Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

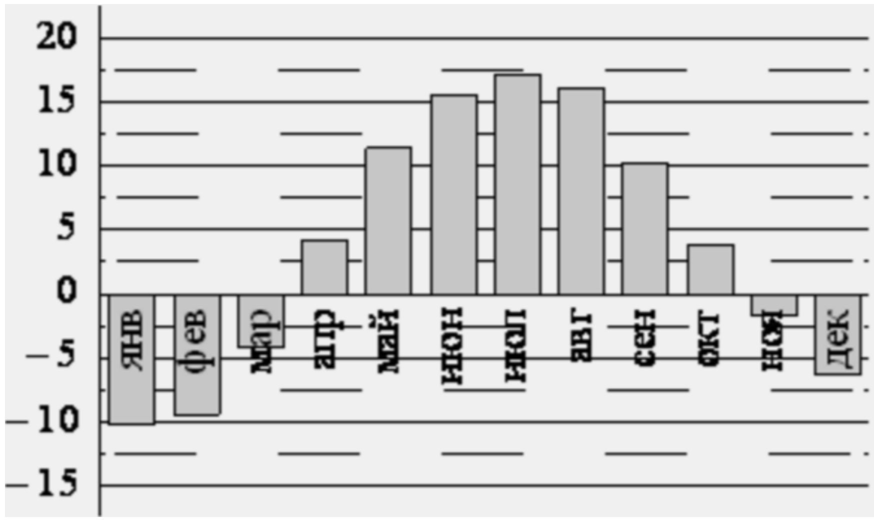
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Поезд Москва-Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

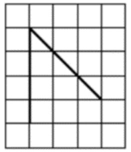
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Твери по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала года по конец июня, когда среднемесячная температура в Твери ниже -5°C.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



Ответ: ___________________________.

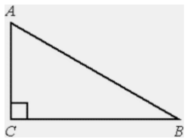
4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\log_2(7 - x) = 5$.

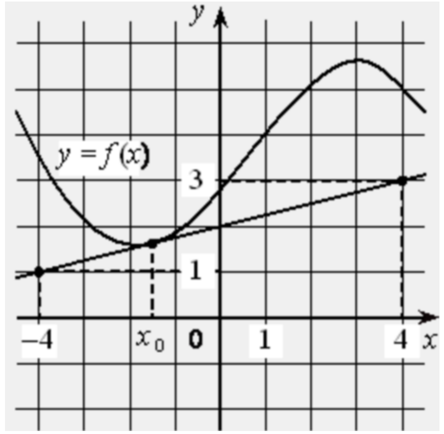
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите $\sin B$.



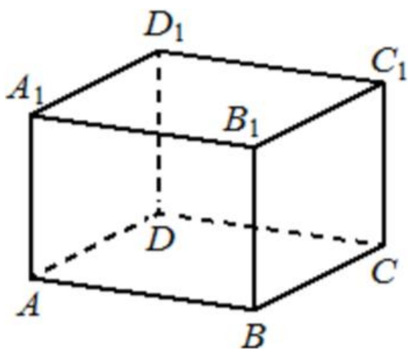
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AA_1 = 4$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$4\log_{1,25} 5 \cdot \log_5 0{,}8$.

Ответ: ___________________________.

10 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу со скоростями u и v (в м/с) соответственно, частота звукового сигнала f (в Гц), регистрируемого приёмником, вычисляется по формуле $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$, где $f_0 = 170$ Гц – частота исходного сигнала, c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 2$ м/с и $v = 17$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды. При какой скорости c распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет равна 180 Гц? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ___________________________.

