Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

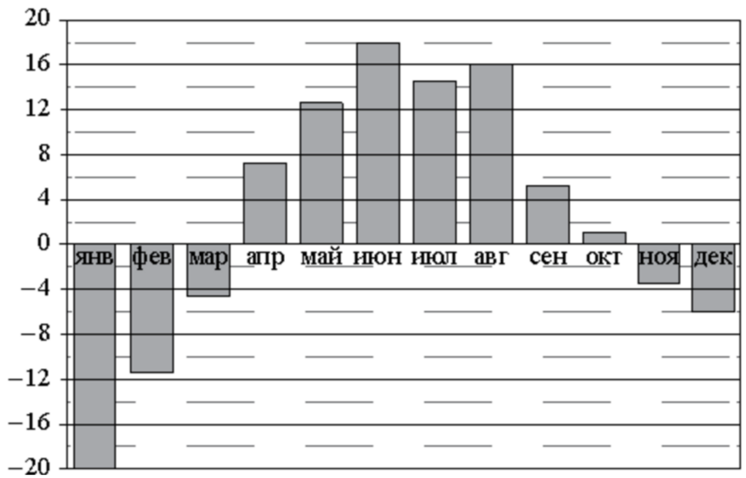
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Одна таблетка лекарства содержит 1,4 мг активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,2 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку, возраст которого четыре месяца и вес 7 кг, в течение суток?

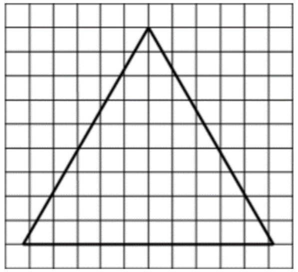
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура не превышала 6 градусов Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ___________________________.

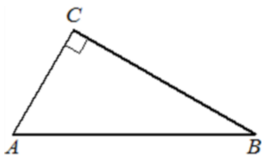
4 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$6^{1+3x} = 36^{2x}$.

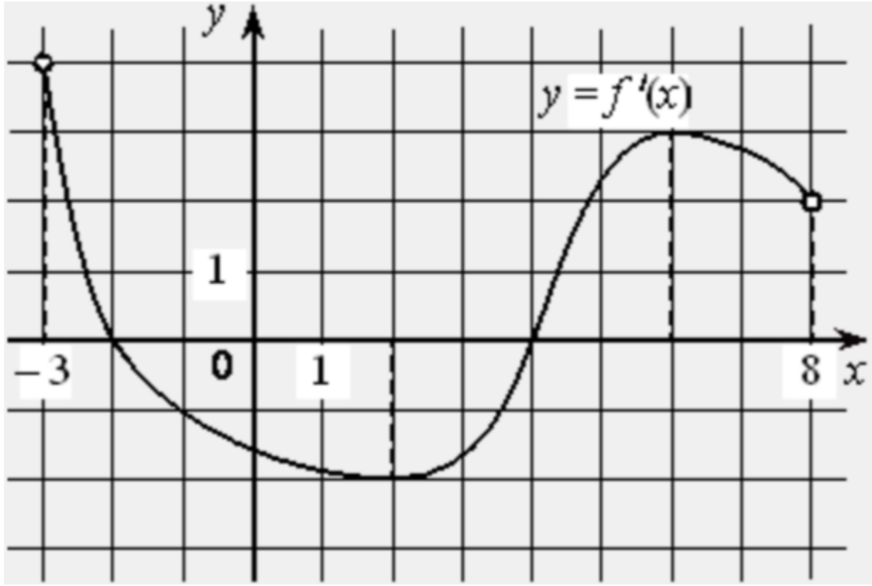
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5$, $BC = 4$. Найдите $\cos A$.



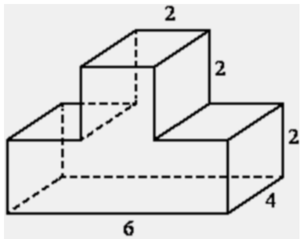
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f`(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы – прямые).



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{10}{\cos^2 92^\circ + 1 + \cos^2 182^\circ}.$$

Ответ: ___________________________.

10 Наблюдатель находится на высоте h (в км). Расстояние l (в км) от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 96 км? Ответ дайте в км.

Ответ: ___________________________.

