Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

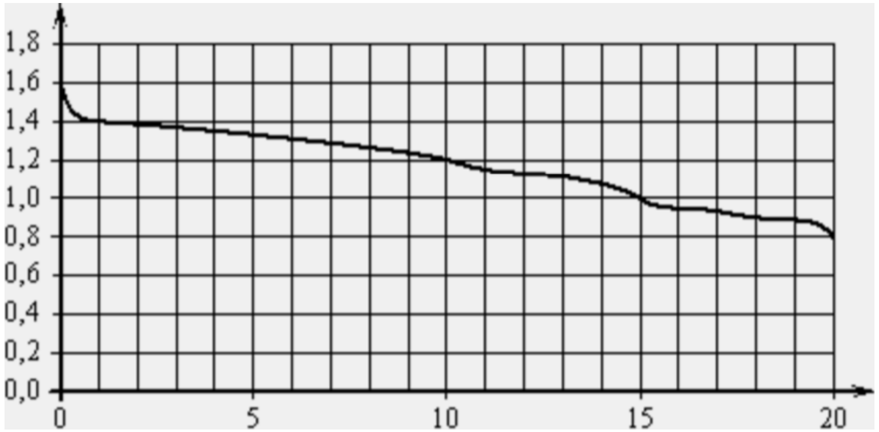
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В доме, в котором живёт Катя, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже в каждом подъезде находится по три квартиры. Катя живёт в квартире 61. В каком подъезде живёт Катя?

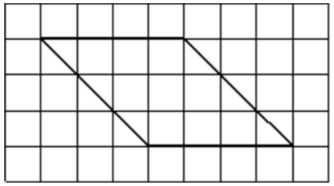
Ответ: ___________________________.

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 10 часов работы фонарика.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________________.

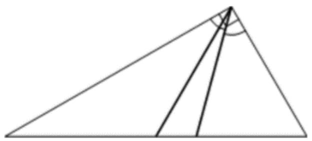
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 19 сумок из 160 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения
$5^{6+x} = 5.$

Ответ: ____________________________.

6 Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

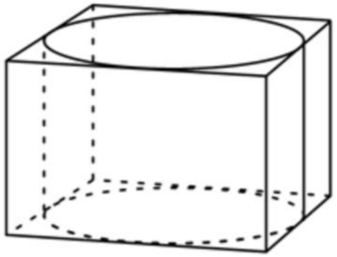


Ответ: ____________________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону
$x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 96 м/с?

Ответ: ____________________________.

8 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объём параллелепипеда равен 36. Найдите высоту цилиндра.



Ответ: ____________________________.

9 Найдите значение выражения
$$\frac{\sqrt[15]{5} \cdot 5 \cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}.$$

Ответ: ____________________________.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180318

11 В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y = -\frac{x}{x^2+225}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$5\operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
б) Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство

$\frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2} \le 1.$

16 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK:KC = 1:2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.
б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK – в точке Q. Найдите KQ, если $BC = \sqrt{21}$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180318

18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-9, -6, -4, -3, -1, 2, 5$. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	3
2	0,4
3	12
4	0,88
5	-5
6	31
7	18
8	1
9	5
10	5500
11	16
12	-15
13	а) $\pi + 2\pi n;\ n \in Z.$ б) 3π
14	$\frac{20}{3}$
15	$(-1; 0) \cup (5; 6]$
16	14
17	7 млн
18	$\{0\} \cup [2; +\infty)$
19	а) -6, -3, 5, б) 5, в) нет

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$5\mathrm{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение:

а)

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$$

$$\frac{5}{\cos^2 x} - 5 + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$$

$$\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} - 2 = 0$$

Пусть $\frac{1}{\cos x} = t$

$5t^2 + 3t - 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 = 7^2$

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3 + 7}{10} = \dfrac{4}{10}$

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3 - 7}{10} = -1$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{4}{10}$$

$$\cos x = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ (нет решений)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = -1$$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \pi + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = \pi + 2\pi = 3\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = \pi + 4\pi = 5\pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Ответ: а) $\pi + 2\pi n;\ n \in Z$. б) 3π