11 Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции
$y = (x-9)^2(x+4) - 4$ на отрезке $[7; 16]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin x} = 7^{2\sin 2x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

15 Решите неравенство

$$125^x - 25^x + \frac{4\cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leq 4.$$

16 В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180401

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

18 Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству
$5|x-2|+2|x+a|\leq\sqrt{25-y^2}-3.$

19 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	17
2	2
3	45
4	0,16
5	-25
6	0,6
7	0,25
8	20
9	-1
10	340
11	2
12	-4
13	а) $\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ б) $2\pi;\ 3\pi;\ \frac{8\pi}{3}$
14	0,75
15	$\{0\} \cup [\log_5 4\,;1)$
16	2,88
17	10
18	$[-3;-1]$
19	а) нет, б) да, в) 2

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin x} = 7^{2\sin 2x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение:

а)

$$\left(\frac{1}{7^2}\right)^{\sin x} = 7^{2\sin 2x}$$

Отрицательная степень

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(7^{-2})^{\sin x} = 7^{2\sin 2x}$$

Возведение степени в степень

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

$7^{-2\sin x} = 7^{2\sin 2x}$
$-2\sin x = 2\sin 2x$
$-\sin x = \sin 2x$

Синус двойного угла
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$-\sin x = 2\sin x\cdot\cos x$
$2\sin x\cdot\cos x + \sin x = 0$
$\sin x\cdot(2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ $x = \pi n; n \in Z$	$2\cos x + 1 = 0$ $2\cos x = -1$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$
Если $n = 1$, то $x = \pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
Если $n = 2$, то $x = 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
Если $n = 3$, то $x = 3\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
Если $n = 4$, то $x = 4\pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = 0$, то $x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
Если $n = 2$, то $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = 1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
Если $n = 2$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

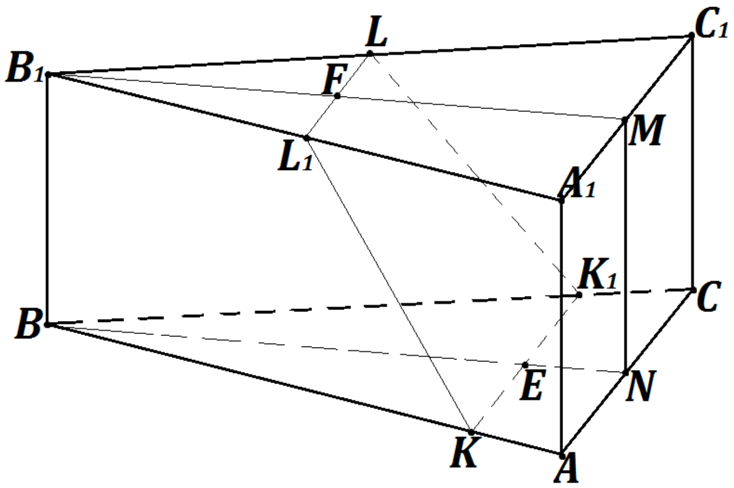
Ответ: а) $\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $2\pi; 3\pi; \frac{8\pi}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Решение:
а)



Построим плоскость γ:
Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel AC$
Построим прямую K_1L, т.к. точки K_1 и L лежат в одной плоскости
Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel A_1C_1$
Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости
Трапеция KK_1LL_1 – искомое сечение плоскостью γ

Рассмотрим плоскость BB_1M:
Опустим перпендикуляр MN на прямую AC
Пусть $B_1M \cap LL_1 = F$
Пусть $BN \cap KK_1 = E$
BB_1MN – прямоугольник
$BB_1 = 3$

