)$ из семейства прямых $y = -x + a$
$p -$ прямая, проходящая через точку $(5; 3)$ из семейства прямых $y = -x + a$
$e -$ прямая, проходящая через точку $(6; 3)$ из семейства прямых $y = -x + a$
$c -$ прямая, проходящая через точку $(6; 4)$ из семейства прямых $y = -x + a$

Проведём прямые m, k, p, e и c



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -x + a$ проходит через т. $(-2; -4)$
$-4 = 2 + a$
$a = -6$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = -x + a$ проходит через т. $(-2; 3)$
$3 = 2 + a$
$a = 1$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой p
$y = -x + a$ проходит через т. $(5; 3)$
$3 = -5 + a$
$a = 8$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой e
$y = -x + a$ проходит через т. $(6; 3)$

$3 = -6 + a$
$a = 9$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой c
$y = -x + a$ проходит через т. $(6; 4)$
$4 = -6 + a$
$a = 10$

Итак,
Если $a < -6$, то 1 пересечение
Если $a = -6$, то 1 пересечение
Если $-6 < a < 1$, то 2 пересечения
Если $a = 1$, то 2 пересечения
Если $1 < a < 8$, то 3 пересечения
Если $a = 8$, то 2 пересечения
Если $8 < a < 9$, то 3 пересечения
Если $a = 9$, то 2 пересечения
Если $9 < a < 10$, то 2 пересечения
Если $a = 10$, то 1 пересечение
Если $a > 10$, то 1 пересечение

Ответ: $a \in (-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Три числа назовём хорошей тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?
.

Решение:

Три числа могут быть длинами сторон треугольника, если выполняется правило неравенства треугольника

а)
Может, например, геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = 2$
1 2 4 8 16

$1 + 2 < 4$
$2 + 4 < 8$
$4 + 8 < 16$

3 нарушения неравенства треугольников
=>
Нет ни одной хорошей тройки

б)
Три числа могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника, если выполняется теорема Пифагора

Пусть
a, b, c и $d -$ эти различные натуральные числа
$a < b < c < d$
Тогда гипотенузой могут быть только c и d (потому что требуется наличие двух сторон меньше, чем они сами)

$$\begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a^2 + c^2 = d^2 \\ b^2 + c^2 = d^2 \end{cases}$$

Из уравнений $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ следует, что $a = b$, что противоречит условию различности
=>
Не может

в)
Пусть дан набор чисел
$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j$

Пусть
$a < b < c < d < e < f < g < h < i < j$

j может быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
(т.к. при большем количестве треугольников какие-то из оставшихся чисел окажутся равны аналогично ситуации в пункте б)

j может быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
i может быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
h может быть гипотенузой максимум в 3 треугольниках
g может быть гипотенузой максимум в 3 треугольниках
f может быть гипотенузой максимум в 2 треугольниках
e может быть гипотенузой максимум в 2 треугольниках
d может быть гипотенузой максимум в 1 треугольнике
c может быть гипотенузой максимум в 1 треугольнике
=>
20 – Наибольшее возможное количество отличных троек

Пример такого набора чисел:
$1\ \sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt{4}\ \sqrt{5}\ \sqrt{6}\ \sqrt{7}\ \sqrt{8}\ \sqrt{9}\ \sqrt{10}$

Ответ: а) да, б) нет, в) 20

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4