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

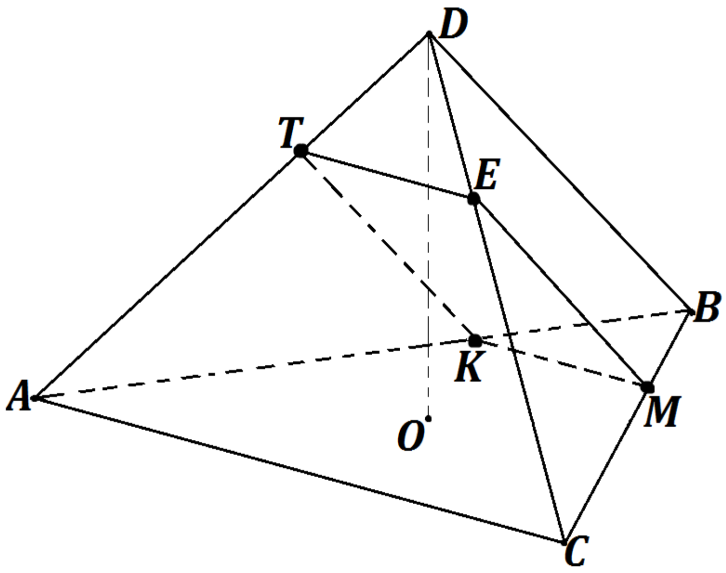
а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

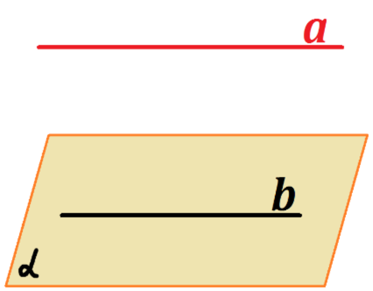
.

Решение:

а)



Признак параллельности прямой и плоскости



Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости

Построим прямую TE такую, что $TE \parallel AC$
Построим прямую TK такую, что $TK \parallel BD$
Построим прямую KM такую, что $KM \parallel AC$
Построим прямую ME, т.к. точки M и E лежат в одной плоскости

$TE \parallel AC$ и $KM \parallel AC$
=>
$TE \parallel KM$

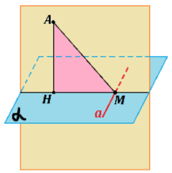
$ME \parallel BD$ и $TK \parallel BD$ (по признаку параллельности прямой и плоскости)
=>
$ME \parallel TK$

=> $TEMK$ – параллелограмм
Осталось доказать наличие угла 90° в параллелограмме $TEMK$, тогда мы докажем, что это прямоугольник

Угол между TE и TK равен углу между AC и BD, т.к. $TE \parallel AC$ и $TK \parallel BD$

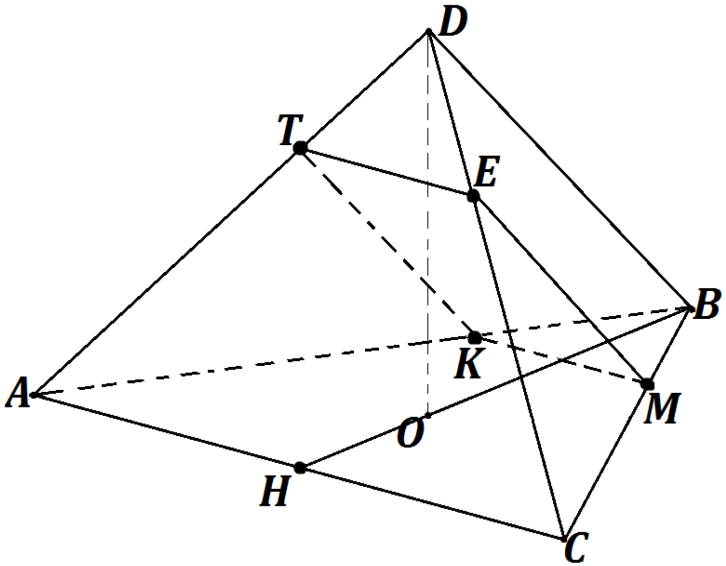
Найдём угол между AC и BD:

Теорема о трёх перпендикулярах



Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной
a – прямая
AM – наклонная
HM – проекция
AH – перпендикуляр

