Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8.

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

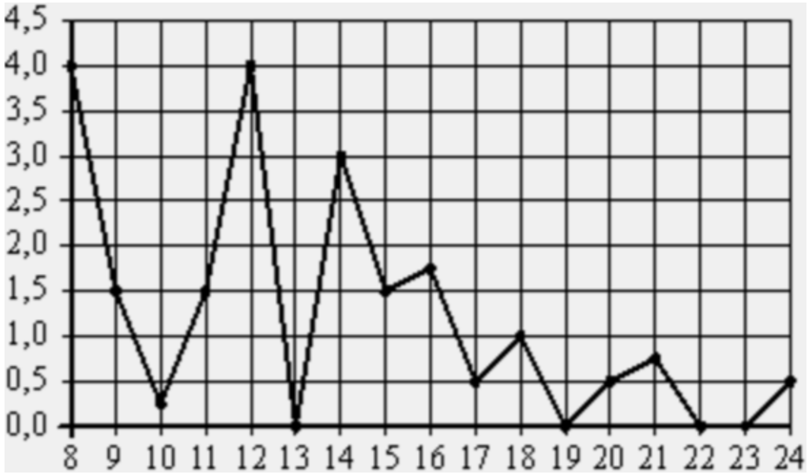
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Килограмм вишни стоит 80 рублей. Маша купила 3 кг 300 г вишни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 300 рублей?

Ответ: ____________________________.

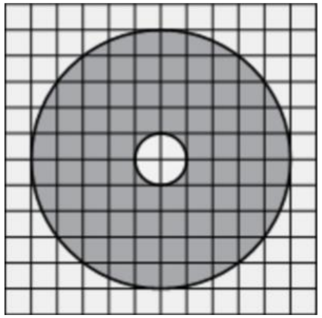
2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее суточное количество осадков выпадало за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325

3 На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: ___________________________.

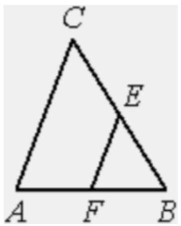
4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(x-10)^7 = 1$.

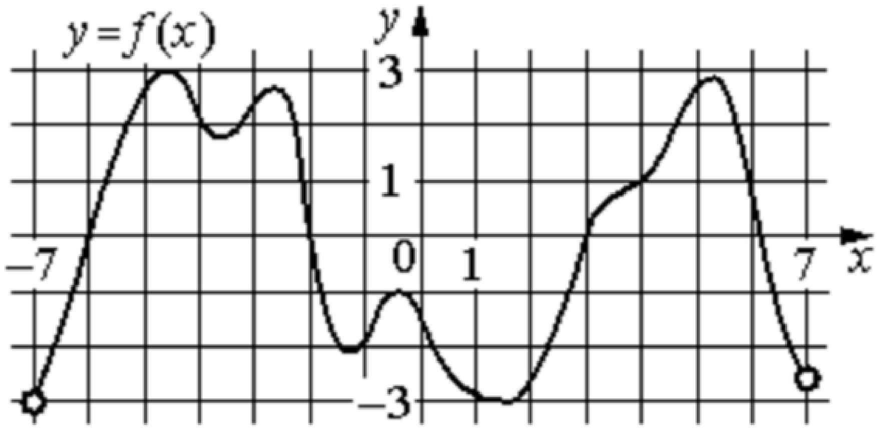
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC EF – средняя линия. Площадь треугольника BEF равна 4. Найдите площадь треугольника ABC.



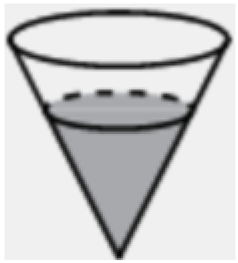
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ: ___________________________.

8 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 144 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325

9 Найдите
$\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана- Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где $P -$ мощность излучения звезды, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} -$ постоянная, $S -$ площадь поверхности звезды, а $T -$ температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{625} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна
$5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

Ответ: ___________________________.

