

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

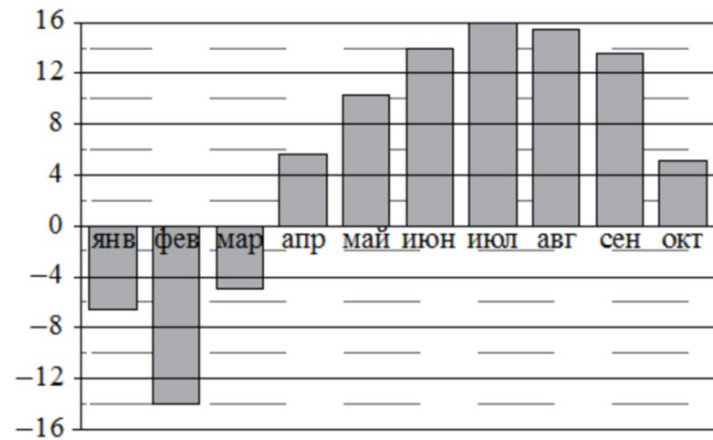
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера

соответствующего задания, начиная с первой клеточки цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной соответстви с приведёнными в бланке образцами. Измерений писать не нужно.

Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Ответ: _____.

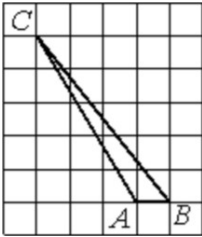
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев среднемесячная температура превышала 6 градусов Цельсия.



Ответ: _____.

На клетчатой бумаге с размером клетки изображён треугольник. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону.





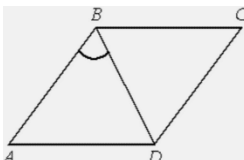
Ответ: _____.

В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

Найдите корень уравнения

Ответ: _____.

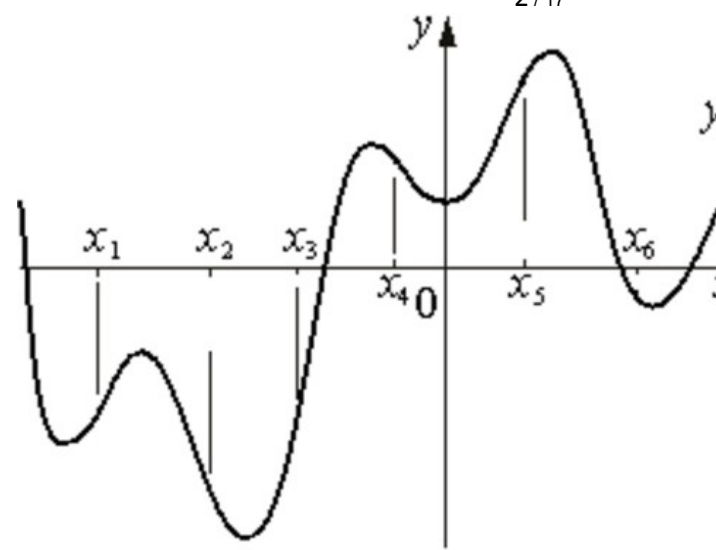


В ромбе угол равен 48° . Найдите угол $\angle A$. Ответ дайте в градусах.

Ответ:

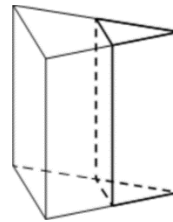
_____.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?



Ответ: _____.

Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 75. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: _____.

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Ответ: _____.



Зависимость объёма спроса (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены (тыс. руб.) задаётся формулой . Выручка предприятия за месяц (в тыс. руб.) вычисляется по формуле . Определите наибольшую цену , при которой месячная выручка составит не менее 700 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: _____.

Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: _____.

Найдите наибольшее значение функции на отрезке .

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 2 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

В основании пирамиды лежит прямоугольник со стороной и диагональю . Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали основания отмечена точка , а на ребре точка так, что .

а) Докажите, что плоскость параллельна ребру .

