Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

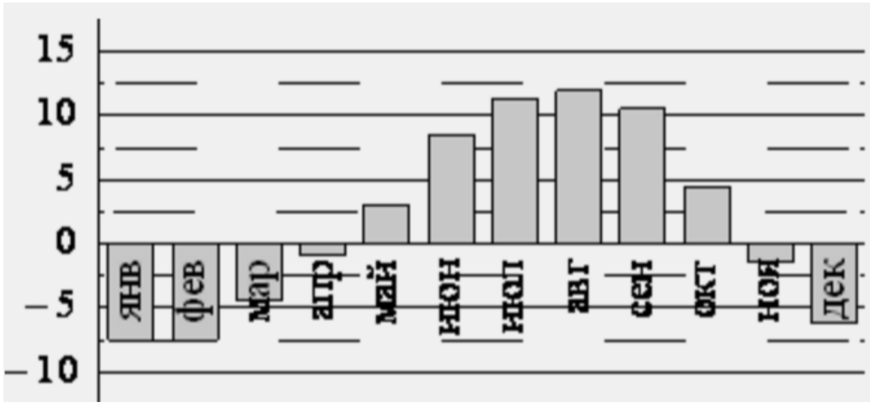
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Сырок стоит 6 рублей 70 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

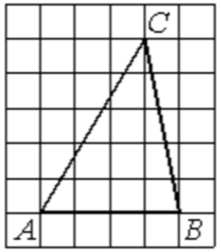
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Петропавловске-Камчатском по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала февраля по конец сентября, когда среднемесячная температура в Петропавловске-Камчатском отрицательна.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ___________________________.

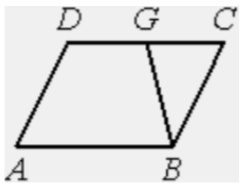
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\log_{27} 3^{5x+5} = 2$.

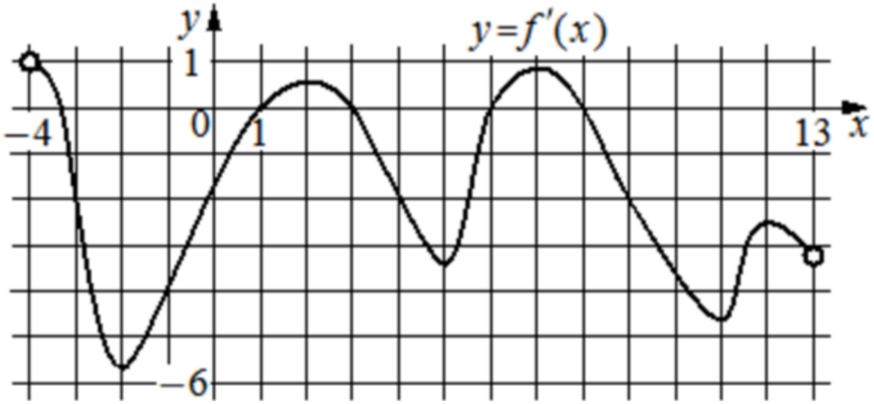
Ответ: ___________________________.

6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 132. Точка G — середина стороны CD. Найдите площадь трапеции $ABGD$.



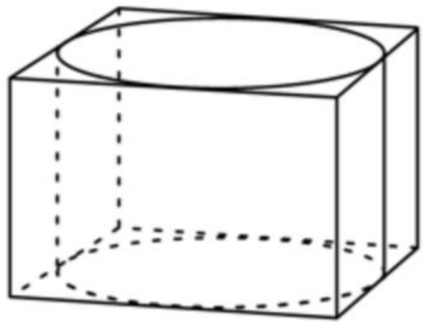
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



Ответ: ___________________________.

8 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$(5^4)^6 : 5^{22}$.

Ответ: ___________________________.

10 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Ответ: ___________________________.

11 Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = 32\sin x - 35x + 30$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E : EA = 5 : 3$ и $B_1F : FB = 5 : 11$. Точка T — середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

15 Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \leq 0.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 120°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 6\sqrt{3}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180401

17 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.
В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$
имеет единственный корень.

19 На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 58 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180401

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	7
2	3
3	2
4	0,97
5	0,2
6	99
7	4
8	32
9	25
10	9,2
11	10
12	30
13	а) $\frac{\pi}{3}+\pi n, -\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n \in Z.$ б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}$
14	97,5
15	$\{0\} \cup (1; \log_2 3)$
16	3
17	680
18	$\left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$
19	а) приведён, б) нет, в) 6

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

.