11 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции
$y = 9x - \ln(x+4)^9$ на отрезке $[-3{,}5; 0]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$4\cos^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

15 Решите неравенство

$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \le 2 \cdot 5^x - 24.$$

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч $AC -$ биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325

17 Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

18 Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

19 а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10

Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания

Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	36
2	4
3	288
4	0,25
5	11
6	16
7	5
8	342
9	0,96
10	5000
11	8
12	-27
13	а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}$
14	$0{,}4\sqrt{10}$
15	$(-\infty; 0) \cup [1; \log_5 7)$
16	5
17	9
18	$0 < a < 1$
19	а) нет, б) $(2; 3; 4; 5; 6; 7)$, в) 12

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$4\cos^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение:

$4\cos^2 x - 8\cos x - 5 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$4t^2 - 8t - 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 64 + 80 = 144 = 12^2$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{8+12}{8} = 2{,}5$ (нет решений)

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{16\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{14\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

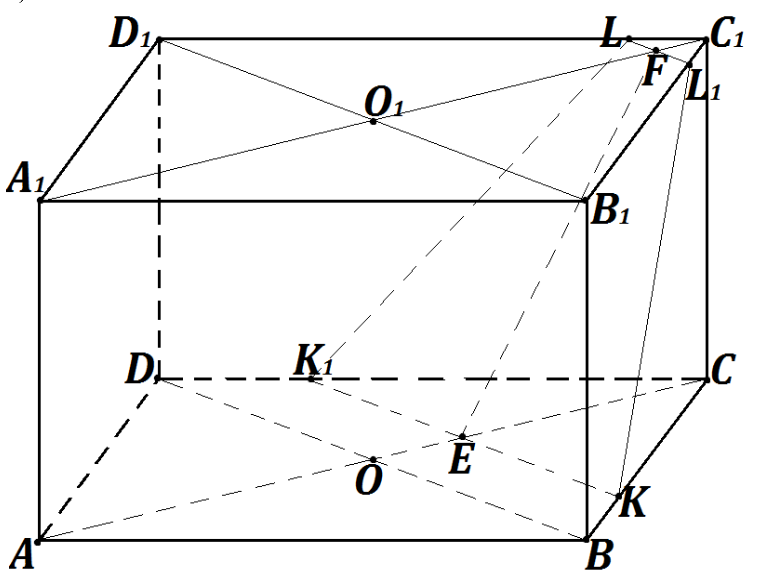
а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

.

Решение:

а)



Построим плоскость γ:

Построим прямую BD

Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel BD$

Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel BD$

Построим прямую LK_1, т.к. точки L и K_1 лежат в одной плоскости

Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости

Трапеция KK_1LL_1 – сечение плоскостью γ

$BK = 2$

=>

$CK = BC - BK = 8 - 2 = 6$

$C_1L = 2$

=>

$D_1L = C_1D_1 - C_1L = 8 - 2 = 6$

Рассмотрим прямоугольник ACC_1A_1:

Пусть $AC \cap KK_1 = E$

Пусть $A_1C_1 \cap LL_1 = F$
Пусть $AC \cap BD = O$
Пусть $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$
$AA_1 = 4\sqrt{2}$
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках CKK_1 и CBD

$\dfrac{CE}{OC} = \dfrac{CK}{BC}$

$\dfrac{CE}{OC} = \dfrac{6}{8}$

$\dfrac{CE}{OC} = \dfrac{3}{4}$

=>

$CE = \dfrac{3}{8} \cdot AC = \dfrac{3}{8} \cdot 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках C_1LL_1 и $B_1C_1D_1$

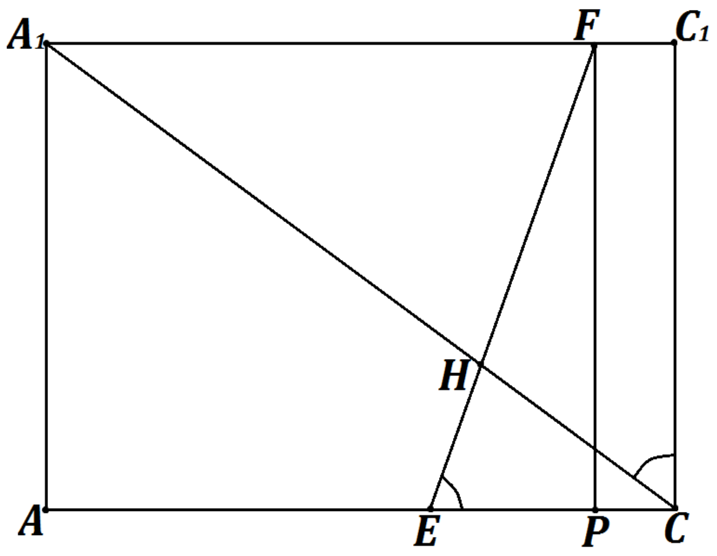
$\dfrac{C_1F}{C_1O_1} = \dfrac{C_1L}{C_1D_1}$