Пусть BH – высота в треугольнике ABC



$BH \perp AC$
BO – проекция BD на плоскость «пола», т.е. на плоскость ABC

$AC \perp BO$
=>
$AC \perp BD$ (по теореме о трёх перпендикулярах)
=>
$TE \perp TK$
=>
$\angle ETK = 90°$
=>
$TEMK$ – прямоугольник
■

б)
$S_{TEMK} = KT \cdot TE$

Найдём KT и TE:

$AD = 5$ и $AT : TD = 2 : 1$
=>
$AT = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$
$DT = \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

$AC = 6$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках DTE и ACD (подобны по двум углам)
$\frac{DT}{AD} = \frac{TE}{AC}$
$\frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{TE}{6}$
=> $TE = 2$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках ATK и ABD (подобны по двум углам)
$\frac{AT}{AD} = \frac{KT}{BD}$
$\frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{KT}{5}$
=> $KT = \frac{10}{3}$

$S_{TEMK} = KT \cdot TE = \frac{10}{3} \cdot 2 = \frac{20}{3}$

Ответ: $\frac{20}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

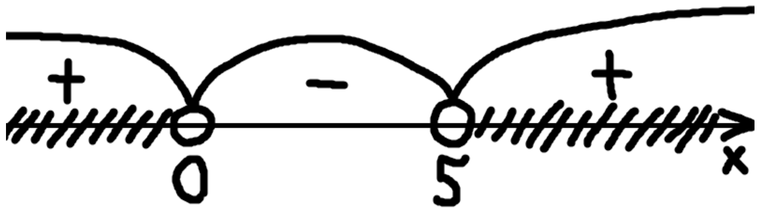
15 Решите неравенство

$$\frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2} \le 1.$$

.

Решение:

ОДЗ:
1.
$x^2 - 5x > 0$
$x(x-5) > 0$
$x(x-5) = 0$
$x = 0$
$x = 5$

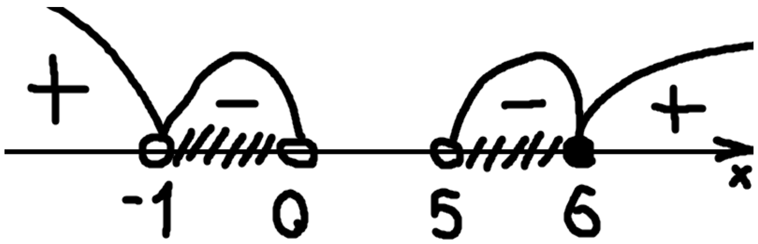


2.
$x^2 > 0$
$x \neq 0$

$$\frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2} - 1 \le 0$$

$$\frac{2\log_5(x^2-5x) - \log_5 x^2}{\log_5 x^2} \le 0$$

$2\log_5(x^2-5x)-\log_5 x^2=0$	$\log_5 x^2 \neq 0$
$\log_5(x^2-5x)^2=\log_5 x^2$	$\log_5 x^2 \neq \log_5 1$
$(x^2-5x)^2=x^2$	$x^2 \neq 1$
$(x^2-5x)^2-x^2=0$	$x \neq \pm 1$
$(x^2-5x-x)(x^2-5x+x)=0$	
$(x^2-6x)(x^2-4x)=0$	
$x^2(x-6)(x-4)=0$	
$x=0$	
$x=4$	
$x=6$	