Решение:

а)

Косинус двойного угла

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{1-2\sin^2 x} = 63$$

Деление степеней с одинаковыми основаниями

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$$8\cdot16^{\sin^2x}-2\cdot\frac{4}{4^{2\sin^2x}}=63$$

Возведение степени в степень
$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$

$$8\cdot16^{\sin^2x}-\frac{8}{16^{\sin^2x}}-63=0$$

Пусть $16^{\sin^2x}=t$

$$8t-\frac{8}{t}-63=0$$

$$\frac{8t^2-63t-8}{t}=0$$

$8t^2-63t-8=0$
$D=b^2-4ac=3969+256=4225=65^2$
$t_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{63+65}{16}=8$
$t_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{63-65}{16}=-\frac{1}{8}$

$16^{\sin^2x}=8$ $2^{4\sin^2x}=2^3$ $4\sin^2x=3$ $\sin^2x=\frac{3}{4}$ $\sin x=\pm\frac{\sqrt3}{2}$ $x_1=\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n\in Z$ $x_2=-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n\in Z$	$16^{\sin^2x}=-\frac{1}{8}$ Нет решений, т.к. число в степени всегда положительно

б)
Подберём корни для $x=\frac{\pi}{3}+\pi n; n\in Z$
Если $n=3$, то $x=\frac{\pi}{3}+3\pi=\frac{10\pi}{3}\notin\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$
Если $n=4$, то $x=\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{13\pi}{3}\in\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$
Если $n=5$, то $x=\frac{\pi}{3}+5\pi=\frac{16\pi}{3}\notin\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$

Подберём корни для $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n; n\in Z$
Если $n=3$, то $x=-\frac{\pi}{3}+3\pi=\frac{8\pi}{3}\notin\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$
Если $n=4$, то $x=-\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{11\pi}{3}\in\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$
Если $n=5$, то $x=-\frac{\pi}{3}+5\pi=\frac{14\pi}{3}\in\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$
Если $n=6$, то $x=-\frac{\pi}{3}+6\pi=\frac{17\pi}{3}\notin\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$

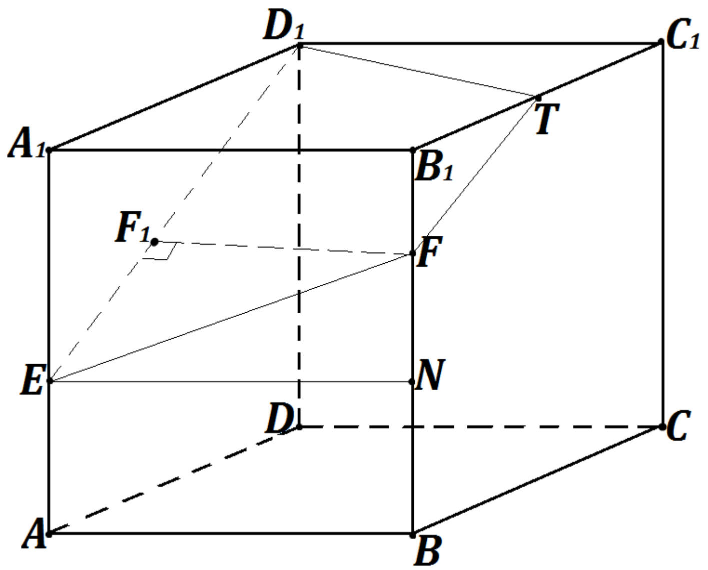
Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi n,-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ n\in Z$. б) $\frac{11\pi}{3};\frac{13\pi}{3};\frac{14\pi}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=6\sqrt2$, $AD=10$, $AA_1=16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=5:3$ и $B_1F:FB=5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Решение:
а)



$A_1E : EA = 5:3$ и $AA_1 = 16$
=>
$A_1E = 10$
$EA = 6$

$B_1F : FB = 5:11$ и $BB_1 = 16$
=>
$B_1F = 5$
$FB = 11$

T – середина B_1C_1
=>
$B_1T = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$
=>
$\triangle B_1FT$ – равнобедренный

Построим сечение:
Построим прямую EF, т.к. точки E и F лежат в одной плоскости
Построим прямую FT, т.к. точки F и T лежат в одной плоскости