$$B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$$

$NE: BE = AK: BK$
$AK: BK = 1: 5$
$=> NE: BE = 1: 5$

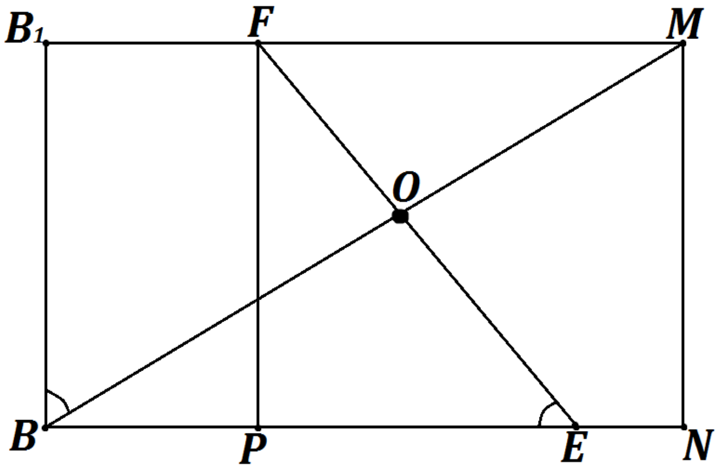
$$NE = \frac{1}{6} \cdot B_1M = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BE = \frac{5}{6} \cdot B_1M = \frac{5}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$B_1F: FM = B_1L: LC_1$
$B_1L: LC_1 = 1: 1$
$=> B_1F = FM$

$$B_1F = FM = \frac{1}{2} \cdot B_1M = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Построим прямую EF
Докажем, что прямые EF и BM перпендикулярны:
$\angle BOE$ – искомый
Рассмотрим BB_1MN – прямоугольник:



Опустим перпендикуляр FP на прямую BN

$$PE = FM - NE = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

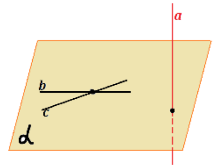
$$\text{tg}\angle BEF = \frac{FP}{PE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{tg}\angle MBB_1 = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$=> \angle BEF = \angle MBB_1 = 60°$
$=> \angle MBN = 90 - 60 = 30°$

$=> BOE = 180 - \angle BEF - \angle MBN = 180 - 60 - 30 = 90°$

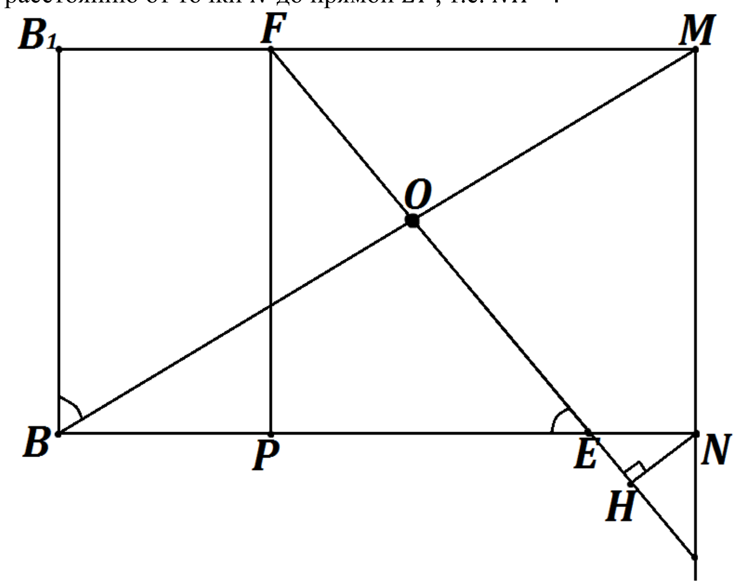
Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$BM \perp EF$
$BM \perp KK_1$ (т.к. $KK_1 \perp BN$, являющейся проекцией BM на плоскость ABC по теореме о трёх перпендикулярах)
$=> BM \perp \gamma$
■

б)
Т.к. прямая $AC \parallel \gamma$, то расстояние от точки C до плоскости γ будет равно расстоянию от точки N до прямой EF, т.е. $NH-?$



$\operatorname{tg}\angle BEF = \operatorname{tg}\angle NEH = \sqrt{3}$

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sqrt{3}^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle NEH}$

$\cos\angle NEH = \dfrac{1}{2}$

$\sin^2\angle NEH + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$

$\sin\angle NEH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{NH}{EN}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{NH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad => NH = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Ответ: б) 0,75

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \le 4.$$

.