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции
$y = x^3 + 12x^2 + 36x + 20$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1.$$

16 Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$x^2 - |x + 2 + a| = |x - a - 2| - (a + 2)^2$
имеет единственный корень.

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	6
2	7
3	6
4	0,16
5	1
6	0,6
7	4
8	112
9	5
10	0,72
11	27
12	-2
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) -3π
14	$\frac{80\sqrt{3}}{3}$
15	$\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(64;+\infty)$
16	30
17	36
18	$a=0;\ a=-4$
19	а) Не может, б) Не может, в) 4

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение
$36^{\sin 2x}=6^{2\sin x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:
а)
$(6^2)^{\sin 2x}=6^{2\sin x}$

Возведение степени в степень
$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$

$6^{2\sin 2x}=6^{2\sin x}$
$2\sin 2x=2\sin x$
$\sin 2x=\sin x$

Синус двойного угла
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin x\cdot\cos x=\sin x$
$2\sin x\cdot\cos x-\sin x=0$
$\sin x\cdot(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ $x=\pi n;n\in Z$	$2\cos x-1=0$ $2\cos x=1$ $\cos x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$ $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$

б)
Подберём корни для $x=\pi n;n\in Z$
Если $n=-4$, то $x=-4\pi\notin\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n=-3$, то $x=-3\pi\in\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n=-2$, то $x=-2\pi\notin\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$
Если $n=-2$, то $x=\frac{\pi}{3}-4\pi=-\frac{11\pi}{3}\notin\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n=-1$, то $x=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}\notin\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$
Если $n=-2$, то $x=-\frac{\pi}{3}-4\pi=-\frac{13\pi}{3}\notin\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n=-1$, то $x=-\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{7\pi}{3}\notin\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$

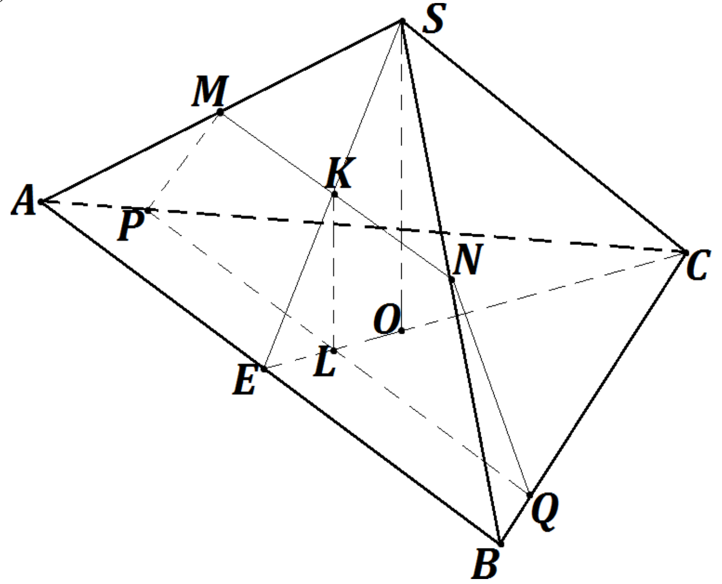
Ответ: а) $\pi n,\frac{\pi}{3}+2\pi n,-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z$. б) -3π

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.
.

Решение:
а)



Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:
Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой
Пусть $(SEC)\cap MN=K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$
Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$
Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
$MNQP$ – сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ – прямоугольный:
Т.к. K – середина SE и $KL \parallel SO$, то KL – средняя линия $\triangle SOE$
=> L – середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE – медиана в $\triangle ABC$, то:

$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$

$$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)

$$V_{CMNQP} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNQP} \cdot CL$$

Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (т.к. MN – средняя линия $\triangle ABS$)

$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$ (т.к. $\frac{CL}{LE} = 5:1$)

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4$ (по теореме Пифагора)

$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (т.к. KL – средняя линия $\triangle SOE$)

$$S_{MNQP} = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 2 = 16$$

$$CL = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 5\sqrt{3}$$

$$V_{CMNQP} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1.$$

.