Ответ: $(-1;0)\cup(5;6]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

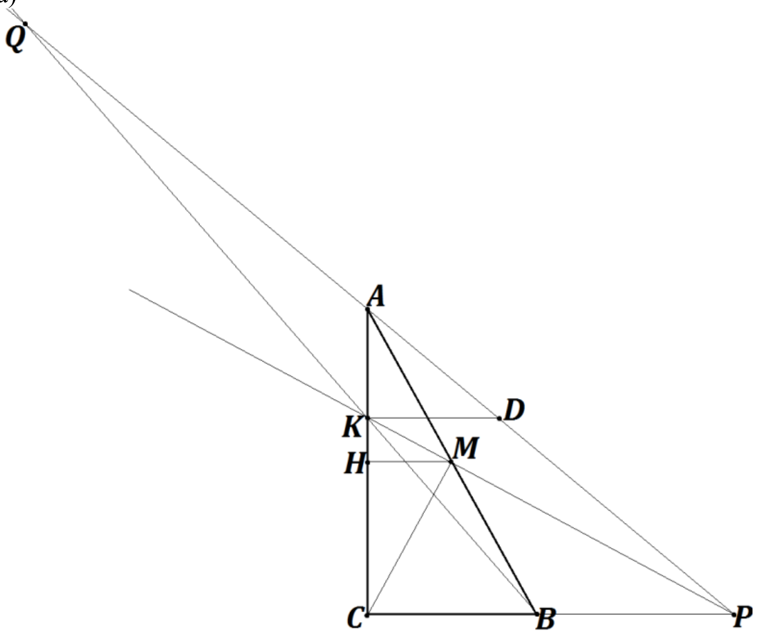
16 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK:KC=1:2$.

а) Докажите, что $\angle BAC=30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC=\sqrt{21}$.

Решение:

а)



$AK:KC=1:2$

=>

Пусть

$AK=2x$

$KC=4x$

Тогда

$AC=6x$

$CM=AM=BM$

(по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)

Рассмотрим $\Delta\ ACM$ — равнобедренный

Пусть

MH — высота в $\Delta\ ACM$

=>

MH — медиана в $\Delta\ ACM$

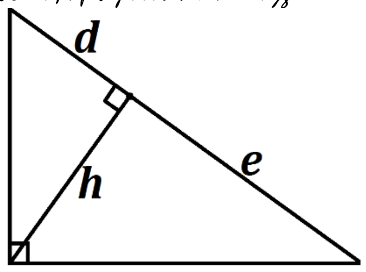
(по свойству равнобедренного треугольника)

=>

$AH = 3x$
$CH = 3x$
$KH = x$

Рассмотрим $\triangle\, CMK$ – прямоугольный

Высота, проведённая к гипотенузе



$h^2 = d \cdot e$

$HM^2 = KH \cdot CH$
$HM^2 = x \cdot 3x$
$HM^2 = 3x^2$
$HM = \sqrt{3}x$

$$\operatorname{tg}\angle HAM = \frac{HM}{AH} = \frac{\sqrt{3}x}{3x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle BAC = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$$

■

б)
Построим прямую DK такую, что $DK \parallel BC$

Будем искать KQ из подобия треугольников KQD и BQP

$$\frac{DK}{BP} = \frac{KQ}{BQ}$$

$$\frac{DK}{BP} = \frac{KQ}{KQ + BK}$$

Найдём все элементы равенства:

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{AC}$$

$AC = 3\sqrt{7}$
=>
$6x = 3\sqrt{7}$
$x = 0{,}5\sqrt{7}$
$KH = x = 0{,}5\sqrt{7}$
$AK = 2x = \sqrt{7}$
$HM = \sqrt{3}x = 0{,}5\sqrt{21}$
$CK = 4x = 2\sqrt{7}$

$\triangle\, HKM \sim \triangle\, CKP$ по двум углам

$$\frac{HM}{CP} = \frac{KH}{CK}$$

$$\frac{0{,}5\sqrt{21}}{CP} = \frac{0{,}5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$$

$CP = 2\sqrt{21}$
=>
$BP = CP - BC = 2\sqrt{21} - \sqrt{21} = \sqrt{21}$

$BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{\sqrt{21}^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2} = 7$ (по теореме Пифагора)

$\triangle\, AKD \sim \triangle\, ACP$ по двум углам

$$\frac{DK}{CP} = \frac{AK}{AC}$$

$$\frac{DK}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$$

$$DK = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

=>
$\triangle KQD \sim \triangle BQP$ по двум углам

$$\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{21}} = \frac{KQ}{KQ+7}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{KQ}{KQ+7}$$

$$2KQ + 14 = 3KQ$$

$$KQ = 14$$

Ответ: б) 14

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S **— целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{30}{100}\right)\cdot S = 1{,}3\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}6\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}3\cdot S - 0{,}6\cdot S = 0{,}7\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}3\cdot 0{,}6\cdot S = 0{,}78\cdot S$

