**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

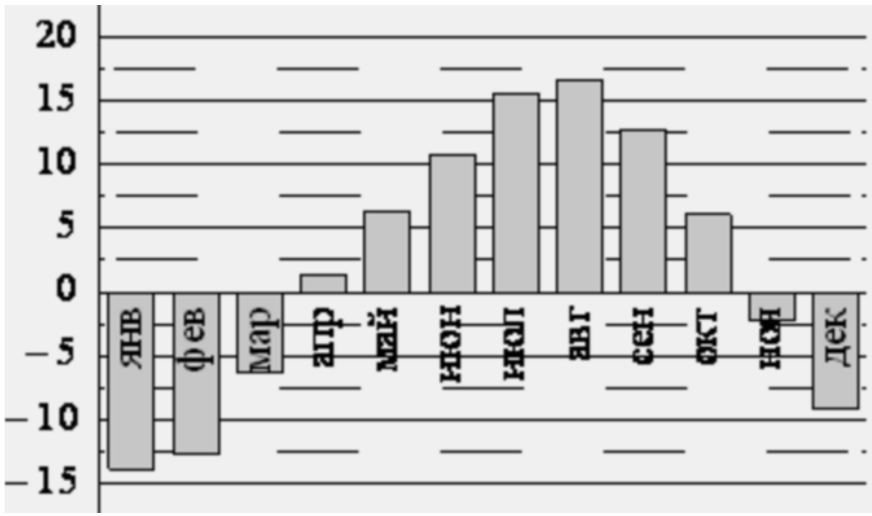
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 61 милю в час? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: ___________________________.

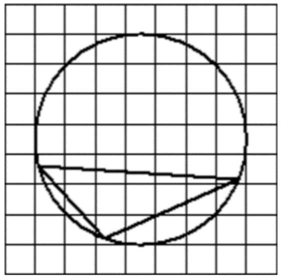
2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Южно-Сахалинске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала апреля по конец ноября, когда среднемесячная температура в Южно-Сахалинске ниже 10°C.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180311

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ___________________________.

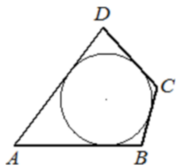
4 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$3^{\log_9(4x+1)} = 9$.

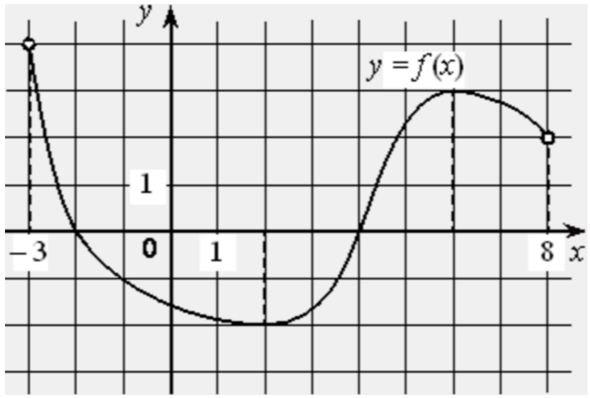
Ответ: ___________________________.

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 22$, $CD = 17$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



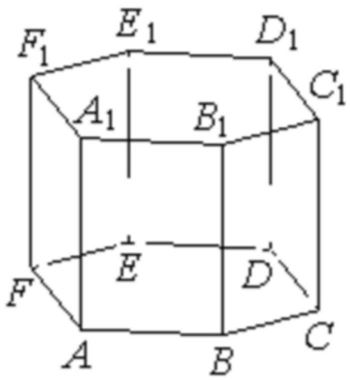
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 5]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A_1, B_1, F_1, A правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 15.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{24}{\sin^2 127^\circ + 4 + \sin^2 217^\circ}.$$

Ответ: ___________________________.

10 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 64 километра? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ___________________________.

11 Расстояние между городами А и В равно 630 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции
$y = 18x - 10\sin x + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$8^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^{5-x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_4 5; \sqrt{3}]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

15 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$x^2 + (2 - a)^2 = |x - 2 + a| + |x - a + 2|$
имеет единственный корень.

