Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

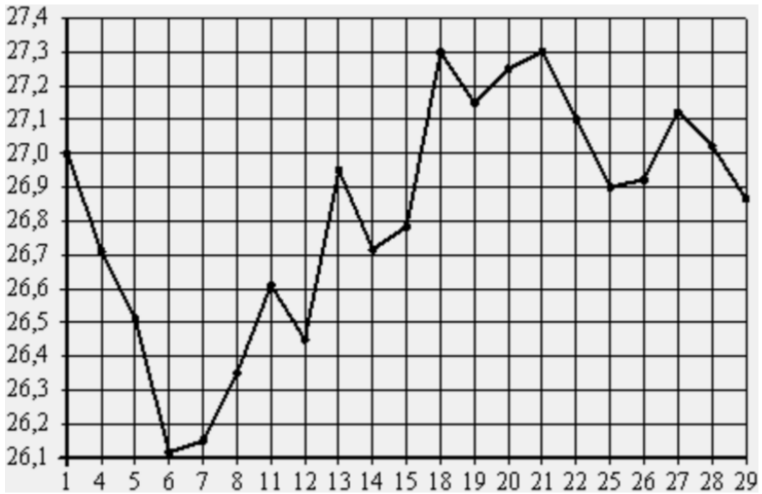
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Для ремонта квартиры требуется 59 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

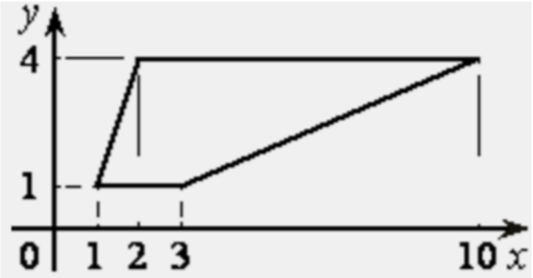
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 29 сентября 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс евро в период с 21 по 28 сентября. Ответ дайте в рублях.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: ___________________________.

4 Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 70 выступлений – по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 28 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

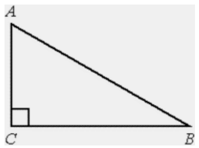
Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{4x+13}.$$

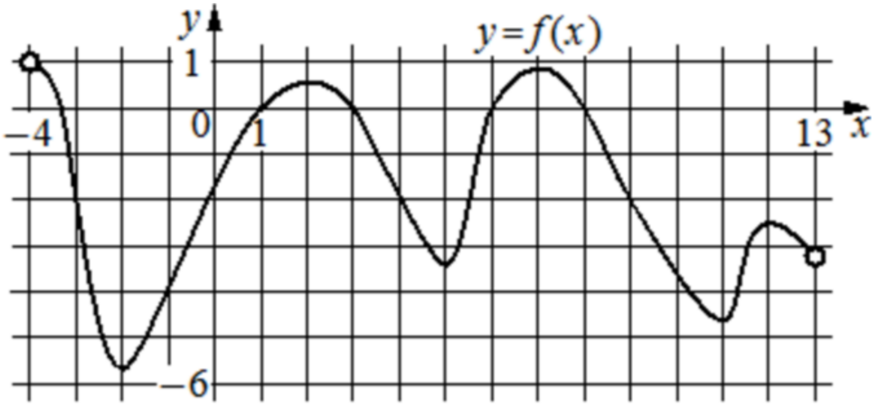
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC=12\sqrt{3}$, $AB=24$. Найдите $\sin B$.



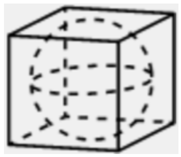
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4;13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=14$.



Ответ: ___________________________.

8 Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 16. Найдите его объём.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{16\sin 98°\cdot\cos 98°}{\sin 196°}.$$

Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180304

10 Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где $t -$ время с момента начала наблюдения в секундах, $T = 2$ с – период колебаний, $v_0 = 1{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E(в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где $m -$ масса груза (в кг), $v -$ скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 20 секунд после начала наблюдения. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сосуда. Первый содержит 60 кг, а второй – 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 45% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 18x^2 - x^3 + 19$ на отрезке $[-7; 10]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

15 Решите неравенство

$$\log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4}.$$

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.
б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180304

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180304

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	8
2	26,9
3	15
4	0,3
5	-9
6	0,5
7	6
8	32768
9	8
10	0,18
11	15
12	19
13	а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$
14	$2{,}4\sqrt{5}$
15	$(-4;-3]\cup[-1;+\infty)$
16	$\frac{3\sqrt{21}}{14}$
17	17
18	2 и $\sqrt{65}+3$
19	а) привели, б) нет, в) 23

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

а)

ОДЗ:

1.