Построим такую прямую через точку E, чтобы она была параллельна FT и т.к. $\triangle B_1FT$ – равнобедренный, то треугольник на плоскости AA_1D_1 тоже будет равнобедренным, а т.к.
$A_1E = A_1D_1 = 10$, то плоскость EFT проходит через вершину D_1
■

б)
ED_1TF – трапеция
Найдём стороны трапеции:

$ED_1 = \sqrt{EA_1{}^2 + A_1D_1{}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

$FT = \sqrt{TB_1{}^2 + B_1F^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

$TD_1 = \sqrt{TC_1{}^2 + C_1D_1{}^2} = \sqrt{5^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{97}$ (по теореме Пифагора)

Пусть EN – прямая, параллельная AB, тогда:
$EN = 6\sqrt{2}$ и $FN = BF - EA = 11 - 6 = 5$

$EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{97}$ (по теореме Пифагора)

=> ED_1TF – трапеция равнобедренная

Пусть FF_1 – высота трапеции, тогда:

$F_1E = \frac{ED_1 - TF}{2} = \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = 2{,}5\sqrt{2}$

$FF_1 = \sqrt{EF^2 - F_1E^2} = \sqrt{(\sqrt{97})^2 - (2{,}5\sqrt{2})^2} = \frac{13}{\sqrt{2}}$ (по теореме Пифагора)

$S = \frac{ED_1 + TF}{2} \cdot FF_1 = \frac{10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{13}{\sqrt{2}} = 97{,}5$

Ответ: 97,5

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\leq 0.$$

.

Решение:

Пусть $2^x = t$

$$\frac{t}{t-3}+\frac{t+1}{t-2}+\frac{5}{t^2-5t+6}\leq 0$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$t^2-5t+6=0$

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$

$t_1=\dfrac{5+1}{2}=3$

$t_2=\dfrac{5-1}{2}=2$

$t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

$$\frac{t}{t-3}+\frac{t+1}{t-2}+\frac{5}{(t-2)(t-3)}\leq 0$$

$$\frac{t^2-2t+t^2+t-3t-3+5}{(t-2)(t-3)}\leq 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-2)(t-3)}\leq 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-2)(t-3)}\leq 0$$

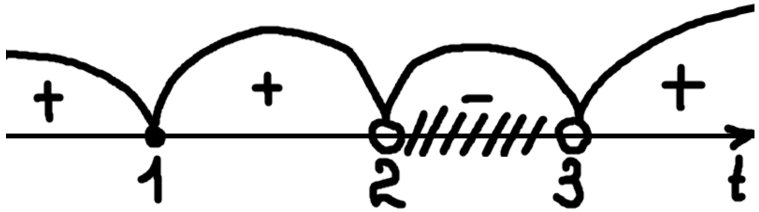
$2(t-1)^2=0$

$t=1$

$(t-2)(t-3)\neq 0$

$t\neq 2$

$t\neq 3$



$t=1$

$2^x=1$

$2^x=2^0$

$x=0$

$2<t<3$

$2<2^x<3$

$2^1<2^x<2^{\log_2 3}$

$1<x<\log_2 3$

Ответ: $\{0\}\cup(1;\log_2 3)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC=120°$, $\angle BCA=45°$.

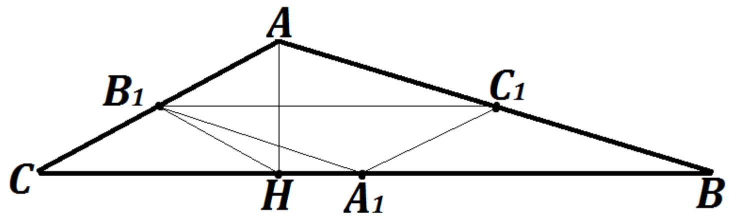
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC=6\sqrt{3}$.

.