19 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180311

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	98
2	4
3	3,5
4	0,55
5	20
6	78
7	2
8	10
9	4,8
10	320
11	50
12	15
13	а) 1; 1,5. б) 1,5
14	$\arccos\dfrac{14}{55}$
15	$(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5\,; 2)$
16	1
17	80,5 млн
18	$a = 0$; $a = 4$
19	а) 44, б) отрицательных, в) 17

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$8^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^{5-x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$[\log_4 5\,; \sqrt{3}]$.

Решение:

а)

Умножение степеней с одинаковыми основаниями

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Деление степеней с одинаковыми основаниями

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$$8^x - 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x + \frac{2^5}{2^x} = 0$$

$$8^x - 12 \cdot 2^x + \frac{32}{2^x} = 0$$

$$\frac{16^x - 12 \cdot 4^x + 32}{2^x} = 0$$

$16^x - 12 \cdot 4^x + 32 = 0$

Пусть $4^x = t$

$t^2 - 12t + 32 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 144 - 128 = 16 = 4^2$
$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 + 4}{2} = 8$
$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 - 4}{2} = 4$

$4^x = 4$ $4^x = 4^1$ $x = 1$	$4^x = 8$ $2^{2x} = 2^3$ $2x = 3$ $x = 1,5$

б)
Оценим значения границ отрезка

$\log_4 4 < \log_4 5 < \log_4 16$
$1 < \log_4 5 < 2$

$\sqrt{2,25} < \sqrt{3}$
$1,5 < \sqrt{3}$

=>
$x = 1 \notin [\log_4 5 ; \sqrt{3}]$

Сравнним $\log_4 5$ и 1,5
$\log_4 5$ и $\log_4 4^{1,5}$
5 и $4^{1,5}$ $\Big|$^2
5^2 и 4^3
25 и 64
=>
$\log_4 5 < 1,5$
=>
$1,5 \in [\log_4 5 ; \sqrt{3}]$

Ответ: а) 1; 1,5. б) 1,5

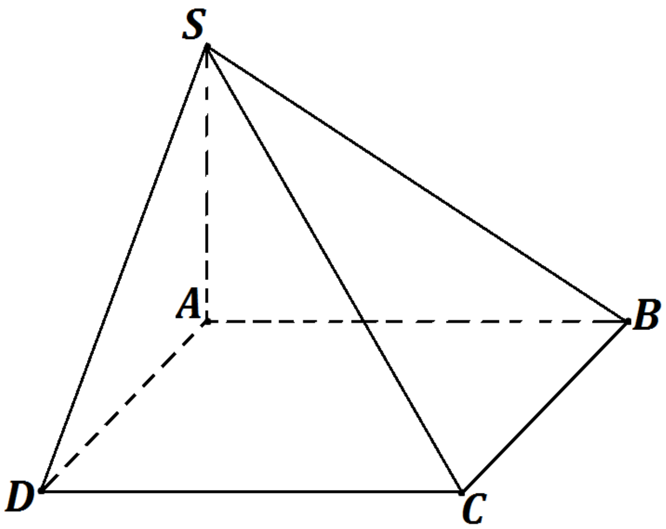
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.
.

Решение:
а)

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180311



Заметим, что в $\triangle ABS$ выполняется теорема Пифагора:

$SB^2 = SA^2 + AB^2$

$\sqrt{85}^2 = \sqrt{21}^2 + 8^2$

$85 = 21 + 64$

$85 = 85$

=> $\triangle ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\triangle ADS$ выполняется теорема Пифагора:

$SD^2 = SA^2 + AD^2$

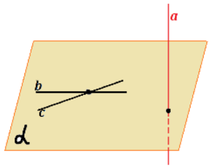
$\sqrt{57}^2 = \sqrt{21}^2 + 6^2$

$57 = 21 + 36$

$57 = 57$

=> $\triangle ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$SA \perp AB$
$SA \perp AD$ (т. к. $\triangle ABS$ и $\triangle ADS$ – прямоугольные)