$2\cos x+\sqrt{3}\neq 0$

$2\cos x\neq -\sqrt{3}$

$\cos x\neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

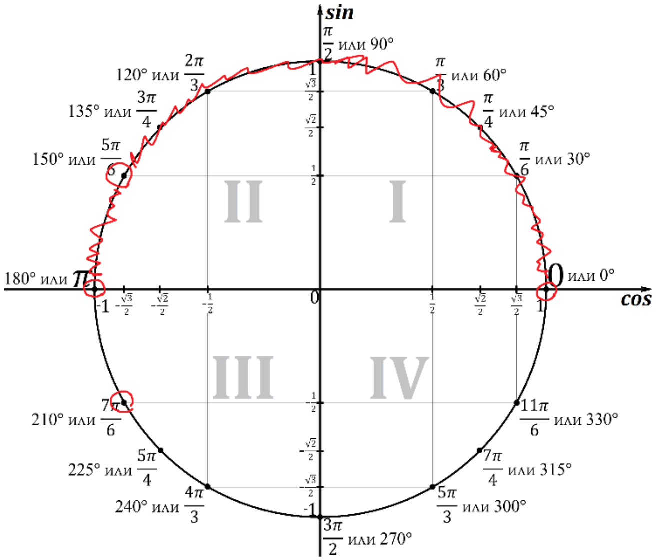
$x\neq \frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in Z$

$x\neq -\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in Z$

2.

ОДЗ логарифма
Для $\log_a b$:
$a > 0$
$a \neq 1$
$b > 0$

$\sin x > 0$



$\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x) = 0$

$\log_2(\sin x) \cdot (\log_2(\sin x) + 1) = 0$

$\log_2(\sin x) = 0$ $\sin x = 2^0$ $\sin x = 1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$	$\log_2(\sin x) + 1 = 0$ $\log_2(\sin x) = -1$ $\sin x = 2^{-1}$ $\sin x = \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$ (Не подходит по ОДЗ)

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \notin \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \notin \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6} \notin \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$

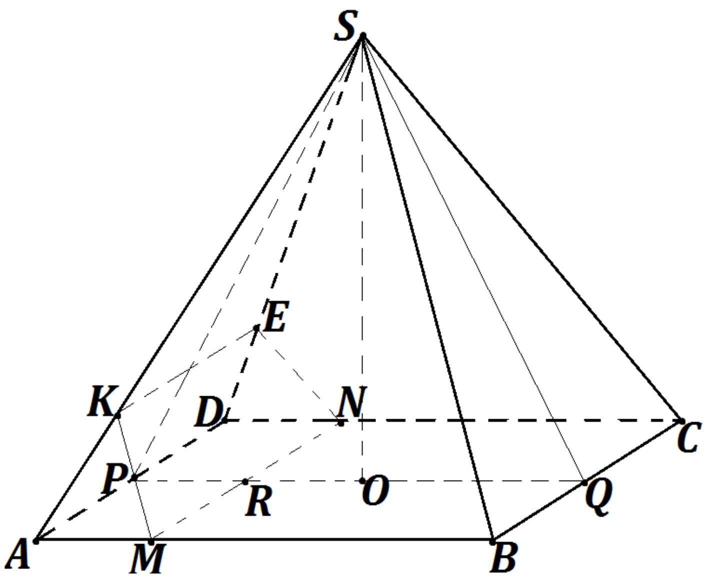
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём
$AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

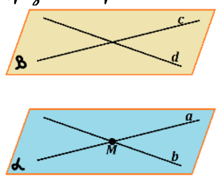
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Решение:

а)



Признак параллельности двух плоскостей



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

$MN \parallel BC$ (т.к. $AM = 4$ и $DN = 4$)

Осталось доказать, что $MK \parallel SB$

Пусть
SO – высота пирамиды
Тогда
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
$AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = 12$ (по теореме Пифагора)