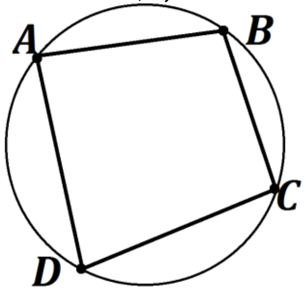
Решение:

а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1C_1B_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность

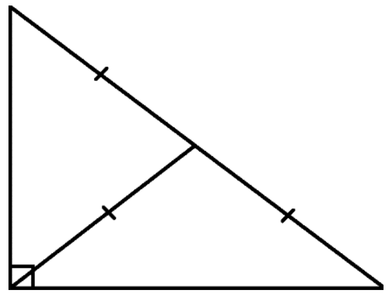


$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 45°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 120 = 15°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 15 = 75°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 120 - 75 = 45°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ACH$ – прямоугольный
B_1H – медиана
=>
$B_1H = AB_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AB_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHB_1 = \angle CAH = 45°$

Признаки параллелограмма

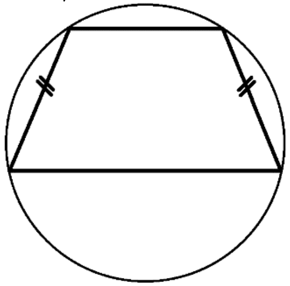
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $B_1C_1A_1C$
$A_1C_1 \parallel CB_1$
$A_1C_1 = CB_1$ (т.к. A_1C_1 – средняя линия)
=>
$B_1C_1A_1C$ – параллелограмм
=>
$\angle B_1C_1A_1 = \angle ACB = 45°$
$\angle A_1HB_1 = \angle AHA_1 + \angle AHB_1 = 90 + 45 = 135°$

$\angle B_1C_1A_1 + \angle A_1HB_1 = 45 + 135 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1C_1B_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

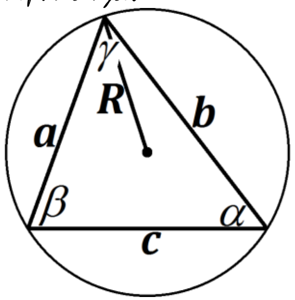
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1C_1B_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



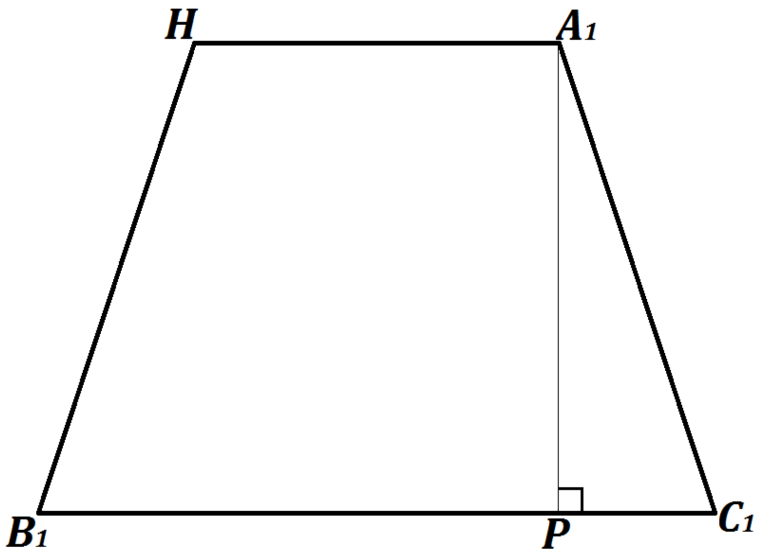
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 120°} = \frac{AC}{\sin 15°}$$

$$AC = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\sin 120°} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sin 15°$$
=>
$$A_1C_1 = \frac{AC}{2} = \frac{12\sin 15°}{2} = 6\sin 15°$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1C_1B_1H$:



Пусть
A_1P – высота трапеции

$\angle A_1C_1P = \angle ACB = 45°$
$\angle PA_1C_1 = 180 - \angle A_1PC_1 - \angle A_1C_1P = 180 - 90 - 45 = 45°$
=>
$\triangle\ A_1C_1P$ – равнобедренный

По теореме Пифагора:
$A_1C_1{}^2 = C_1P^2 + A_1P^2$
$A_1C_1{}^2 = 2C_1P^2$
$(6\sin 15°)^2 = 2C_1P^2$
$36\sin^2 15° = 2C_1P^2$
$C_1P^2 = 18\sin^2 15°$
$C_1P = 3\sqrt{2}\sin 15°$

$A_1H = B_1C_1 - 2C_1P = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\sin 15°$

Формулы сложения и вычитания аргументов
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$
$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\sin 15° = \sin(45-30)°$
$\sin 15° = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$
$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$A_1H = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$
$A_1H = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$
$A_1H = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 = 3$

Ответ: б) 3

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.
В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?
.