Решение:

Пусть $5^x = t$

$t^3 - t^2 + \dfrac{4t^2 - 20}{t - 5} - 4 \le 0$

$$\frac{t^4 - t^3 - 5t^3 + 5t^2 + 4t^2 - 20 - 4t + 20}{t-5} \le 0$$

$$\frac{t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 4t}{t-5} \le 0$$

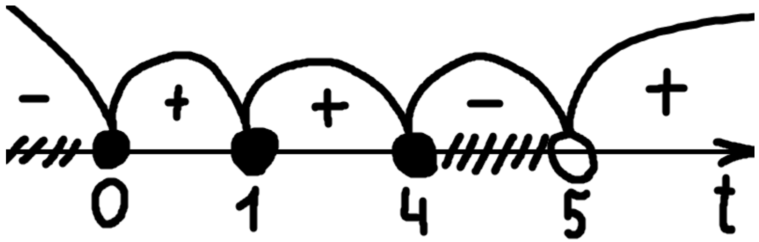
$$\frac{t(t^3 - 6t^2 + 9t - 4)}{t-5} \le 0$$

Заметим, что при подстановке $t = 1$ выражение $t^3 - 6t^2 + 9t - 4$ обращается в ноль, поэтому разложим его на множители с помощью деления «в столбик»:

$$\begin{array}{l|l}
t^3 - 6t^2 + 9t - 4 & t-1 \\ \hline
-\ \underline{t^3 - t^2} & t^2 - 5t + 4 \\
\quad -5t^2 + 9t & \\
-\ \underline{-5t^2 + 5t} & \\
\qquad 4t - 4 & \\
\quad -\ \underline{4t - 4} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\frac{t(t-1)(t^2 - 5t + 4)}{t-5} \le 0$$

$t = 0$	$t - 1 = 0$ $t = 1$	$t^2 - 5t + 4 = 0$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$ $t_1 = \frac{5+3}{2} = 4$ $t_2 = \frac{5-3}{2} = 1$	$t - 5 \ne 0$ $t \ne 5$



$t \le 0$ $5^x \le 0$ (нет решений)	$t = 1$ $5^x = 5^0$ $x = 0$	$4 \le t < 5$ $4 \le 5^x < 5$ $5^{\log_5 4} \le 5^x < 5^1$ $\log_5 4 \le x < 1$

Ответ: $\{0\} \cup [\log_5 4\,; 1)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

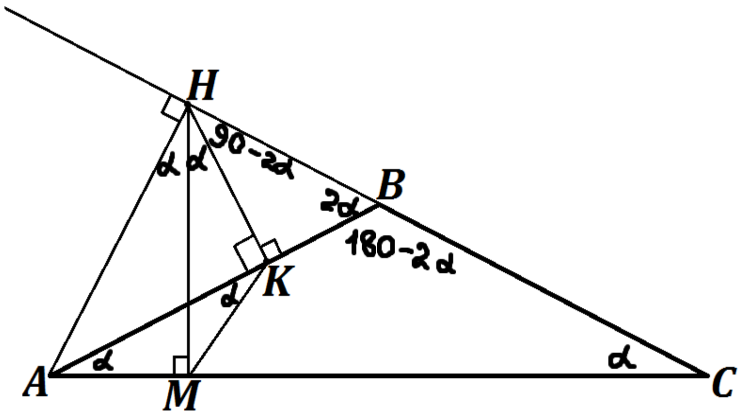
16 В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

.

Решение:

а)



Проведём MK

$\angle AMH = \angle AKH = 90°$

Углы AMH и AKH опираются на отрезок AH

=>

Можно провести окружность с диаметром AH, которая будет проходить через точки A, H, K и M

Мысленно проводим окружность через эти точки

Требуется доказать, что $\triangle AKM -$ равнобедренный, а он будет равнобедренным если углы AKM и KAM будут равны, попробуем это доказать:

Пусть

$\angle KAM = \alpha$

Тогда

$\angle ACB = \alpha$ (т.к. в равнобедренном треугольнике ABC углы при основании равны)

$\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle ACB = 180 - 2\alpha$ (по теореме о сумме углов треугольника)

$\angle KBH = 180 - \angle ABC = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$ (т.к. это смежные углы)