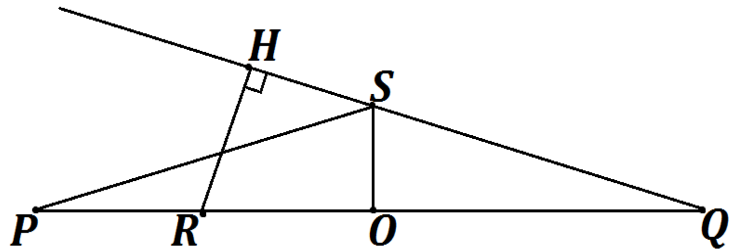
$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
$\left(\begin{array}{c} \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{SA} \\ \angle MAK = \angle BAS \end{array}\right)$
=> $MK \parallel SB$

=> $(MNK) \parallel (SBC)$
■

б)
Пусть P – середина AD
Пусть R – середина MN
Пусть Q – середина BC

$(SPQ) \perp BC$
Расстояние от точки M до (SBC) равно расстоянию от точки R до (SBC), потому что M и R лежат на одной прямой
Итак, расстояние от точки R до прямой SQ – искомое

Рассмотрим $\triangle PQS$ – равнобедренный
$SQ = SP = \sqrt{SO^2 + OQ^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)
$PQ = AB = 16$
Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы узнать тупоугольным или остроугольным является $\triangle PQS$:
$\cos \angle PSQ = \frac{SP^2 + SQ^2 - PQ^2}{2 \cdot SP \cdot SQ} = \frac{\sqrt{80}^2 + \sqrt{80}^2 - 16^2}{2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80}}$
$\cos \angle PSQ < 0$ =>$\triangle PQS$ – тупоугольный:



RH – искомое расстояние

$RQ = 12$

$\sin\angle OQS = \frac{SO}{SQ} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle HQR = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{HR}{RQ}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{HR}{12}$

$HR = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2{,}4\sqrt{5}$

Ответ: б) $2{,}4\sqrt{5}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$\log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4}$.

.

Решение:

ОДЗ:

1.

$x + 5 > 0$

$x > -5$

2.

$x^2 + 10x + 25 > 0$

$(x+5)^2 > 0$

$x \neq -5$

3.

$x^2 + 10x + 25 \neq 1$

$x^2 + 10x + 24 \neq 0$

$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 4$

$x_1 = \frac{-10+2}{2} \neq -4$

$x_2 = \frac{-10-2}{2} \neq -6$

$\log_{2^4}(x+5) + \log_{(x+5)^2} 2 \geq \frac{3}{4}$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

Свойство логарифмов

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

$\frac{1}{4} \cdot \log_2(x+5) + \frac{1}{2} \cdot \log_{(x+5)} 2 \geq \frac{3}{4}$

Свойство логарифмов

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\frac{1}{4} \cdot \log_2(x+5) + \frac{1}{2\log_2(x+5)} \geq \frac{3}{4}$

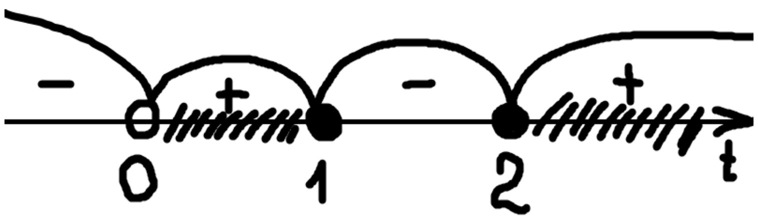
Пусть $\log_2(x+5) = t$

$\frac{t}{4} + \frac{1}{2t} - \frac{3}{4} \geq 0$

$\frac{t^2 - 3t + 2}{4t} \geq 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$ $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$ $t_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ $t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$	$4t \neq 0$ $t \neq 0$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180304



$0 < t \leq 1$ $0 < \log_2(x+5) \leq 1$ $\log_2 1 < \log_2(x+5) \leq \log_2 2$ $1 < x+5 \leq 2$ $-4 < x \leq -3$	$t \geq 2$ $\log_2(x+5) \geq 2$ $\log_2(x+5) \geq \log_2 4$ $x+5 \geq 4$ $x \geq -1$