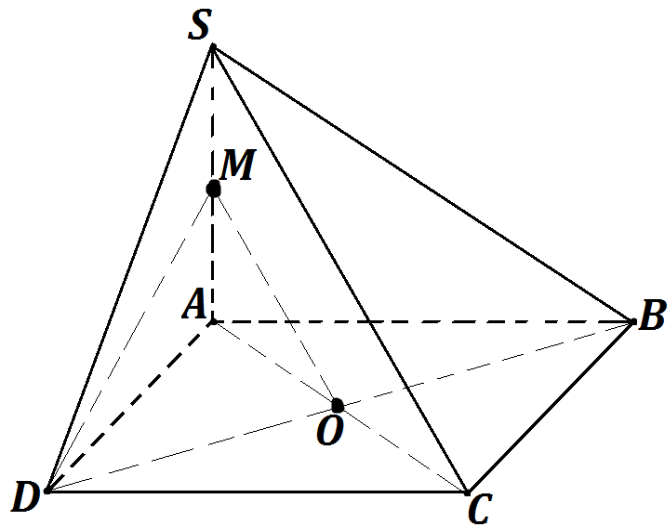
$AB \cap AD = A$

=> $SA \perp (ABC)$

=> SA – высота пирамиды

■

б)



Построим прямую OM такую, что $OM \parallel SC$

$\angle MOD$ – искомый

O – середина AC

=>

OM – средняя линия $\triangle ASC$

=>

$$OM = \frac{1}{2}SC$$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (по теореме Пифагора)

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{\sqrt{21}^2 + 10^2} = 11$ (по теореме Пифагора)

=>

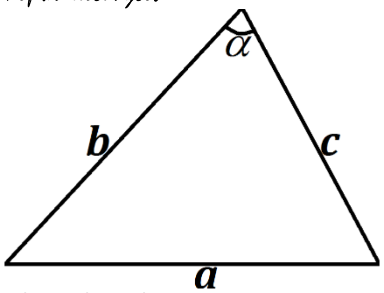
$OM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\cdot 11 = \frac{11}{2} = 5{,}5$

$DO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$

$AM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{21} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{41{,}25}$ (по теореме Пифагора)

Теорема Косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

или

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\cos\angle MOD = \frac{OM^2 + DO^2 - DM^2}{2\cdot OM\cdot DO}$$

$$\cos\angle MOD = \frac{30{,}25 + 25 - 41{,}25}{2\cdot 5{,}5\cdot 5} = \frac{14}{55}$$

$$\angle MOD = \arccos\frac{14}{55}$$

Ответ: б) $\arccos\frac{14}{55}$

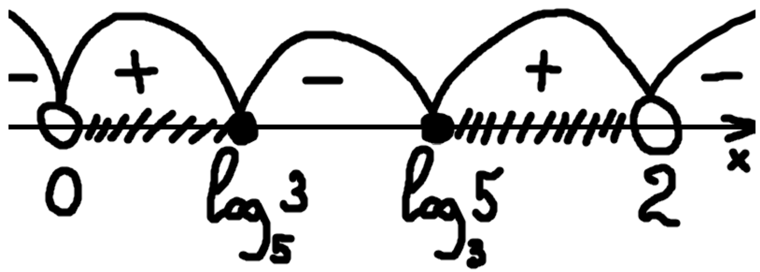
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ	1
Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

Решение:

$15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15 = 0$ $15^x - 3\cdot 3^x - 5\cdot 5^x + 15 = 0$ $(15^x - 3\cdot 3^x) + (-5\cdot 5^x + 15) = 0$ $3^x\cdot(5^x - 3) - 5\cdot(5^x - 3) = 0$ $(5^x - 3)(3^x - 5) = 0$	$-x^2 + 2x \neq 0$ $x(2 - x) \neq 0$ $x \neq 0$ $x \neq 2$
$5^x - 3 = 0$ $5^x = 3$ $5^x = 5^{\log_5 3}$ $x = \log_5 3$	$3^x - 5 = 0$ $3^x = 5$ $3^x = 3^{\log_3 5}$ $x = \log_3 5$