Решение:

Величины t^2 в первом городе и во втором городе не одинаковые, нам просто показана зависимость количества единиц товара от количества часов

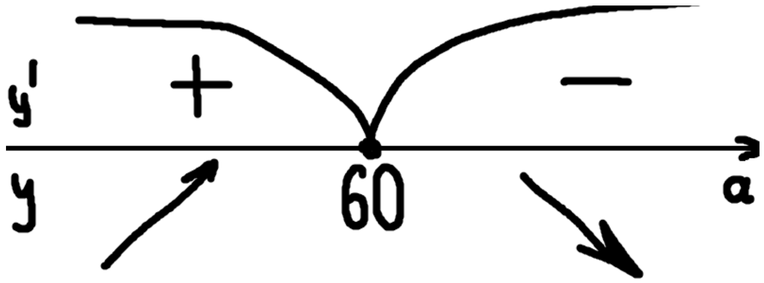
Пусть
a^2 часов трудятся в первом городе и производят $3a$ единиц товара
b^2 часов трудятся во втором городе и производят $5b$ единиц товара

Тогда
$a^2 + b^2$ – суммарное количество часов в двух городах
$3a + 5b$ – суммарное количество единиц товара в двух городах

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.
Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих.
=>
$500 \cdot (a^2 + b^2) = 6800000$
Выразим b
$a^2 + b^2 = \dfrac{6800000}{500}$
$b^2 = 13600 - a^2$
$b = \sqrt{13600 - a^2}$

Нужно найти какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах
=>
Нужно найти наибольшее значение выражения $3a + 5b$, введём функцию:
$f(a,b) = 3a + 5b$
$f(a) = 3a + 5\sqrt{13600 - a^2}$
$f'(a) = 3 + \dfrac{5 \cdot (-2a)}{2\sqrt{13600 - a^2}} = 0$
$3 = \dfrac{5a}{\sqrt{13600 - a^2}}$
$3\sqrt{13600 - a^2} = 5a \qquad |\text{^}2$
$9 \cdot (13600 - a^2) = 25a^2$
$9 \cdot 13600 - 9a^2 = 25a^2$
$34a^2 = 9 \cdot 13600$
$a^2 = \dfrac{9 \cdot 13600}{34}$
$a^2 = 9 \cdot 400$
$a = 3 \cdot 20 = 60$

Докажем, что это точка максимума:



=>
Наибольшее значение функция будет принимать в этой точке

$f(60) = 3 \cdot 60 + 5\sqrt{13600 - 60^2}$
$f(60) = 180 + 500 = 680$

Ответ: 680

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$
имеет единственный корень.

Решение:

$\sqrt{-7 - 8x - x^2} = -ax + 2a + 3$

Решим графически:

$y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$
$y = \sqrt{-x^2 - 8x - 16 + 16 - 7}$
$y = \sqrt{(-x^2 - 8x - 16) + 9}$
$y = \sqrt{-(x^2 + 8x + 16) + 9}$
$y = \sqrt{3^2 - (x + 4)^2}$

Заметим, что если возвести данное уравнение в квадрат, то получится уравнение окружности:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 3^2 - (x + 4)^2 \end{cases}$$

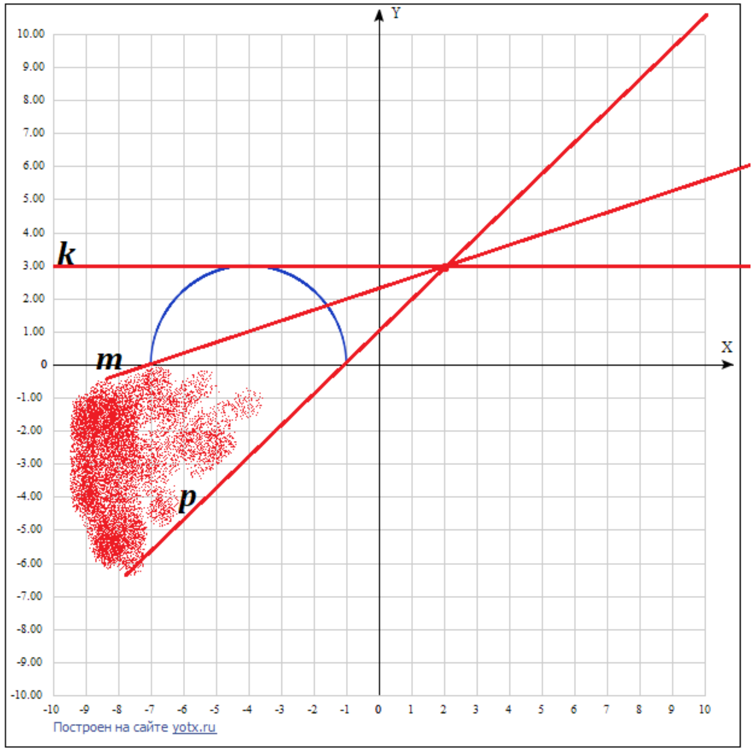
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x + 4)^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

