Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

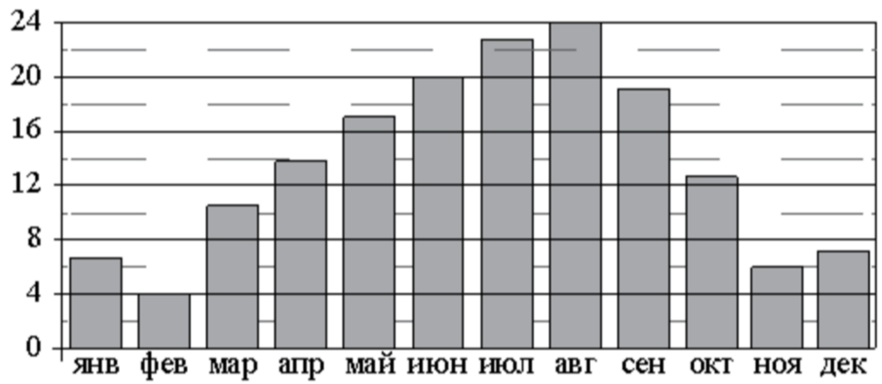
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 26 литров бензина. Цена бензина 38 руб. за литр. Какую сдачу должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

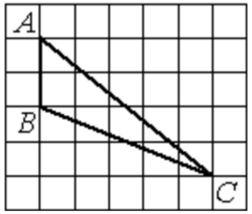
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.



Ответ: ____________________________.

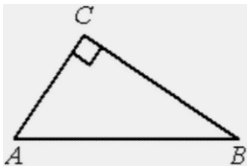
4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5 или 6.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\sqrt{28 - 2x} = 2$.

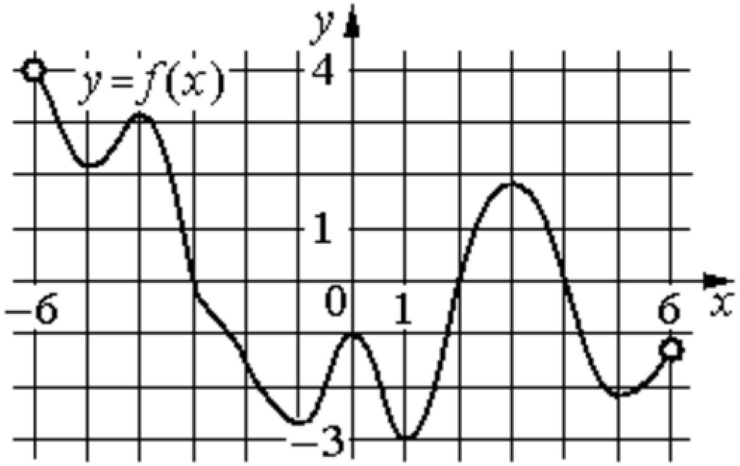
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 6$,
$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите AB.



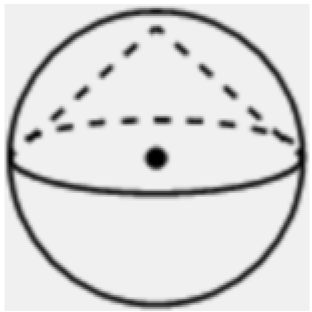
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f`(x) = 0$ на отрезке $[-4,5; 2,5]$.



Ответ: ____________________________.

8 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325

9 Найдите

$\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Ответ: ____________________________.

10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -\frac{14}{3}$ К/мин^2, $b = 98$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________________.

11 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = -7 + 75x - x^3$ на отрезке $[-5; 5]$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный $(AB = BC)$ треугольник ABC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

15 Решите неравенство

$\log_2^2(8 + 2x - x^2) + 9\log_{0,5}(8 + 2x - x^2) + 18 > 0.$

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{3}{x+1}=a|x-5|$$

на промежутке $[0;+\infty)$ имеет более двух корней.