01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}25 \cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}78 \cdot S - 0{,}25 \cdot S = 0{,}53 \cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot S = 0{,}325 \cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	0

=>

01.04.2019	$0{,}325 \cdot S - 0 = 0{,}325 \cdot S$

По условию, каждая из выплат должна быть меньше 5 млн рублей, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}7 \cdot S < 5 \\ 0{,}53 \cdot S < 5 \\ 0{,}325 \cdot S < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < \dfrac{50}{7} \\ S < \dfrac{500}{53} \\ S < \dfrac{5000}{325} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < \dfrac{50}{7} \\ S < \dfrac{500}{53} \\ S < \dfrac{200}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < 7\dfrac{1}{7} \\ S < 9\dfrac{23}{53} \\ S < 15\dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S

=>

$S = 7$

Ответ: 7 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

Решение:

Найдём координаты вершины параболы:

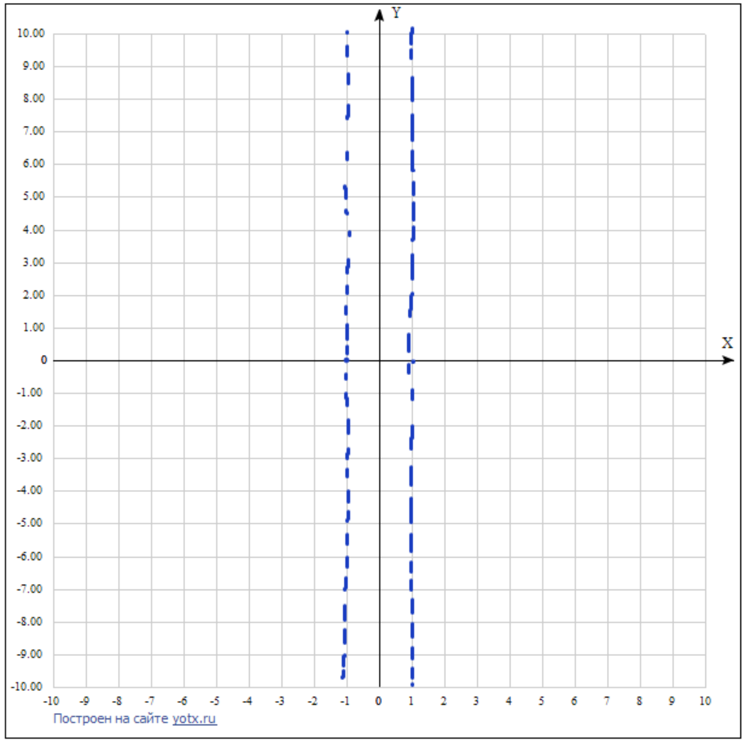
$$x_0 = \frac{4a}{8} = \frac{a}{2}$$

$$y_0 = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + a^2 + 2a + 2$$

$$y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + 2a + 2$$

$y_0 = 2a + 2$

Рассмотрим варианты местоположения вершины параболы:



1) Если вершина x_0 находится на луче $x \le -1$ или на луче $x \ge 1$, то наименьшим значением функции будет y_0
2) Если вершина x_0 находится на интервале $-1 < x < 1$, то наименьшим значением функции будет $f(-1)$ или $f(1)$

Вариант №1

$x_0 \le -1$ $\frac{a}{2} \le -1$ $a \le -2$ $\begin{cases} a \le -2 \\ y_0 \ge 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -2 \\ 2a + 2 \ge 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -2 \\ 2a \ge 4 \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -2 \\ a \ge 2 \end{cases}$ Нет решений	$x_0 \ge 1$ $\frac{a}{2} \ge 1$ $a \ge 2$ $\begin{cases} a \ge 2 \\ y_0 \ge 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 2 \\ a \ge 2 \end{cases}$ => $a \ge 2$