=>
Графиком левой части уравнения является полуокружность с центром $(-4; 0)$ и радиусом 3

Рассмотрим правую часть уравнения:
$y = -ax + 2a + 3$
$y = -a(x - 2) + 3$
=>
Графиком правой части уравнения является пучок прямых, проходящих, через точку $(2; 3)$

Пусть
$k -$ прямая, проходящая через точку $(2; 3)$, и касающаяся полуокружности
$m -$ прямая, проходящая через точку $(2; 3)$ и точку «левого основания» полуокружности
$p -$ прямая, проходящая через точку $(2; 3)$ и точку «правого основания» полуокружности

Проведём прямые k и m и p:



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = -ax + 2a + 3$ проходит через т. $(-4; 3)$
$3 = 4a + 2a + 3$
$0 = 2a$
$a = 0$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -ax + 2a + 3$ проходит через т. $(-7; 0)$
$0 = 7a + 2a + 3$
$-3 = 9a$
$a = -\dfrac{1}{3}$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = -ax + 2a + 3$ проходит через т. $(-1; 0)$
$0 = a + 2a + 3$
$-3 = 3a$

$a = -1$

Итак,
Если $a > 0$, то пересечений нет
Если $a = 0$, то 1 пересечение
Если $-\frac{1}{3} < a < 0$, то 2 пересечения
Если $a = -\frac{1}{3}$, то 2 пересечения
Если $-1 < a < -\frac{1}{3}$, то 1 пересечение
Если $a = -1$, то 1 пересечение
Если $a < -1$, то пересечений нет

Ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 58 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?
.

Решение:

а)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

-26-24-10=-60
-27-23-11=-61
-28-22-12=-62
-29-21-13=-63
-30-20-14=-64

1-й ход (30, 20, 14) = 64
2-й ход (29, 21, 13) = 63
3-й ход (28, 22, 12) = 62
4-й ход (27, 23, 11) = 61
5-й ход (26, 24, 10) = 60

б)
Найдём сумму всех чисел на доске по формуле суммы арифметической прогрессии:
$$S_{30} = \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 465$$

Допустим, удалось сделать 10 ходов

Использованы все числа на доске

Получилось 10 сумм

Даже если брать минимально возможные суммы стёртых троек:
59, 60, 61, …, 68

То минимальная итоговая сумма десятка стёртых троек:
$$S_{\text{min стёртых троек}} = \frac{59+68}{2} \cdot 10 = 635$$

$635 > 465$
=>
10 ходов сделать не удастся

в)
Добавим к пяти ходам пункта а) 6-й ход (25, 19, 15) = 59
=>
6 ходов можно сделать

Покажем, что 7 ходов сделать нельзя:
1
Если сделано 7 ходов, то осталось 9 чисел

Минимальные 9 чисел, которые могли остаться:
1, 2, 3, …, 9

Найдём сумму этих оставшихся 9 чисел (если они максимально большие):
$$S_{\min \text{ оставшихся 9 чисел}} = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45$$
2
С другой стороны:

Если стёрли 7 троек, то осталось 9 чисел

Даже если брать минимально возможные суммы стёртых троек:
59, 60, 61, …, 65

То максимально возможная сумма оставшихся чисел (если от 465 отнимать 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, т.е. самые крупные тройки):
$$S_{\max \text{ оставшихся 9 чисел}} = 465 - \frac{59+65}{2} \cdot 7 = 31$$
=>
$$S_{\min \text{ оставшихся 9 чисел}} > S_{\max \text{ оставшихся 9 чисел}}$$
=>
Противоречие
=>
7 ходов сделать нельзя

Ответ: а) приведён, б) нет, в) 6

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4