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 85?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	12
2	20
3	5
4	0,25
5	12
6	9
7	4
8	50
9	-3
10	6
11	90
12	243
13	а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б) $\frac{7\pi}{3}$
14	$\arccos\frac{\sqrt{371}}{21}$
15	$(-2;0)\cup(2;4)$
16	4,375
17	3
18	$\left(\frac{1}{3};\frac{3}{5}\right]$
19	а) да, например, для числа 510, б) Нет, в) 91

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

а)

$\cos^2 x\cdot(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$

$(2\cos x - 1)\cdot(\cos^2 x + 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$ $2\cos x = 1$ $\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$	$\cos^2 x + 1 = 0$ $\cos^2 x = -1$ Нет решений

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{7\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

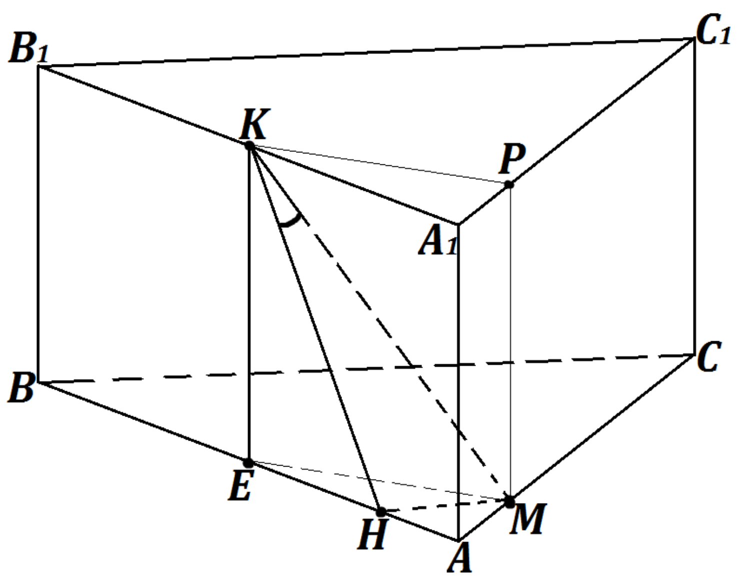
14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный $(AB = BC)$ треугольник ABC. Точка $K -$ середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM: MC = 1: 3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

Решение:

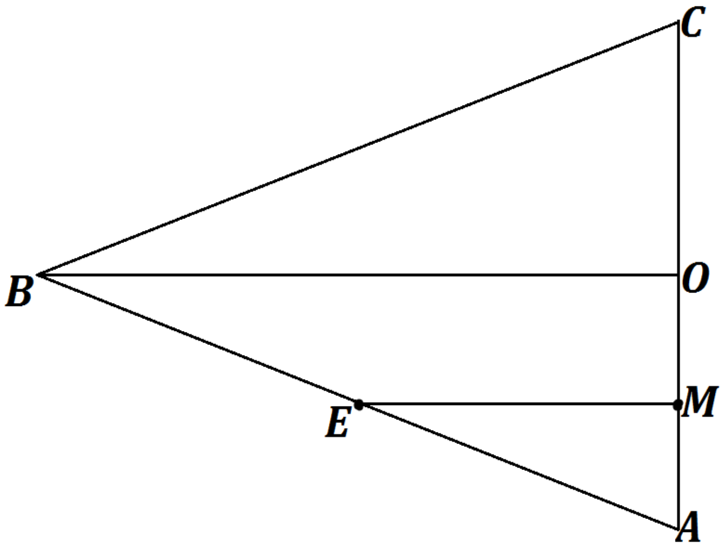
а)



Опустим перпендикуляр KE на плоскость «пола», т.е. на плоскость ABC

Опустим перпендикуляр MP на плоскость «потолка», т.е. на плоскость $A_1B_1C_1$

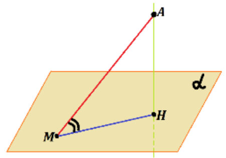
Рассмотрим $\triangle\ ABC -$ равнобедренный



Пусть BO — высота в $\triangle ABC$
E — середина AB
$AM : MC = 1:3$
=>
M — середина AO
=>
EM — средняя линия $\triangle ABO$
=>
$EM \parallel BO$
=>
$EM \perp AC$
=>
$(KPME) \perp AC$
=>
$KM \perp AC$
■