б) Плоскость пересекает ребро в точке . Найдите расстояние от точки до плоскости .

Решите неравенство

В остроугольном треугольнике проведены высоты и . На них из точек и опущены перпендикуляры и соответственно.

а) Докажите, что прямые и параллельны.

б) Найдите отношение к , если .

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $p\%$ к концу предыдущего месяца;

– 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.



Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6

Найдите наименьшее значение , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Найдите все значения , при каждом из которых уравнение

на промежутке имеет ровно два корня.

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.



№ задания	Ответ
1	3
2	5
3	5
4	0,17
5	0,4
6	66
7	4
8	37,5
9	0,2
10	14
11	10
12	3
13	а) ; . б)
14	
15	
16	
17	5
18	
19	а) Могло, б) 10, в)

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

Решение:

а)

--	--

б)

Сравним и
и

и

и

и

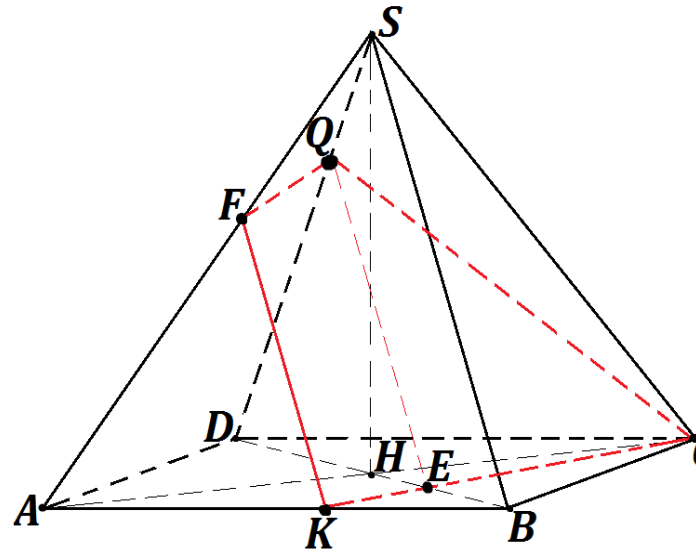
=>



=>

Ответ: а) ; . б)

Содержание критерия
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или в пункте <i>b</i> ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
<i>Максимальный балл</i>



В основании пирамиды лежит прямоугольник со стороной a и диагональю b . Все боковые рёбра пирамиды равны 5 . На диагонали AC основания отмечена точка H , а на ребре AB точка K так, что $AK = a/2$.

- а) Докажите, что плоскость SKF параллельна ребру CD .
б) Плоскость SKF пересекает ребро AD в точке F . Найдите расстояние от точки F до плоскости SKD .

Решение:

а)

Продлим AK до пересечения с ребром CD в точке L .
Построим прямую SL , т.к. точки S, L и K лежат в одной плоскости

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках AKL и CDL (подобны по двум углам)

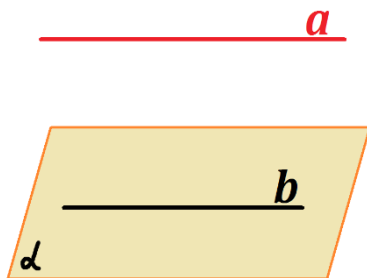
=>
=>

по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

=>

Признак параллельности прямой и плоскости





Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости

=>

б)

(по признаку параллельности прямой и плоскости из пункта а)

В построим такую, что

Построим прямую , т.к. точки и лежат в одной плоскости

Построим прямую , т.к. точки и лежат в одной плоскости

Пусть искомая высота в

по двум углам

Найдём высоту в

(по теореме Пифагора)

Распишем отношение сходственных сторон и высот в подобных треугольниках и

Ответ: б)

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах
Верно доказан пункт а.