Решение:

ОДЗ:
1.
$4x^2 > 0$
$x \neq 0$
2.
$x > 0$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

$$\frac{\log_2 4 + \log_2 x^2 + 35}{\log_2^2 x - 36} + 1 \geq 0$$

$$\frac{2 + 2\log_2 x + 35}{\log_2^2 x - 36} + 1 \geq 0$$

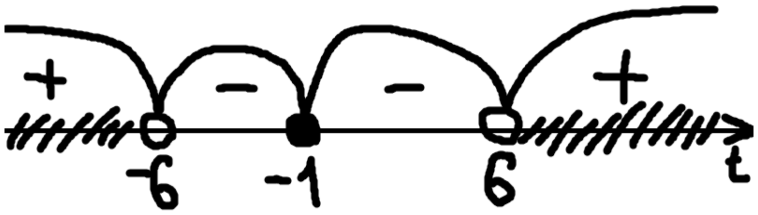
$$\frac{2\log_2 x + 37 + \log_2^2 x - 36}{\log_2^2 x - 36} \geq 0$$

Пусть $\log_2 x = t$

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - 36} \geq 0$$

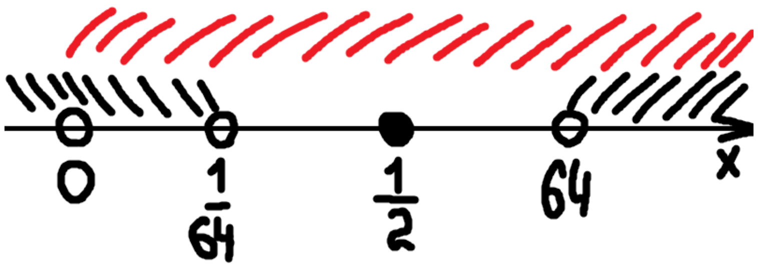
$$\frac{(t+1)^2}{t^2 - 36} \geq 0$$

$(t+1)^2 = 0$ $t = -1$	$t^2 - 36 \neq 0$ $t \neq \pm 6$



$t < -6$ $\log_2 x < \log_2 \frac{1}{64}$ $x < \frac{1}{64}$	$t = -1$ $\log_2 x = -1$ $\log_2 x = \log_2 \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{2}$	$t > 6$ $\log_2 x > 6$ $\log_2 x > \log_2 64$ $x > 64$

Объединим корни и промежутки с ОДЗ:



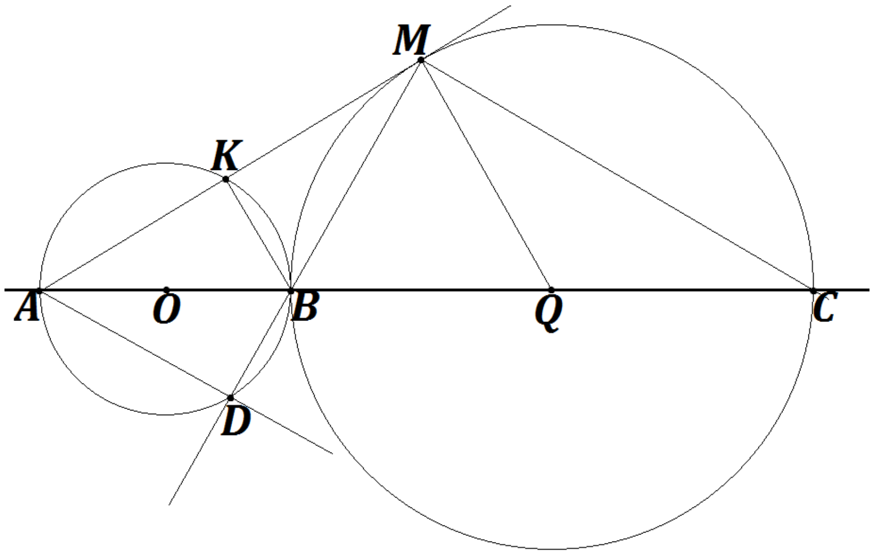
Ответ: $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (64; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение:
а)



$\angle ADB = 90°$
$\angle BMC = 90°$
(т.к. это вписанные углы, опирающиеся на диаметр)

=>
$AD \perp DM$
$MC \perp DM$
=>
$AD \parallel MC$
■

б)
$AK = 3$
$MK = 12$
$AM = 15$

Найдём площадь треугольника DBC по формуле
$$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin\angle DBC$$

Осталось найти все элементы уравнения:

Пусть
O − центр окружности с диаметром AB
Q − центр окружности с диаметром BC
$AO = r$
$BQ = R$

Построим BK и MQ
$\angle AKB = 90°$
$\angle AMQ = 90°$
(т.к. это вписанные углы, опирающиеся на диаметр)

$\triangle ABK \sim \triangle AMQ$ по двум углам
$$\frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AQ} = \frac{BK}{MQ}$$

$$\frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AQ}$$
$$\frac{3}{15} = \frac{2r}{2r+R}$$
$$6r + 3R = 30r$$
$$3R = 24r$$
$$R = 8r$$

$$\frac{AK}{AM} = \frac{BK}{MQ}$$
$$\frac{3}{15} = \frac{BK}{R}$$
$$15BK = 3R$$
$$BK = \frac{R}{5}$$
$$BK = \frac{8r}{5}$$

Рассмотрим $\triangle ABK$ − прямоугольный
$$AB^2 = AK^2 + BK^2$$
$$(2r)^2 = 3^2 + \left(\frac{8r}{5}\right)^2$$
$$4r^2 = 9 + \frac{64r^2}{25}$$
$$\frac{36r^2}{25} = 9$$
$$r^2 = \frac{9 \cdot 25}{36}$$

$r = \dfrac{3 \cdot 5}{6} = 2{,}5$

$R = 8r = 8 \cdot 2{,}5 = 20$
$BC = 2R = 2 \cdot 20 = 40$
$BK = \dfrac{8r}{5} = \dfrac{8 \cdot 2{,}5}{5} = 4$
$BM = \sqrt{BK^2 + MK^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$ (по теореме Пифагора)

Чтобы найти $\sin \angle DBC$ найдём синус смежного угла MBQ

По теореме косинусов из $\triangle MBQ$
$MQ^2 = BM^2 + BQ^2 - 2 \cdot BM \cdot BQ \cdot \cos \angle MBQ$
$20^2 = \left(4\sqrt{10}\right)^2 + 20^2 - 2 \cdot 4\sqrt{10} \cdot 20 \cdot \cos \angle MBQ$
$0 = 160 - 160\sqrt{10} \cdot \cos \angle MBQ$
$160\sqrt{10} \cdot \cos \angle MBQ = 160$
$\cos \angle MBQ = \dfrac{160}{160\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$
$\sin \angle MBQ = \sqrt{1 - \cos^2 \angle MBQ} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$
$\sin \angle DBC = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$
(т.к. синусы смежных углов равны)

$\triangle ABD \sim \triangle BCM$ по двум углам
$\left(\begin{array}{c} \angle ABD = \angle MBC - \text{вертикальные} \\ \angle ADB = \angle BMC = 90° \end{array}\right)$

$\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{AB}{BC}$

$\dfrac{BD}{4\sqrt{10}} = \dfrac{5}{40}$

$\dfrac{BD}{4\sqrt{10}} = \dfrac{1}{8}$

$BD = 0{,}5\sqrt{10}$

$S_{DBC} = \dfrac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC$

$S_{DBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}5\sqrt{10} \cdot 40 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 30$

Ответ: 30

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

рублей)						

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.
.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{15}{100}\right)\cdot S = 1{,}15\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}8\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}15\cdot S - 0{,}8\cdot S = 0{,}35\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}15\cdot 0{,}8\cdot S = 0{,}92\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}5\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}92\cdot S - 0{,}5\cdot S = 0{,}42\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}15\cdot 0{,}5\cdot S = 0{,}575\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0{,}1\cdot S$

=>

01.04.2019	$0{,}575\cdot S - 0{,}1\cdot S = 0{,}475\cdot S$

20209 год

01.01.2020	$1{,}15\cdot 0{,}1\cdot S = 0{,}115\cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0{,}115\cdot S - 0 = 0{,}115\cdot S$

Общая сумма выплат должна быть меньше 50 млн рублей
(по условию)
=>
$0{,}35\cdot S + 0{,}42\cdot S + 0{,}475\cdot S + 0{,}115\cdot S < 50$ млн
$1{,}36\cdot S < 50$
$S < \frac{5000}{136}$
$S < \frac{625}{17}$
$S < 36\frac{13}{17}$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S
=>
$S = 36$

Ответ: 36

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3

Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$x^2 - |x+2+a| = |x-a-2| - (a+2)^2$
имеет единственный корень.