Вариант №2

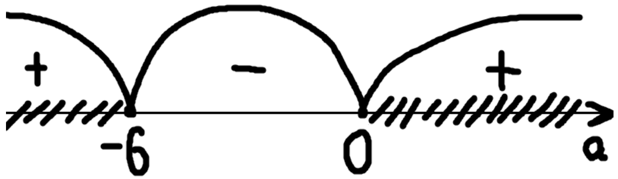
$$\begin{cases} -1 < x_0 < 1 \\ f(-1) \ge 6 \\ f(1) \ge 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < \frac{a}{2} < 1 \\ 4 + 4a + a^2 + 2a + 2 \ge 6 \\ 4 - 4a + a^2 + 2a + 2 \ge 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a^2 + 6a \ge 0 \\ a^2 - 2a \ge 0 \end{cases}$$

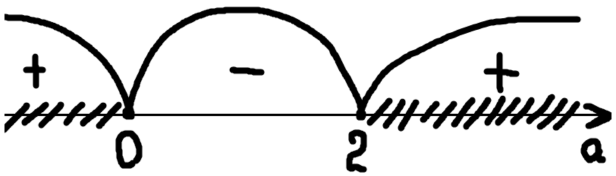
$$\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a(a + 6) \ge 0 \\ a(a - 2) \ge 0 \end{cases}$$

$a(a + 6) \ge 0$

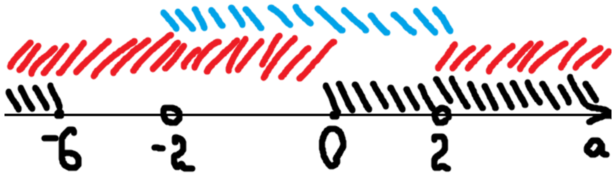


$a(a - 2) \ge 0$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180318



Объединим все три условия для a на одной числовой прямой:



=>
$a = 0$

Ответ: $a \in \{0\} \cup [2; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -9, -6, -4, -3, -1, 2, 5. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение:

а)
1
Задуманные 2, 3 и 5 из примера составили набор из семи чисел.

На доске выписан набор также из 7 чисел
=>
Задумано было также 3 числа
2
Среди задуманных чисел отрицательных больше, т.к. в наборе их больше, но есть и одно положительное
=>
Будет 2 отрицательных числа и 1 положительное
3
Если одним из положительных является 2, то никакое из отрицательных не даст нам в сумме 5
=>
Первое число из задуманных это 5
5
4
Чтобы получилось 2, нужно, чтобы в числе задуманных было -3, итак
-3 5
5
Чтобы получилось -9, нужно, чтобы в числе задуманных было
-6, итак
-6 -3 5

б)
1
Пусть задуманы ненулевые числа, для них в наборе на доске окажется k нулей
Заметим, что если добавить к задуманным один ноль, то в наборе на доске окажется $2k + 1$ нулей

Пример:
1, 5, -5 => 1 ноль
1, 5, -5, 0 => 3 нуля $(2 \cdot 1 + 1)$

или
1, -1, 2, -2 => 3 нуля
1, -1, 2, -2, 0 => 7 нулей $(2 \cdot 3 + 1)$
=>
Чтобы было 5 нулей k должно быть равно 2
2
Если задумано три числа (включая ноль), то два ненулевых из них никак не образуют два нуля (максимум один ноль)
=>
Задумано больше трёх чисел
3
Если задумано четыре числа (включая ноль), то три ненулевых из них никак не образуют два нуля (максимум один ноль)
=>
Задумано больше четырёх чисел
4
Если задумано пять чисел (включая ноль), то четыре ненулевых смогут образовать два нуля, пример:
Задуманы: 0, 1, -1, 4, -3
0
0+1-1=0
0-1-3+4=0
1-1=0
-1-3+4=0

или другой пример:
Задуманы 0, 3, -3, 1, 2
0
0+3-3=0
0+1+2-3=0
3-3=0
1+2-3=0
=>
Задумано минимум 5 чисел

в)
Нет, например
Набор -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 можно получить из:

-2, -1, 3 $a = -2$ $b = -1$ $c = 3$ $a + b = -3$ $a + c = 1$ $b + c = 2$ $a + b + c = 0$	-3, 1, 2 $a = -3$ $b = 1$ $c = 2$ $a + b = -2$ $a + c = -1$ $b + c = 3$ $a + b + c = 0$

Ответ: а) -6, -3, 5, б) 5, в) нет

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4