$\dfrac{C_1F}{C_1O_1} = \dfrac{2}{8}$

$\dfrac{C_1F}{C_1O_1} = \dfrac{1}{4}$

=>

$C_1F = \dfrac{1}{8} \cdot AC = \dfrac{1}{8} \cdot 8\sqrt{2} = \sqrt{2}$



Пусть $A_1C \cap EF = H$
Требуется доказать, что $\angle EHC = 90°$

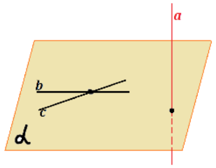
Пусть P — основание перпендикуляра из точки F на прямую AC
$EP = CE - CP = CE - C_1F = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\operatorname{tg} \angle FEP = \dfrac{FP}{EP} = \dfrac{AA_1}{EP} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$

$\operatorname{tg} \angle A_1CC_1 = \dfrac{A_1C_1}{CC_1} = \dfrac{AC}{AA_1} = \dfrac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2$

=> $\angle FEP = \angle A_1CC_1$
Пусть
$\angle FEP = \angle A_1CC_1 = \alpha$
Тогда
$\angle A_1CA = 90 - \alpha$
$\angle EHC = 180 - \alpha - (90 - \alpha) = 90°$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$A_1C \perp EF$

$A_1C \perp KK_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах, т.к. $KK_1 \perp AC$, являющейся проекцией A_1C на плоскость ABC)

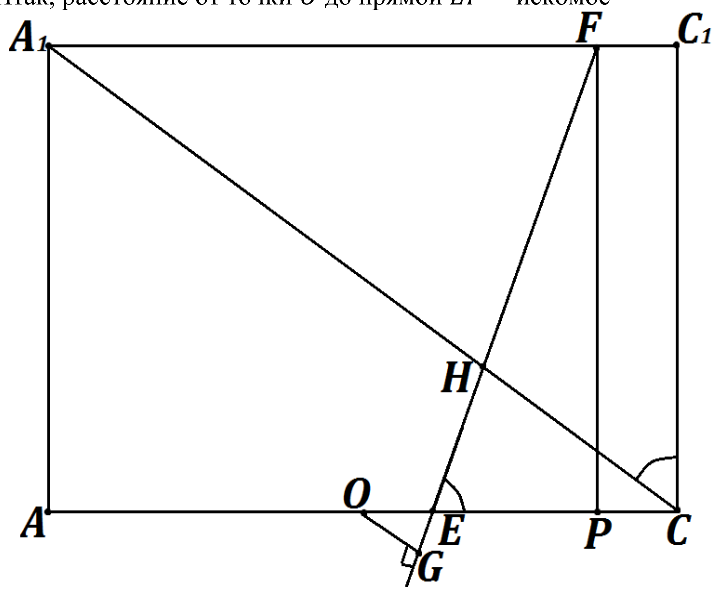
$=> A_1C \perp \gamma$

■

б)

Расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки O до прямой EF, потому что B и O лежат на одной прямой

Итак, расстояние от точки O до прямой EF — искомое



Пусть G — основание перпендикуляра из точки O на прямую EF

OG—?

$\operatorname{tg} \angle FEP = \operatorname{tg} \angle OEG = 2$

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos \angle OEG = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin \angle OEG = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{OG}{OE}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{OC - CE}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{OG}{\sqrt{2}}$$

$$OG = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0{,}4\sqrt{10}$$

Ответ: б) $0{,}4\sqrt{10}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \le 2 \cdot 5^x - 24.$$

.