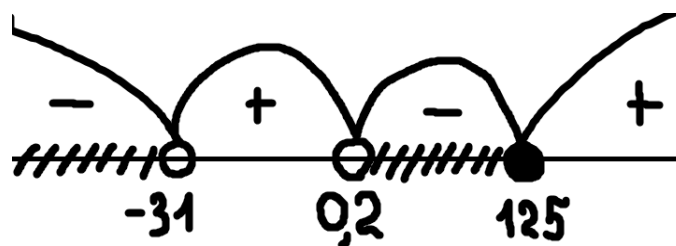
ИЛИ
Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
Максимальный балл

Решите неравенство

Решение:

Пусть

--	--



Нет решений, т.к. число в степени всегда положительно	
---	--



Ответ:

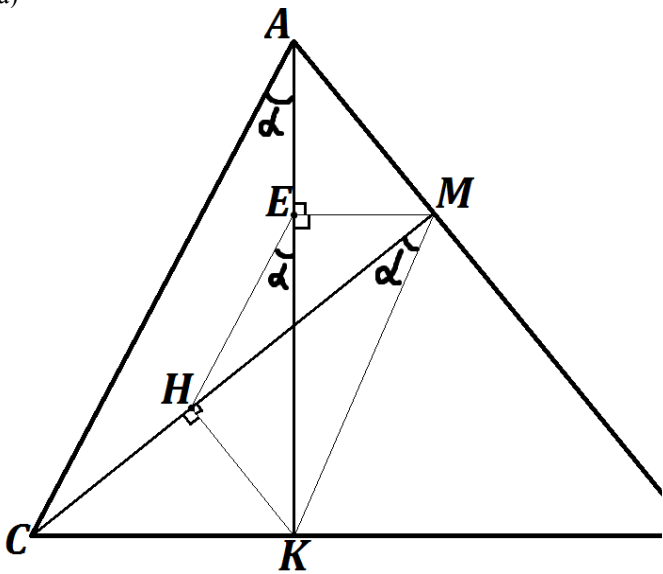
Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
<i>Максимальный балл</i>

В остроугольном треугольнике проведены высоты AK и CM . На них из точек E и H опущены перпендикуляры EM и HN соответственно.

- а) Докажите, что прямые EM и HN параллельны.
б) Найдите отношение EM к HN , если $\angle A = 60^\circ$.

Решение:

а)



Если мы докажем равенство углов $\angle A$ и $\angle M$, то это будет означать параллельность прямых EM и HN .

Углы $\angle A$ и $\angle M$ опираются на отрезок AM .

\Rightarrow

Можно провести окружность с диаметром AM , которая будет проходить через точки E , H и N . Мысленно проводим окружность через эти точки.

Аналогично, проведем окружность с диаметром AM .

Углы $\angle A$ и $\angle M$ опираются на отрезок AM .

\Rightarrow

Можно провести окружность с диаметром AM , которая будет проходить через точки E , H и N . Мысленно проводим окружность через эти точки.

вписанной для обеих окружностей.

Пусть $\angle A = \alpha$.

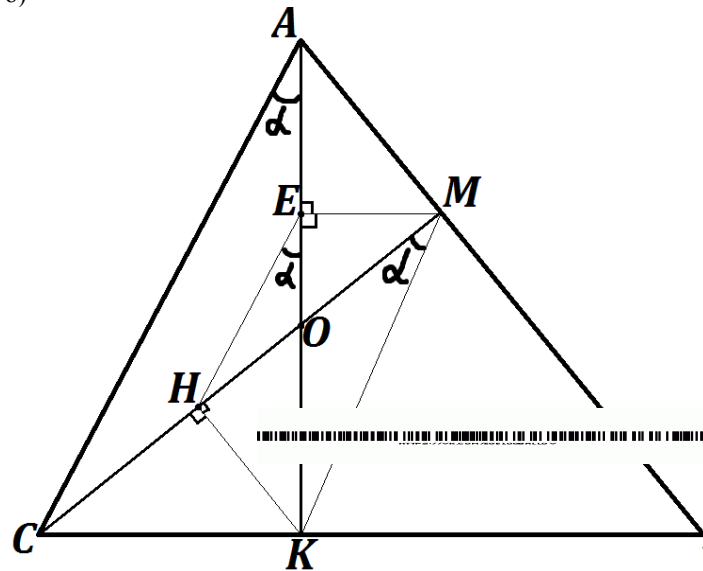
Тогда $\angle M = \alpha$.