Ответ: $(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5\,; 2)$

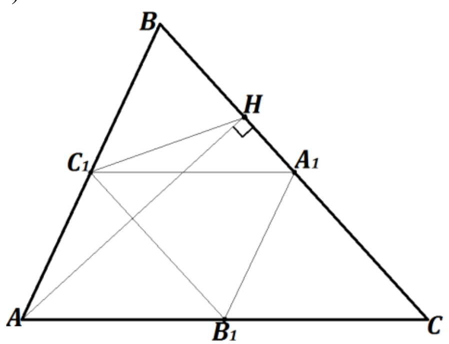
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

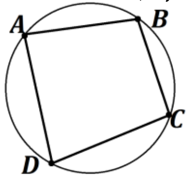
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

Решение:
а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность

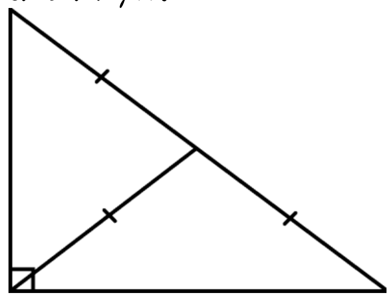


$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 45°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 60 = 75°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 75 = 15°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 60 - 15 = 45°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
C_1H – медиана
=>
$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AC_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHC_1 = \angle BAH = 15°$

Признаки параллелограмма
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$

$\left.\begin{matrix} A_1B_1 \parallel BC_1 \\ A_1B_1 = BC_1 \end{matrix}\right.$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)

=>

$A_1BC_1B_1$ – параллелограмм

=>

$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 75°$

$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 + \angle AHC_1 = 90 + 15 = 105°$

$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 75 + 105 = 180°$

=>

Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность

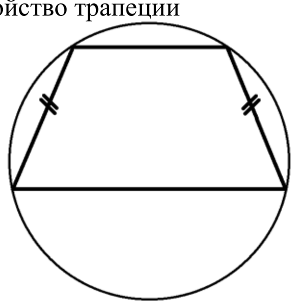
=>

Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности

■

б)

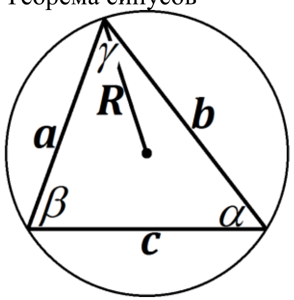
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

или

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°}$$

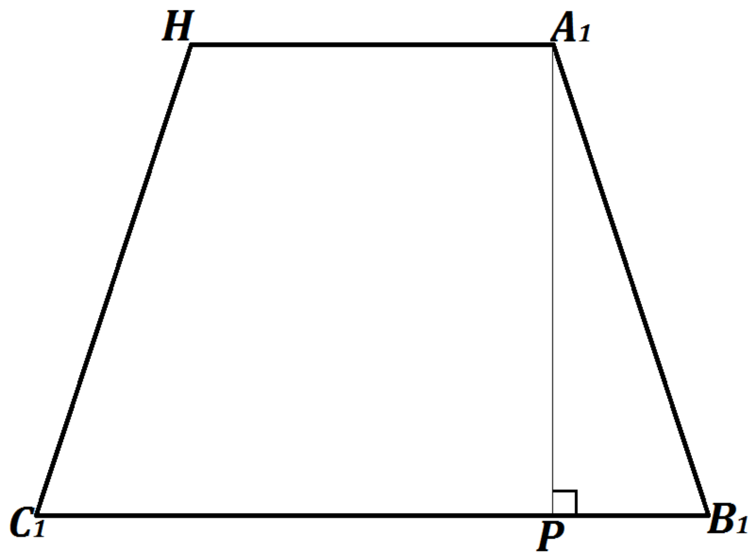
$$AB = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sin 45°}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