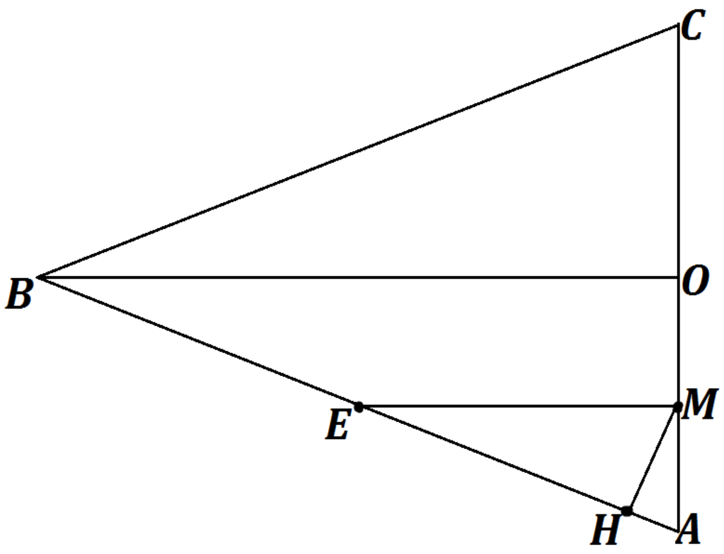
б)

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

Пусть MH — высота в $\triangle AEM$



Тогда KH — проекция KM на «ближнюю стену», т.е. на плоскость ABB_1
=>
$\angle MKH$ — искомый

Найдём все стороны треугольника MKH:

Найдём HM:
$$CO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$
$$AM = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$
$$\cos \angle BCO = \frac{CO}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\cos\angle BAO = \dfrac{2}{3}$

(т.к. $\triangle ABC$ – равнобедренный)

$\cos\angle HAM = \dfrac{2}{3} = \dfrac{AH}{AM}$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{AH}{2}$

$AH = \dfrac{4}{3}$

$HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{9}}$ (по теореме Пифагора)

Найдём KH:

$EH = AE - AH = 3 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3}$

$KE = AA_1 = 3$

$KH = \sqrt{KE^2 + EH^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{106}{9}}$ (по теореме Пифагора)

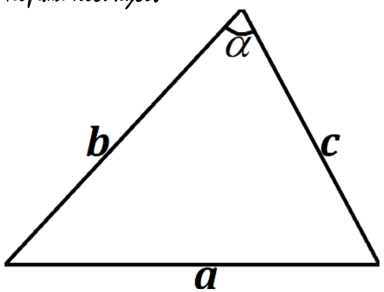
Найдём KM:

$BO = \sqrt{BC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)

$EM = \dfrac{1}{2}BO = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$KM = \sqrt{KE^2 + EM^2} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{14}$ (по теореме Пифагора)

Теорема Косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

или

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos\angle MKH = \dfrac{MK^2 + KH^2 - HM^2}{2\cdot MK\cdot KH}$

$\cos\angle MKH = \dfrac{14 + \frac{106}{9} - \frac{20}{9}}{2\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{\frac{106}{9}}} = \dfrac{212\cdot 3}{9\cdot 2\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{106}} =$

$= \dfrac{\sqrt{106}}{3\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{53}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{371}}{21}$

$\angle MKH = \arccos\dfrac{\sqrt{371}}{21}$

Ответ: б) $\arccos\frac{\sqrt{371}}{21}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$\log_2^2(8 + 2x - x^2) + 9\log_{0,5}(8 + 2x - x^2) + 18 > 0.$

.

Решение:

ОДЗ:

$8 + 2x - x^2 > 0$

$-x^2 + 2x + 8 = 0$

$D = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8 = 36$

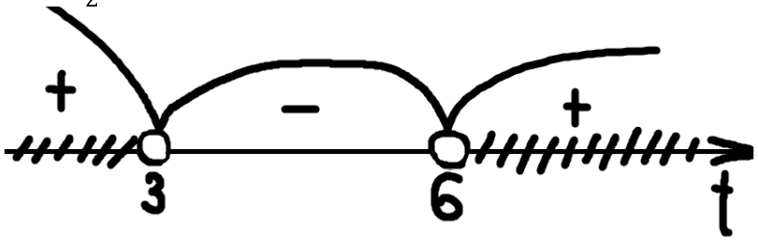
$t_1 = \dfrac{-2 + 6}{-2} = -2$

$t_2 = \dfrac{-2 - 6}{-2} = 4$

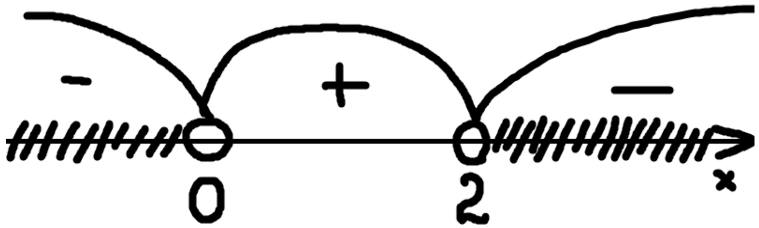
$\log_2^2(8+2x-x^2)+9\log_{2^{-1}}(8+2x-x^2)+18>0$
$\log_2^2(8+2x-x^2)-9\log_2(8+2x-x^2)+18>0$

Пусть $\log_2(8+2x-x^2)=t$

$t^2-9t+18>0$
$t^2-9t+18=0$
$D=(-9)^2-4\cdot1\cdot18=9$
$t_1=\dfrac{9+3}{2}=6$
$t_2=\dfrac{9-3}{2}=3$

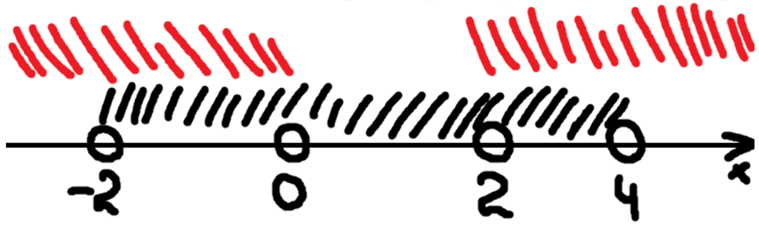


1.
$t<3$
$\log_2(8+2x-x^2)<3$
$\log_2(8+2x-x^2)<\log_2 8$
$8+2x-x^2<8$
$-x^2+2x<0$
$-x(x-2)<0$
$-x(x-2)=0$
$x=0$
$x=2$



2.
$t>6$
$\log_2(8+2x-x^2)>6$
$\log_2(8+2x-x^2)>\log_2 64$
$8+2x-x^2>64$
$-x^2+2x-56>0$
$-x^2+2x-56=0$
$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-56)<0$
Нет корней
3.
ОДЗ:
$x\in(-2;4)$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $(-2;0)\cup(2;4)$

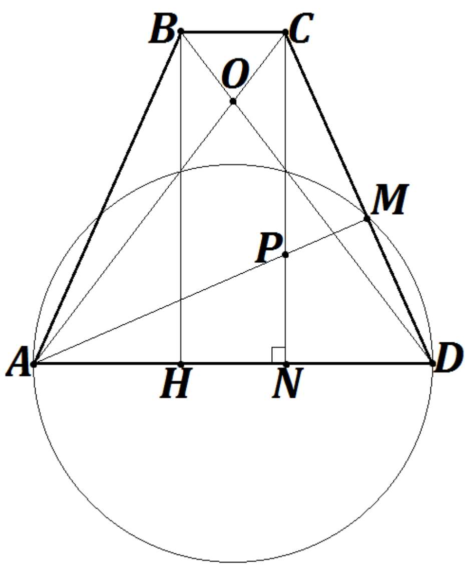
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

перечисленных выше	
Максимальный балл	2

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.
б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.
.

Решение:
а)



Чтобы доказать то, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность нужно получить равенство:
$AP + BC = AB + CP$

$\angle AMD = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)
$\angle CND = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

=>
CN — высота трапеции

Пусть
$BD \cap AC = O$
BH — высота трапеции

$\angle BCO = 45°$
(т.к. $\triangle BCO$ — прямоугольный и равнобедренный)
=>
$\angle CAN = 45°$
(т.к. это накрест лежащие углы)
$\angle ACN = \angle BCN - \angle BCO = 90 - 45 = 45°$
=>
$\triangle ACN$ — прямоугольный и равнобедренный
=>
$AN = CN$

Пусть
$AH = x$
$BC = y$

Тогда
$AN = x + y = CN$
$DN = x$

$CD = \sqrt{CN^2 + DN^2} = \sqrt{(x + y)^2 + x^2}$ (по теореме Пифагора)
$AB = CD = \sqrt{(x + y)^2 + x^2}$