$\angle BHK = 180 - \angle HKB - \angle KBH = 180 - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$ (по теореме о сумме углов треугольника)

$\angle MHK = 180 - \angle HMC - \angle HCM - \angle BHK$ (по теореме о сумме углов треугольника)

$\angle MHK = 180 - 90 - \alpha - (90 - 2\alpha) = \alpha$

$\angle AHM = \angle AHC - \angle MHK - \angle BHK = 90 - \alpha - (90 - 2\alpha) = \alpha$

$\smile AM = 2\alpha$ (по теореме о вписанном угле)

$\angle AKM = \frac{1}{2} \cdot \smile AM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$

=>

$\angle KAM = \angle AKM$

=>

$\triangle AKM -$ равнобедренный

=>

$AM = MK$

■

б)

Проще найти AM

Рассмотрим $\triangle ABC -$ равнобедренный

$AB = BC = 5$

$AC = 8$

Найдём синус угла C

Пусть $BP -$ высота $\triangle ABC$

$CP = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$BP = \sqrt{BC^2 - CP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (по теореме Пифагора)

$\sin \alpha = \frac{BP}{BC} = \frac{3}{5}$

$\sin \alpha = \frac{3}{5} = \frac{AH}{AC}$

$\frac{3}{5} = \frac{AH}{8}$

$AH = \frac{24}{5}$

Рассмотрим $\triangle AHM -$ прямоугольный

$\sin \alpha = \frac{3}{5} = \frac{AM}{AH}$

$$\frac{3}{5} = \frac{AM}{\frac{24}{5}}$$

$$AM = \frac{24 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{72}{25} = 2{,}88$$

=>

$$MK = 2{,}88$$

Ответ: 2,88

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

Решение:

Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	16	$\frac{16}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot 16 = 4$
…			
n	$\frac{16}{n}$	$\frac{16}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{16}{n} = \frac{4}{n}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = n \cdot \frac{16}{n} + \frac{4 + \frac{4}{n}}{2} \cdot n = 38$$

$$16 + \left(2 + \frac{2}{n}\right) \cdot n = 38$$

$$16 + 2n + 2 = 38$$

$$2n = 20$$

$$n = 10$$

Ответ: 10

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству
$5|x-2|+2|x+a| \le \sqrt{25-y^2}-3$.

Решение:

Пусть
$f(x) = 5|x-2|+2|x+a|$
$g(y) = \sqrt{25-y^2}-3$

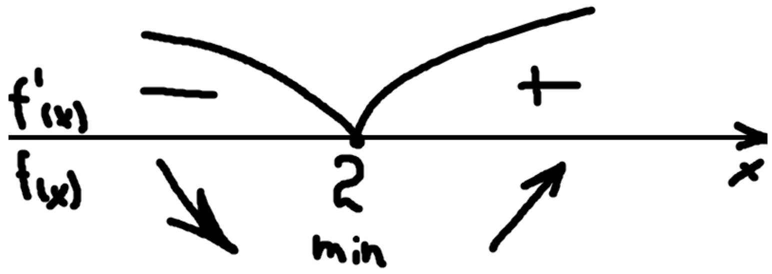
=>
$f(x) \le g(y)$

Исследуем функцию $f(x)$ на возрастание/убывание
$f(x) = 5|x-2|+2|x+a|$

Если $x \ge 2$
$f(x) = 5x-10 \pm 2(x+a)$
$f(x) = \pm 2x + 5x - 10 \pm 2a$
=>
$k = 7$ или $k = 3$
=>
$f(x)$ возрастает при $x \ge 2$

Если $x < 2$
$f(x) = -5x + 10 \pm 2(x+a)$
$f(x) = \pm 2x - 5x + 10 \pm 2a$
=>
$k = -7$ или $k = -3$
=>
$f(x)$ убывает при $x < 2$