Тогда $\angle A = \angle M$.

соответственные углы при прямых EM и HN и секущей AM .

\Rightarrow

б)



Пусть $\angle A = \alpha$.



по двум углам

Искомое отношение к это коэффициент подобия этих треугольников, нужно найти его

(по теореме о сумме углов четырёхугольника)

(т.к. это вертикальные углы)

(т.к. это смежные углы)

(по теореме о сумме углов треугольника)

(по теореме о сумме углов треугольника)

по двум углам

Выразим и через

=>

=>

=>

Ответ: б)

Содержание критерия
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный

ответ из-за арифметической ошибки,
ИЛИ
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *a*, при этом пункт *a* не выполнен

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Максимальный балл

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Найдите наименьшее значение , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:

1 млн это 1000 тыс.

1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, сумма платежей:
первый платёж
второй платёж
...
шестой платёж



Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	
01.02	
07.02	
15.02	
01.03	
07.03	
15.03	
01.04	
07.04	
15.04	
01.05	
07.05	
15.05	
01.06	
07.06	
15.06	
01.07	
07.07	
15.07	

Получаем систему уравнений:

Сложим левые и правые части уравнений:

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2
млн рублей
(по условию)
=>
тыс.

Требуется найти наименьшее подходящее целое
=>

Ответ: 5

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки
ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
<i>Максимальный балл</i>

Найдите все значения , при каждом из которых уравнение

на промежутке имеет ровно два корня.

Решение:

Решим графически:

Построим гиперболу (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

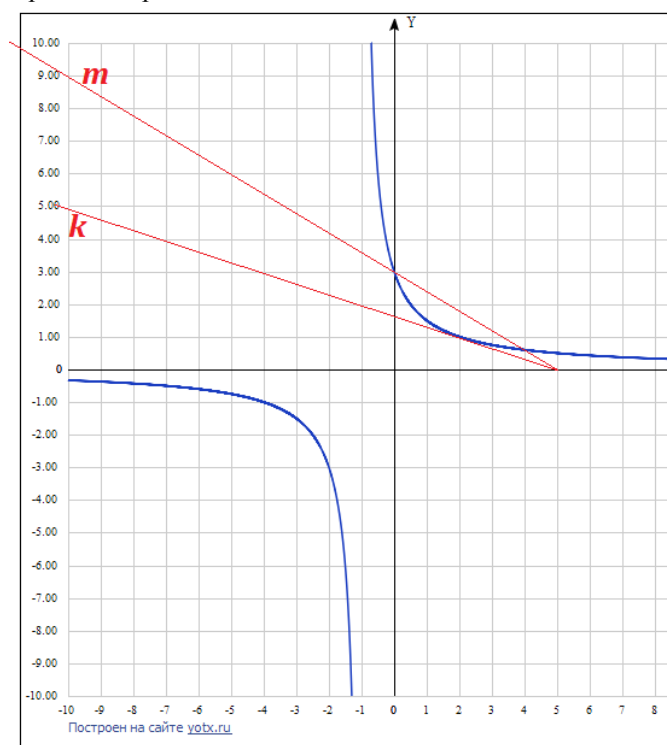
Уравнение задаёт множество «галочек», проходящих через точку

Если , то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если , то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. «галочка» будет располагаться ниже оси)
Если , то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. «галочка» станет осью абсцисс)
Если , то получаем 2 пересечения с гиперболой (т.к. «галочка» будет с

Пусть
прямая (левая ветка «галочки»), проходящая через точку
прямая (левая ветка «галочки»), проходящая через точку касания гиперболы



Проведём прямые m и k :



Левая ветка «галочки» это убывающая прямая, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные

множество убывающих лучей, стартующих из точки

Найдём значение параметра a у прямой :
проходит через t .