Решение:

Пусть $5^x = t$

$$\frac{t^2 - 25t + 26}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t - 7} \le 2t - 24$$

Нужно сократить $t - 1$
$(t - 24)(t - 1) = t^2 - 25t + 24$
=>

$$\frac{t^2 - 25t + 24 + 2}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t - 7} \le 2t - 24$$

$$\frac{(t - 24)(t - 1) + 2}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t - 7} \le 2t - 24$$

$$\frac{(t - 24)(t - 1)}{t - 1} + \frac{2}{t - 1} + \frac{t^2 - 7t}{t - 7} + \frac{1}{t - 7} \le 2t - 24$$

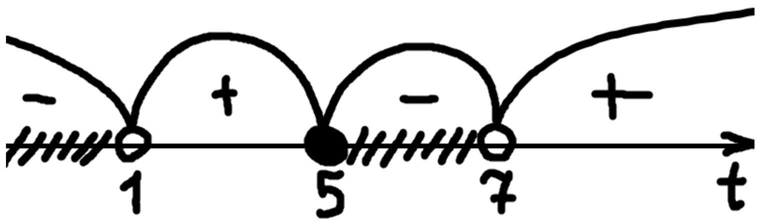
$$t - 24 + \frac{2}{t - 1} + t + \frac{1}{t - 7} \le 2t - 24$$

$$\frac{2}{t - 1} + \frac{1}{t - 7} \le 0$$

$$\frac{2t - 14 + t - 1}{(t - 1)(t - 7)} \le 0$$

$$\frac{3t - 15}{(t - 1)(t - 7)} \le 0$$

$3t - 15 = 0$ $t = 5$	$(t - 1)(t - 7) \ne 0$ $t \ne 1$ $t \ne 7$



$t < 1$ $5^x < 1$ $5^x < 5^0$ $x < 0$	$5 \le t < 7$ $5 \le 5^x < 7$ $5^1 \le 5^x < 5^{\log_5 7}$ $1 \le x < \log_5 7$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; \log_5 7)$

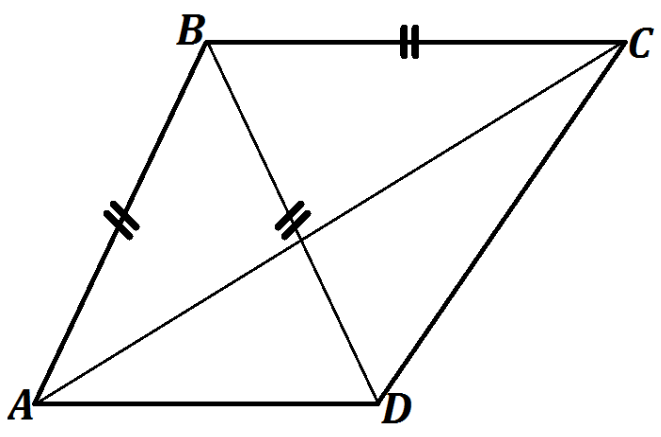
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

.

Решение:
а)



$AB = BD = BC$ (по условию)

Пусть $\angle BAC = \alpha$
$\triangle\ ABC$ – равнобедренный
=>
$\angle BAC = \angle ACB = \alpha$

$\angle CAD = \angle ACB = \alpha$
(т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC)
=>
AC – биссектриса угла BAD
■

б)
$AB = BD = BC = 6{,}5$
Идея поиска CD в том, чтобы найти косинус угла CBD и использовать теорему косинусов для треугольника CBD

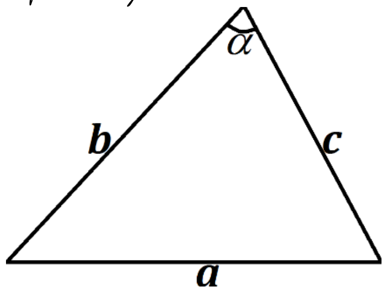
$\angle BAD = \angle BDA = 2\alpha$
$\angle BDA = \angle CBD = 2\alpha$ (накрест лежащие)

Пусть
BH – высота треугольника ABC
Тогда
$$AH = \frac{1}{2}\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$$
$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{6{,}5} = \frac{12}{13}$$

Косинус двойного угла
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{144}{169} - 1 = \frac{288}{169} - \frac{169}{169} = \frac{119}{169}$$