=>



$f(2) = 5|2-2|+2|2+a|$
$f(2) = 2|2+a|$ – наименьшее значение функции

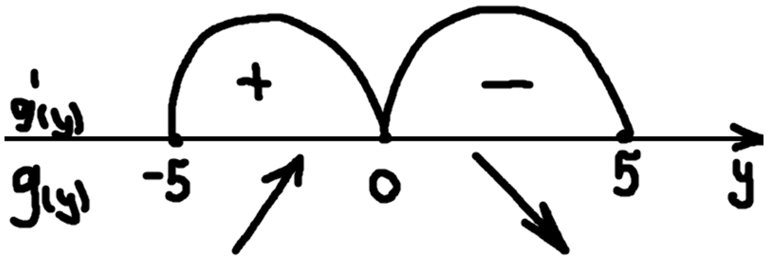
Исследуем функцию $g(y)$ на предмет чётности и возрастание/убывание

$g(-y) = \sqrt{25-(-y)^2}-3 = \sqrt{25-y^2}-3$
=>
$g(y)$ – чётная

$$g'(y) = \frac{-2y}{2\sqrt{25-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{25-y^2}}$$
$$\frac{-y}{\sqrt{25-y^2}} = 0$$

$-y = 0$
$y = 0$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180401



=>
$y = 0$ – это точка максимума
=>
$g(y)$ принимает наибольшее значение в этой точке

$g(0) = \sqrt{25 - 0^2} - 3$
$g(0) = 2$ – наибольшее значение функции

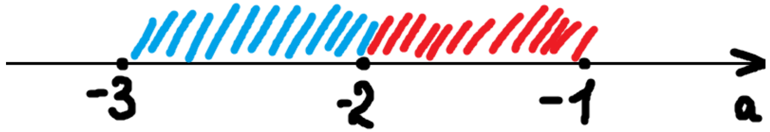
Итак, вернёмся к исходному неравенству:
$f(x) \le g(y)$

$2|2 + a| \le f(x)$
(т.к. $2|2 + a|$ – наименьшее значение функции $f(x)$)
$g(y) \le 2$
(т.к. 2 – наибольшее значение функции $g(y)$)

=>
$2|2 + a| \le f(x) \le g(y) \le 2$
=>
$2|2 + a| \le 2$
$|2 + a| \le 1$

Получаем совокупность систем

Если $a \ge -2$	Если $a < -2$
$\begin{cases} a \ge -2 \\ 2 + a \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -2 \\ a \le -1 \end{cases}$ => $-2 \le a \le -1$	$\begin{cases} a < -2 \\ -2 - a \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a < -2 \\ a \ge -3 \end{cases}$ => $-3 \le a < -2$



Ответ: $a \in [-3; -1]$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Решение:

а)
В данном множестве много простых чисел, например:

199 – простое число, поэтому множество нельзя разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел: одно из произведений будет делиться на 199, а другое нет, т.к. в этом произведении не может содержаться делителя 199
=>
Нет

б)
Заметим, что
$2 \cdot 2^{200} = 2^{201}$
$4 \cdot 2^{199} = 2^{201}$
$8 \cdot 2^{198} = 2^{201}$
и т.д.
=>
Получаем два подмножества:
$\{2^1; 2^{200}; 2^3; 2^{198}; \dots; 2^{99}; 2^{102}\}$
$\{2^2; 2^{199}; 2^4; 2^{197}; \dots; 2^{100}; 2^{101}\}$

В каждом из подмножеств произведение всех 100 чисел равно $(2^{201})^{50}$
=>
Множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ является хорошим
=>
Да

в)
5, 7, 11 – простые числа, которые не могут входить в хорошие подмножества (тройку сюда не включаем, т.к. у других чисел множества есть тройка в числе делителей)
=>
У нас остались $\{1; 3; 4; 6; 9; 12\}$

К числу 1 в пару можно взять только 12
$\{1; 12; 3; 4\}$

К числу 3 в пару можно взять только 12
$\{3; 12; 4; 9\}$

К числам 4, 6, 9 и 12 в пару не получается взять никакое число

Ответ: а) нет, б) да, в) 2

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180401