Найдём значение параметра a у прямой :
является касательной к гиперболе

Условие касания функции и прямой

Подставим значение a под второе уравнение системы:

Если $a < 0$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $a = 0$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $0 < a < 1$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $a = 1$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $a > 1$, то получаем 1 пересечение с гиперболой

Ответ:

Содержание критерия
Обоснованно получен правильный ответ
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a
Решение не соответствует перечисленным выше

Максимальный балл



Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение:

В театре число мальчиков числа посетивших театр
В кино число мальчиков числа посетивших кино

- а)
Доля мальчиков в театре будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в театре и чем больше будет девочек в театре
Аналогично с кино
Доля мальчиков в кино будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в кино и чем больше будет девочек в кино

В группе 20 учащихся: 10 мальчиков и 10 девочек

Пусть все мальчики ходили только в кино или только в театр, а все девочки ходили сразу и в кино, и в театр за 1 день

Начинаем подбор:

1

Пусть

5 мальчиков были только в театре

5 мальчиков были только в кино

Тогда

Всего в театре было $5 м + 10 д$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

\Rightarrow

Противоречие

\Rightarrow

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в театре

2

Пусть

4 мальчика были только в театре

6 мальчиков были только в кино

Тогда

Всего в театре было $4 м + 10 д$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

\Rightarrow

Подходит

\Rightarrow

Проверим, подходит ли под другое условие:

Всего в кино было $6 м + 10 д$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в кино)

\Rightarrow

Подходит

\Rightarrow

Могло

б)

В предыдущем пункте мальчиков могло быть 10, предположим, что их было 11:

Если мальчиков 11, то девочек 9

Аналогично предыдущему пункту:



Доля мальчиков в театре будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в театре и чем больше будет девочек в театре

Аналогично с кино

Доля мальчиков в кино будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в кино и чем больше будет девочек в кино

Пусть

все мальчики ходили только в кино или только в театр, а

все девочки ходили сразу и в кино, и в театр за 1 день

Начинаем подбор:

1

Пусть

5 мальчиков были только в театре

6 мальчиков были только в кино

Тогда

Всего в театре было $5m + 9d$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

\Rightarrow

Противоречие

\Rightarrow

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в театре

2

Пусть

4 мальчика были только в театре

7 мальчиков были только в кино

Тогда

Всего в театре было $4m + 9d$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

\Rightarrow

Подходит

\Rightarrow

мальчиков в театре должно быть 0, 1, 2, 3 или 4

Проверим, подходит ли под другое условие:

Всего в кино было $7m + 9d$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в кино)

\Rightarrow

Противоречие

\Rightarrow

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в кино

Всего в кино было $6m + 9d$

\Rightarrow

(Доля мальчиков в кино)

\Rightarrow

мальчиков в кино должно быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6

Итак,

мальчиков в театре должно быть 0, 1, 2, 3 или 4
мальчиков в кино должно быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6

\Rightarrow

даже если в театре было 4 мальчика и в кино 6, то одиннадцатый мальчик не был ни в театре, ни в кино, что противоречит условию

\Rightarrow

11 мальчиков в группе из 20 учащихся быть не могло

\Rightarrow

10 – наибольшее количество мальчиков в группе из 20 учащихся

в)

Из предыдущего пункта следует, что наибольшее количество мальчиков в группе (а, следовательно, наименьшая доля девочек) достигается, если все мальчики ходили или в кино, или в театр, а девочки ходили в кино, и в театр за 1 день

Пусть

число мальчиков в театре

число мальчиков в кино

число девочек в театре или кино



Требуется найти наименьшее значение дроби:

3

Преобразуем дробь:

=>

Попробуем как-то оценить значение дроби:

4

1

По условию имеем:

В театре число мальчиков числа посетивших театр

Мы искали наименьшее значение дроби:

Чем больше знаменатель – тем меньше значение дроби

=>

Подставляем под наибольшее возможное значение, т.е.

Ответ: а) Могло, б) 10, в)

2

По условию имеем:

В кино число мальчиков числа посетивших кино

Содержание критерия
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
<i>Максимальный балл</i>