=>

$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

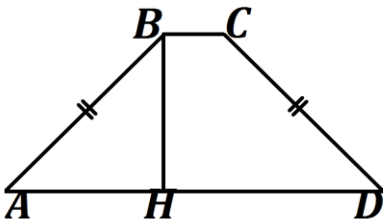
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
$A_1H = x$
A_1P — высота трапеции

Свойство равнобедренной трапеции



$$AH = \frac{AD - BC}{2}$$
$$HD = \frac{AD + BC}{2}$$

Тогда
$$B_1P = \frac{B_1C_1 - A_1H}{2} = \frac{\sqrt{3} - x}{2}$$

$$\angle B_1A_1P = 180 - \angle B_1PA_1 - \angle A_1B_1C_1 = 180 - 90 - 75 = 15^\circ$$

Формулы сложения и вычитания аргументов
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\angle B_1A_1P = \frac{B_1P}{A_1B_1}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3} - x}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(45 - 30)^\circ = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}} \qquad \Big|\cdot 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - x$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}\cdot x$$

$$-\sqrt{2} = -\sqrt{2}\cdot x$$

$$x = 1$$

$$A_1H = 1$$

Ответ: б) 1

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ	1

При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение:

Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100}\cdot 28 = 7$
…			
n	$\frac{28}{n}$	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100}\cdot\frac{28}{n} = \frac{7}{n}$

Очевидно, что наибольший годовой платёж будет в первом году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение n лет)
=>
Наибольший годовой платёж = 9 млн

$$\frac{28}{n} + 7 = 9$$

$$\frac{28}{n} = 2$$

$$n = 14$$

=>
В таблице все значения становятся известными:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{14} = 2$	7
…			
14	2	2	$\frac{7}{14} = 0{,}5$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 14\cdot 2 + \frac{7 + 0{,}5}{2}\cdot 14$$

$$\text{ОСВ} = 28 + 7{,}5\cdot 7 = 80{,}5$$

Ответ: 80,5 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$
имеет единственный корень.

Решение:

$x^2+(2-a)^2-|x-2+a|-|x-a+2|=0$

Рассмотрим функцию
$f(x)=x^2+(2-a)^2-|x-2+a|-|x-a+2|$

Заметим, что $f(x)$ – чётная, т.к. $f(-x)=f(x)$
$f(-x)=(-x)^2+(2-a)^2-|-x-2+a|-|-x-a+2|$
$f(-x)=x^2+(2-a)^2-|x+2-a|-|x+a-2|$

=>
$x=0$ (для выполнения единственности решения)
Подставим в уравнение $x=0$:

$0^2+(2-a)^2-|0-2+a|-|0-a+2|=0$

$(2-a)^2-|a-2|-|-a+2|=0$

$(2-a)^2-|a-2|-|a-2|=0$

$(2-a)^2-2|a-2|=0$

$|a-2|^2-2|a-2|=0$

$|a-2|\cdot(|a-2|-2)=0$

$a=2$	$a=4$	$a=0$

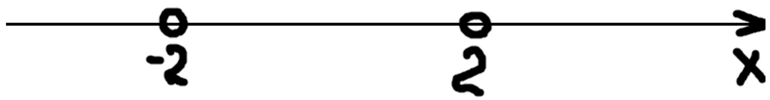
Проверим, получается ли единственное решение при подстановке данных значений a

Если $a=2$
$x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$
$x^2+(2-2)^2=|x-2+2|+|x-2+2|$
$x^2=|x|+|x|$
$x^2=2|x|$
$x^2-2|x|=0$
$|x|^2-2|x|=0$
$|x|\cdot(|x|-2)=0$

$x=0$	$x=2$	$x=-2$

=>
$a=2$ не подходит

Если $a=4$
$x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$
$x^2+(2-4)^2=|x-2+4|+|x-4+2|$
$x^2+4=|x+2|+|x-2|$
Найдём при каких x модули обращаются в нули:



Если $x<-2$, то
$x^2+4=-x-2-x+2$
$x^2+2x+4=0$
$x^2+2x+1+3=0$
$(x+1)^2+3=0$

Нет корней

Если $-2 < x < 2$, то
$x^2 + 4 = x + 2 - x + 2$
$x^2 = 0$
$x = 0$
1 корень

Если $x > 2$, то
$x^2 + 4 = x + 2 + x - 2$
$x^2 - 2x + 4 = 0$
$x^2 - 2x + 1 + 3 = 0$
$(x - 1)^2 + 3 = 0$
Нет корней
=>
$a = 4$ подходит

Если $a = 0$
$x^2 + (2 - a)^2 = |x - 2 + a| + |x - a + 2|$
$x^2 + (2 - 0)^2 = |x - 2 + 0| + |x - 0 + 2|$
$x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$
Получаем такое же уравнение, как и при $a = 4$
=>
$a = 0$ подходит

Ответ: $a = 0$; $a = 4$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
.

Решение:

а)
На доске может быть написано:
41 или 42 или 43 или 44 или 45 или 46 или 47 чисел

Пусть
$ч_1, ч_2, \ldots, ч_n$ – написанные на доске числа
$п_1, п_2, \ldots, п_n$ – написанные на доске положительные числа
$о_1, о_2, \ldots, о_n$ – написанные на доске отрицательные числа

Допустим на доске написано 41 число:
20 положительных
20 отрицательных
1 ноль

Тогда
$$\frac{ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{41}}{41} = -3$$
=>
$ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{41} = -123$

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{20}}{20} = 4$$
=>
$п_1 + п_2 + \cdots + п_{20} = 80$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{20}}{20} = -8$$
=>
$о_1 + о_2 + \cdots + о_{20} = -160$

Сумма всех положительных + сумма всех отрицательных должны равняться сумме всех чисел

Очевидно, что, добавляя одно положительное сумма увеличивается на 4, а добавляя одно отрицательное сумма уменьшается на 8, т.е. шаг равен 4
=>
сумма чисел также должна быть кратна 4
=>
количество чисел на доске также должно быть кратно 4
=>
на доске 44 числа

б)
На доске написано 44 числа

$$\frac{ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{44}}{44} = -3$$
=>
$$ч_1 + ч_2 + \cdots + ч_{44} = -132$$

Допустим среди 44 чисел:
20 положительных
20 отрицательных
4 нуля

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{20}}{20} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{20} = 80$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{20}}{20} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{20} = -160$$
=>
Текущая сумма -80 (нужно изменить сумму на -52)

Допустим среди 44 чисел:
15 положительных
25 отрицательных
4 нуля

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{15}}{15} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{15} = 60$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{25}}{25} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{25} = -200$$
=>
Текущая сумма -140 (нужно изменить сумму на +8)

Допустим среди 44 чисел:
17 положительных
25 отрицательных
2 нуля

$$\frac{п_1 + п_2 + \cdots + п_{17}}{17} = 4$$
=>
$$п_1 + п_2 + \cdots + п_{17} = 68$$

$$\frac{о_1 + о_2 + \cdots + о_{25}}{25} = -8$$
=>
$$о_1 + о_2 + \cdots + о_{25} = -200$$
=>
Текущая сумма -132 (подходит)

Запишем все возможные комбинации:
1
17 положительных
25 отрицательных
2 нуля
2
15 положительных
24 отрицательных
5 нулей
3
13 положительных
23 отрицательных

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180311

8 нулей
4
11 положительных
22 отрицательных
11 нулей
5
9 положительных
21 отрицательных
14 нулей
6
7 положительных
20 отрицательных
17 нулей
7
5 положительных
19 отрицательных
20 нулей
8
3 положительных
18 отрицательных
23 нулей
9
1 положительных
17 отрицательных
26 нулей

В любом варианте больше отрицательных
Наибольшее количество положительных в варианте №1

Ответ: а) 44, б) отрицательных, в) 17

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4