Пусть
$\angle MAD = \alpha$

Тогда
$\angle ADM = 180 - \angle AMD - \angle MAD = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$
$\angle DCN = 180 - \angle CND - \angle CDN = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

$\triangle APN = \triangle CDN$ по стороне и двум прилежащим к ней углам

$$\begin{pmatrix} AN = CN \\ \angle ANP = \angle CND = 90° \\ \angle PAN = \angle NCD = \alpha \end{pmatrix}$$

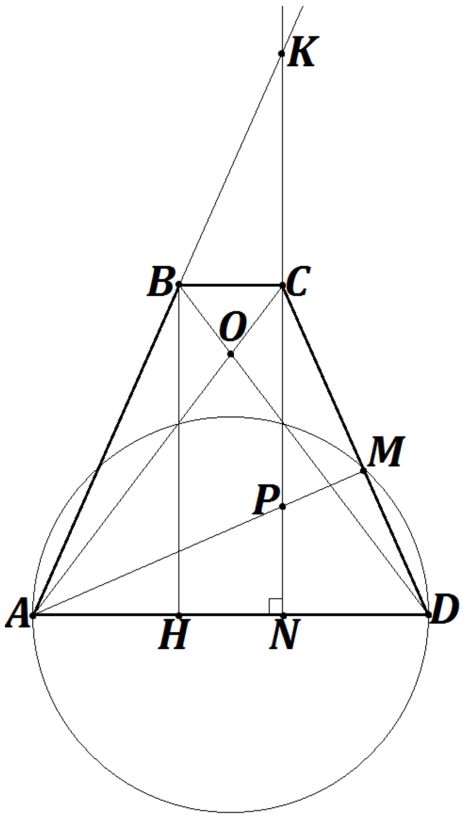
=>

$AP = CD = \sqrt{(x+y)^2 + x^2}$
$PN = DN = x$
=>
$CP = CN - PN = x + y - x = y$

=>
$AP + BC = AB + CP$

$\sqrt{(x+y)^2 + x^2} + y = \sqrt{(x+y)^2 + x^2} + y$
=>
В четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность
■

б)

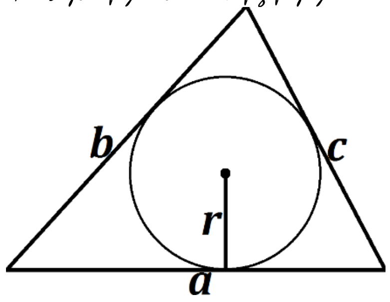


Пусть

$CN \cap AB = K$

Идея поиска радиуса, вписанного в четырёхугольник, заключается в том, что можно найти радиус, вписанный в $\triangle AKP$ через формулу площади треугольника

Площадь треугольника (через радиус вписанной окружности)



$S = pr$
где p — полупериметр

$BC = y = 7 = CP$
$AD = 2x + y = 23$
=>
$x = 8$
$AN = x + y = 8 + 7 = 15 = CN$
$AB = \sqrt{(x+y)^2 + x^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 = AP$

$\triangle AKN \sim \triangle BCK$ по двум углам

$$\frac{AN}{BC} = \frac{AK}{BK}$$

$$\frac{15}{7} = \frac{17 + BK}{BK}$$

$15BK = 119 + 7BK$
$8BK = 119$

$$BK = \frac{119}{8} = 14{,}875$$

$$\frac{AN}{BC} = \frac{KN}{CK}$$

$$\frac{15}{7}=\frac{15+CK}{CK}$$

$15CK=105+7CK$
$8CK=105$
$CK=\frac{105}{8}=13{,}125$

$$S_{APK}=\frac{1}{2}\cdot PK\cdot AN=\frac{1}{2}\cdot(CK+CP)\cdot AN$$
$$S_{APK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{105}{8}+7\right)\cdot 15=\frac{1}{2}\cdot\frac{161}{8}\cdot 15=\frac{2415}{16}$$

$$p=\frac{AP+PK+AK}{2}=\frac{17+\frac{161}{8}+17+\frac{119}{8}}{2}=\frac{69}{2}$$

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{2415}{16}}{\frac{69}{2}}=4{,}375$$

Ответ: 4,375

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение:

Пусть x – сумма кредита

Тогда $1{,}3x$ – общая сумма выплат, превышающая сумму кредита на 30%

Составим таблицу:

Месяц	Долг на начало месяца	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	x	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot x$
2	$\frac{18x}{19}$	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{18x}{19}$
…			
19	$\frac{x}{19}$	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 19 \cdot \frac{x}{19} + \frac{\frac{r}{100} \cdot x + \frac{r}{100} \cdot \frac{x}{19}}{2} \cdot 19 = 1{,}3x$$

$$19 \cdot \frac{x}{19} + \frac{\frac{r}{100} \cdot x + \frac{r}{100} \cdot \frac{x}{19}}{2} \cdot 19 = 1{,}3x$$

$$\frac{\frac{r}{100} \cdot \left(x + \frac{x}{19}\right)}{2} \cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r \cdot \frac{20x}{19}}{200} \cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r \cdot 20x}{200 \cdot 19} \cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r \cdot x}{10} = 0{,}3x \qquad \Big| : x$$

$$\frac{r}{10} = 0{,}3 \qquad \Big| \cdot 10$$

$$r = 3$$

Ответ: 3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{3}{x+1} = a|x - 5|$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение:

Решим графически:

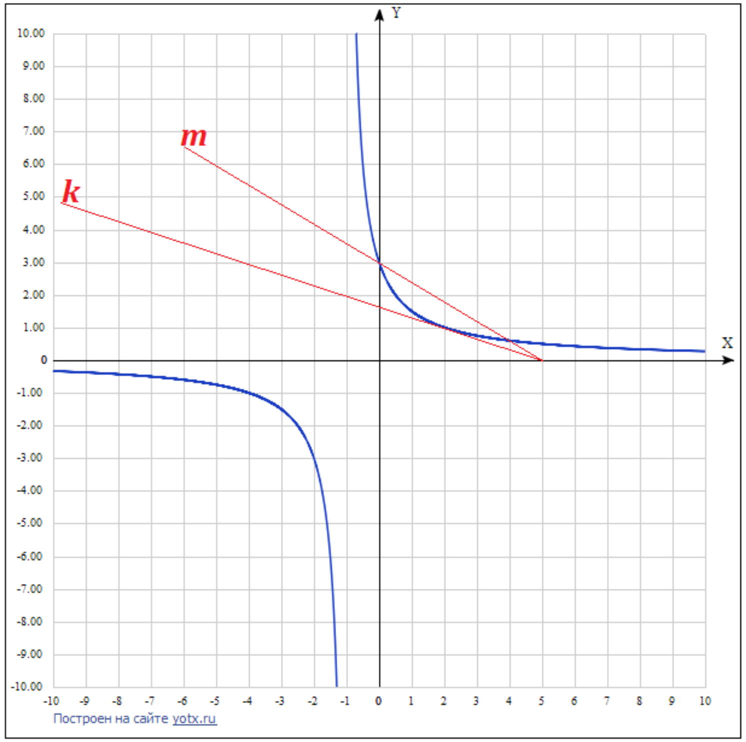
Построим гиперболу $y = \frac{3}{x+1}$ (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

Уравнение $y = a|x - 5|$ задаёт множество «галочек», проходящих через точку $(5; 0)$

Если $a = 1$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $a < 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. «галочка» будет располагаться ниже оси Ox)
Если $a = 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. «галочка» станет осью абсцисс)
Если $a > 1$, то получаем 2 пересечения с гиперболой (т.к. «галочка» будет сужаться)

Пусть
$m -$ прямая (левая ветка «галочки»), проходящая через точку $(0; 3)$
$k -$ прямая (левая ветка «галочки»), проходящая через точку касания гиперболы

Проведём прямые m и k:



Левая ветка «галочки» – это убывающая прямая, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные

$y = a|x-5|$

$y = -ax + 5a$ – множество убывающих лучей, стартующих из точки $(5;0)$

Графики имеют три общие точки, если прямые $y = -ax + 5a$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми m и k, найдём значения параметров a, соответствующих этим прямым:

Найдём значение параметра a у прямой m:

$y = -ax + 5a$ проходит через т. $(0;3)$

$3 = -a \cdot 0 + 5a$

$3 = 5a$

$a = \dfrac{3}{5}$

Найдём значение параметра a у прямой k:

$y = -ax + 5a$ является касательной к гиперболе $\frac{3}{x+1}$

Условие касания функции и прямой

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-ax+5a)' = \left(\dfrac{3}{x+1}\right)' \\ -ax+5a = \dfrac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = (3\cdot(x+1)^{-1})' \\ -ax+5a = \dfrac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = \dfrac{-3}{(x+1)^2} \\ -ax+5a = \dfrac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{3}{(x+1)^2} \\ -ax+5a = \dfrac{3}{x+1} \end{cases}$$

Подставим значение a под второе уравнение системы:

$$\frac{-3x}{(x+1)^2} + \frac{5\cdot 3}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$$

$$\frac{-3x+15}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$$

$$\frac{-x+5}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$$

$(x+1)^2 = (x+1)\cdot(5-x)$

$(x+1)^2 - (x+1)\cdot(5-x) = 0$

$(x+1)\cdot(x+1-5+x) = 0$

$x \neq -1$

$2x - 4 = 0$

$x = 2$

$$a = \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$$

Если $a = \frac{3}{5}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $a = \frac{1}{3}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{5}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 85?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?
.

Решение:

Пусть
a – число сотен $1 \le a \le 9$
b – число десятков $0 \le b \le 9$
c – число единиц $0 \le c \le 9$
Но b и c вместе не должны равняться нулю

Тогда
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ – данное трёхзначное число

а)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 85$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 85 \cdot (a+b+c)$
$100a + 10b + c = 85a + 85b + 85c$
$15a = 75b + 84c$

c может быть только нулём

Тогда
$15a = 75b$

Нетрудно подобрать подходящую комбинацию:
$a = 5$
$b = 1$
$c = 0$
=>
Может, частное числа 510 и суммы его цифр равно 85

б)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a+b+c} = 84$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 84 \cdot (a+b+c)$
$100a + 10b + c = 84a + 84b + 84c$
$16a = 74b + 83c$

Рассмотрим варианты комбинаций b и c, начиная с наименьших:
Вариант #1
$b = 0$
$c = 0$
Не подходит по условию
Вариант #2
$b = 0$
$c = 1$

Тогда
$16a = 83$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #3
$b = 1$
$c = 0$

Тогда
$16a = 74$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #4
$b = 1$
$c = 1$

Тогда
$16a = 74 + 83$
$16a = 157$
Не подходит, т.к.
$1 \leq a \leq 9$
$16 \leq 16a \leq 144$
=>
дальнейшее увеличение значений b и c не имеет смысла, т.к. правая часть уравнения будет всё больше и больше
=>
Не может

в)
Пусть
k – искомое наибольшее значение частного

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = k$$

$$100a + 10b + c = ka + kb + kc$$

$$100a - ka = kb - 10b + kc - c$$

$$(100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c$$

По условию:

$$a \leq 9 \quad \Big| \cdot (100 - k)$$

$$(100 - k)a \leq 9(100 - k)$$

$$(k - 10)b + (k - 1)c \leq 9(100 - k)$$

Сравним
$(k - 1)c$ и $(k - 10)c$
$kc - c$ и $kc - 10c$
=>

$$(k - 1)c \geq (k - 10)c \quad \Big| + (k - 10)b$$

$$(k - 10)b + (k - 1)c \geq (k - 10)b + (k - 10)c$$

Получаем двойное неравенство:
$(k - 10)b + (k - 10)c \leq (k - 10)b + (k - 1)c \leq 9(100 - k)$

Оставляем только крайние части двойного неравенства
=>
$(k - 10)b + (k - 10)c \leq 9(100 - k)$
$(k - 10)(b + c) \leq 9(100 - k)$

$(b + c)$ должно быть, как можно меньшим, т.к. правая часть неравенства будет тем больше, чем меньше будет левая

$(b + c) \neq 0$ (по условию)
=>
$(b + c) \geq 1$

Возьмём $(b + c) = 1$

$(k - 10) \cdot 1 \leq 9(100 - k)$
$k - 10 \leq 900 - 9k$
$10k \leq 910$
$k \leq 91$

Требуется найти наибольшее подходящее натуральное k
=>
$k = 91$

Приведём пример

910

$$\frac{9 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 0}{9 + 1 + 0} = 91$$

Ответ: а) да, например, для числа 510, б) Нет, в) 91

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4