Решение:

$x^2 - |x+2+a| - |x-a-2| + (a+2)^2 = 0$

Рассмотрим функцию
$f(x) = x^2 - |x+2+a| - |x-a-2| + (a+2)^2$

Заметим, что $f(x)$ – чётная, т.к. $f(-x) = f(x)$
$f(-x) = (-x)^2 - |-x+2+a| - |-x-a-2| + (a+2)^2$
$f(-x) = x^2 - |x-2-a| - |x+a+2| + (a+2)^2$

=>
$x = 0$ (для выполнения единственности решения)
Подставим в уравнение $x = 0$:

$0^2 - |0-2-a| - |0+a+2| + (a+2)^2 = 0$

$-|-2-a| - |a+2| + (a+2)^2 = 0$

$-|a+2| - |a+2| + (a+2)^2 = 0$

$(a+2)^2 - 2|a+2| = 0$

$|a+2|^2 - 2|a+2| = 0$

$|a+2| \cdot (|a+2| - 2) = 0$

$a = -2$	$a = 0$	$a = -4$

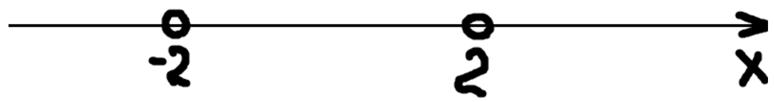
Проверим, получается ли единственное решение при подстановке данных значений a

Если $a = -2$
$x^2 - |x+2+a| = |x-a-2| - (a+2)^2$
$x^2 - |x+2-2| = |x+2-2| - (-2+2)^2$
$x^2 - |x| = |x|$
$x^2 - 2|x| = 0$
$|x|^2 - 2|x| = 0$
$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$

$x = 0$	$x = 2$	$x = -2$

=>
$a = -2$ не подходит

Если $a = 0$
$x^2 - |x+2+a| = |x-a-2| - (a+2)^2$
$x^2 - |x+2| = |x-2| - 2^2$
$x^2 - |x+2| = |x-2| - 4$
$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$
Найдём при каких x модули обращаются в нули:



Если $x < -2$, то
$x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$
$x^2 + 2x + 4 = 0$
$x^2 + 2x + 1 + 3 = 0$
$(x+1)^2 + 3 = 0$
Нет корней

Если $-2 < x < 2$, то
$x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$
$x^2 = 0$
$x = 0$
1 корень

Если $x > 2$, то
$x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$
$x^2 - 2x + 4 = 0$
$x^2 - 2x + 1 + 3 = 0$
$(x-1)^2 + 3 = 0$
Нет корней
=>
$a = 0$ подходит

Если $a = -4$
$x^2 - |x + 2 - 4| = |x + 4 - 2| - (-4 + 2)^2$
$x^2 - |x - 2| = |x + 2| - 2^2$
$x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$
Получаем такое же уравнение, как и при $a = 0$
=>
$a = -4$ подходит

Ответ: $a = 0$; $a = -4$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?
.

Решение:

а)
Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Среди данных чисел нет противоположных
=>
Ни одна сумма не будет равна нулю
=>
Произведение не будет равно нулю
=>
Не может

б)
Среди 8 данных чисел 5 нечётных и 3 чётных
=>
Как минимум 2 суммы будут являться суммами нечётных чисел
=>
Эти 2 суммы будут чётными и в результате умножения сумм не получится нечётной единицы, потому что если один из множителей чётный, то всё произведение чётное

Пример:

1	−2	−3	4	−5	7	−8	9
−2	1	4	−3	9	−8	7	−5
н	н	н	н	ч	н	н	ч

$-1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4 = 16$ (чётное число)
=>
Не может

в)
Как мы отметили в предыдущем пункте, как минимум 2 суммы будут являться чётными, т.к. они являются суммами пары нечётных чисел
=>
Искомое целое неотрицательное число – это как минимум 4. Приведём пример такой ситуации:

1	-2	-3	4	-5	7	-8	9
-2	1	4	-3	7	-5	9	-8
н	н	н	н	ч	ч	н	н

$-1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

Ответ: а) Не может, б) Не может, в) 4

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325