Теорема Косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
или
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2\cdot BC\cdot BD\cdot\cos 2\alpha$$

$$CD^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{119}{169}$$

$$CD^2 = \frac{169}{2} - \frac{119}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$CD = 5$$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

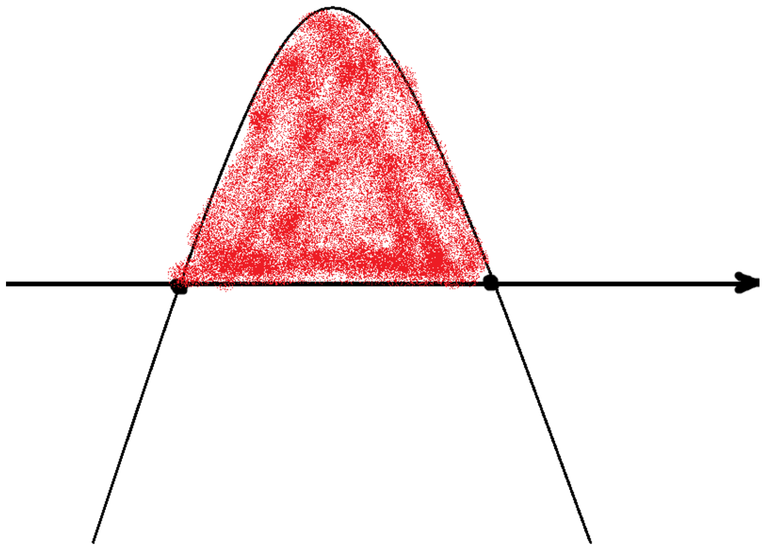
.

Решение:

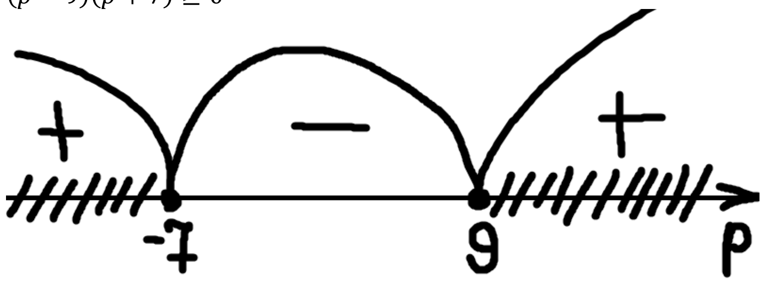
Прибыль за 3 года должна быть не менее 75 млн рублей, получаем неравенство:

$3 \cdot \big(px - (0{,}5x^2 + x + 7)\big) \geq 75$
$px - (0{,}5x^2 + x + 7) \geq 25$
$-0{,}5x^2 + px - x - 32 \geq 0$
$-0{,}5x^2 + x(p - 1) - 32 \geq 0$

Это квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями вниз, и она будет ≥ 0 если будет иметь 2 корня или 1 корень



=>
$D \geq 0$
$b^2 - 4ac \geq 0$
$(p - 1)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-32) \geq 0$
$(p - 1)^2 - 64 \geq 0$
$(p - 1 - 8)(p - 1 + 8) \geq 0$
$(p - 9)(p + 7) \geq 0$



p − это цена, поэтому отрицательные значения отбрасываем и выбираем наименьшее подходящее положительное, как и требовалось в условии

Ответ: 9

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение
$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$
имеет более трёх различных решений.

Решение:

$(x^2)^5 + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$

$(x^2)^5 + x^2 = -(a - 2|x|)^5 + 2|x| - a$

$(x^2)^5 + x^2 = (2|x| - a)^5 + (2|x| - a)$

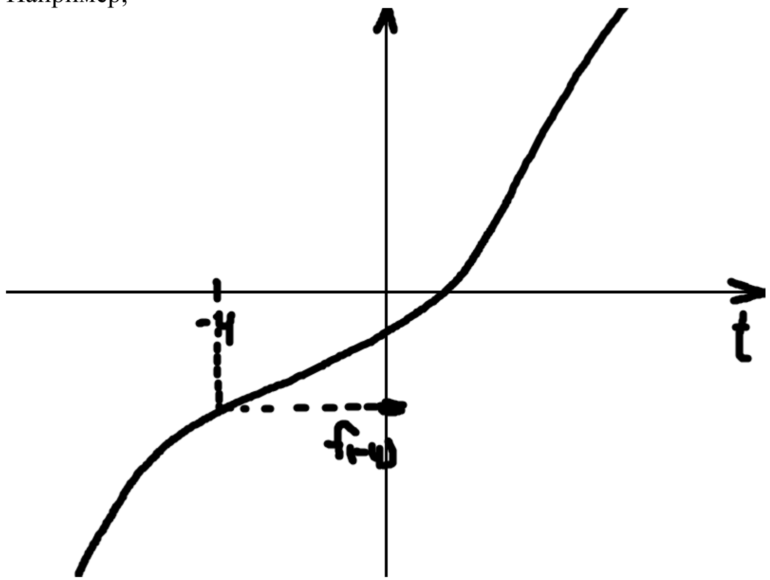
Пусть
$x^2 = b$
$2|x| - a = c$

$b^5 + b = c^5 + c$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$
$f(b) = b^5 + b$
$f(c) = c^5 + c$
=>
$f(b) = f(c)$

Исследуем функцию $f(t) = t^5 + t$ на монотонность:
$f'(t) = 5t^4 + 1$

Заметим, что данная производная всегда положительна при любом t
=>
Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой прямой t
Например,



Найдём $f(-4)$
Очевидно, что значений функции в любой другой точке будет отличаться от $f(-4)$
=>
$f(b) = f(c)$
=>
$b = c$

$x^2 = 2|x| - a$
$x^2 - 2|x| + a = 0$
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$
Данное уравнение должно иметь ≥ 4 решений

Пусть $|x| = t$
$t^2 - 2t + a = 0$

Если
$t^2 - 2t + a = 0$ не имеет корней
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$ не имеет корней

Если
$t^2 - 2t + a = 0$ имеет 1 положительный корень, то
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$ имеет 2 корня

Если
$t^2 - 2t + a = 0$ имеет 2 положительных корня, то
$|x|^2 - 2|x| + a = 0$ имеет 4 корня
(только такой вариант нам подходит)

=>
$D > 0$
$4 - 4a > 0$
$4a < 4$
$a < 1$

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 4a}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{1 - a}}{2} = 1 + \sqrt{1 - a}$$
$$t_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4a}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{1 - a}}{2} = 1 - \sqrt{1 - a}$$

Заметим, что t_1 является положительным при любом $a < 1$
=>
t_1 даст нам x_1 и x_2 (противоположные числа из-за модуля)

t_2 должно быть положительным
=>
$t_2 > 0$
$1 - \sqrt{1 - a} > 0$
$\sqrt{1 - a} < 1$
$0 < 1 - a < 1$
$-1 < -a < 0$
$0 < a < 1$
=>
t_2 даст нам x_3 и x_4 (противоположные числа из-за модуля) при любом $0 < a < 1$

Ответ: $0 < a < 1$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?
.

Решение:
а)
$n = 5$
$a_1 + a_5 = 99$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$$

$$S_5 = \frac{99}{2} \cdot 5 = 247{,}5$$
=>
Не может, т.к. сумма, состоящая из натуральных чисел не может равняться ненатуральному числу

б)
$n = 6$
$a_1 + a_6 = 9$

---

n-й член арифметической прогрессии
$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_1 + a_1 + d(6-1) = 9$
$2a_1 + 5d = 9$
$d = 1$
(т.к. при других d решений не будет)
Тогда
$2a_1 = 4$
$a_1 = 2$

Получаем прогрессию:
2 3 4 5 6 7

в)
Среднее арифметическое $= \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 6{,}5$
=>
$S_n = 6{,}5n$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 6{,}5n$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = 6{,}5$$

$a_1 + a_n = 13$

$a_1 + a_1 + d(n-1) = 13$

$2a_1 + d(n-1) = 13$

Значение n будет тем больше – чем меньше будут a_1 и d
=>
Пусть
$a_1 = 1$
$d = 1$

$2 + n - 1 = 13$
$n = 12$

Получаем прогрессию:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Ответ: а) нет, б) (2; 3; 4; 5; 6; 7), в) 12

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180325