Ответ: $(-4; -3] \cup [-1; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

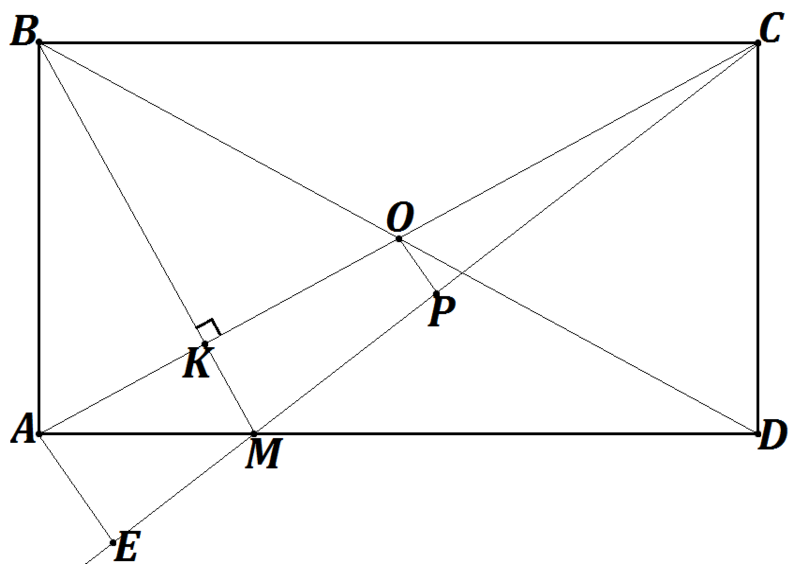
а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

.

Решение:

а)



$BM = DM$

$\angle DBC = \angle MDB$
(т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых)
$\angle MBD = \angle MDB$
(т.к. $\Delta\ MBD$ – равнобедренный)

Пусть
$\angle DBC = \alpha = \angle MDB = \angle MBD$
$AC \cap BD = O$

$\angle OAD = \angle ADO = \alpha$
(т.к. $\Delta\ AOD$ – равнобедренный по свойству прямоугольника)

$\angle BAC = \angle BAD - \angle OAD = 90 - \alpha$

Пусть
$BM \cap AC = K$
$\angle AKB = 90°$
$\angle ABK = 180 - \angle AKB - \angle BAC = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$
(по теореме о сумме углов треугольника)
=>
$\angle ABC = 90°$

$\angle DBC = \alpha$
$\angle MBD = \alpha$
$\angle ABM = \alpha$
=>
$\angle ABM = \angle DBC = \angle MBD = 90:3 = 30°$
■

б)
Пусть
P − основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую CM
OP−?

Пусть
AE − высота в $\triangle ACM$

$AE \perp CM$
$OP \perp CM$
=>
$AE \parallel OP$
O − середина AC
(т.к. диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам)
=>
OP − средняя линия $\triangle ACE$
=>
$OP = \frac{1}{2} \cdot AE$

Найдём AE как высоту в $\triangle ACM$ через формулы площади этого треугольника
$\frac{1}{2} \cdot CM \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AM \cdot \sin\angle CAM$

Найдём как можно больше элементов равенства:
Из $\triangle BCD$:
$\operatorname{tg}\angle CBD = \frac{CD}{BC}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{9}$
$CD = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

Из $\triangle ABM$:
$\operatorname{tg}\angle ABM = \frac{AM}{AB}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{3\sqrt{3}}$
$AM = 3$

$DM = BC - AM = 9 - 3 = 6$
$CM = \sqrt{CD^2 + DM^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ (по теореме Пифагора)

$\angle CAM = \alpha$
$\sin\angle CAM = \sin 30° = \frac{1}{2}$

Подставляем полученные значения:
$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{7} \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$
$3\sqrt{7} \cdot AE = 9\sqrt{3}$

$AE = \frac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$
=>
$OP = \frac{1}{2} \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{7} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,	1

ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта a, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:
7 млн это 7000 тыс.
0,819 млн это 819 тыс.

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	7000	$\frac{7000}{10} = 700$	$\frac{r}{100} \cdot 7000 = 70r$
…			
10	700	700	$\frac{r}{100} \cdot 700 = 7r$

=>
Последний платёж $\geq$ 819 тыс.

$700 + 7r \geq 819$
$7r \geq 119$
$r \geq 17$

=>

$r = 17$
(т.к. мы искали наименьшее, удовлетворяющее неравенству r)

Ответ: 17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

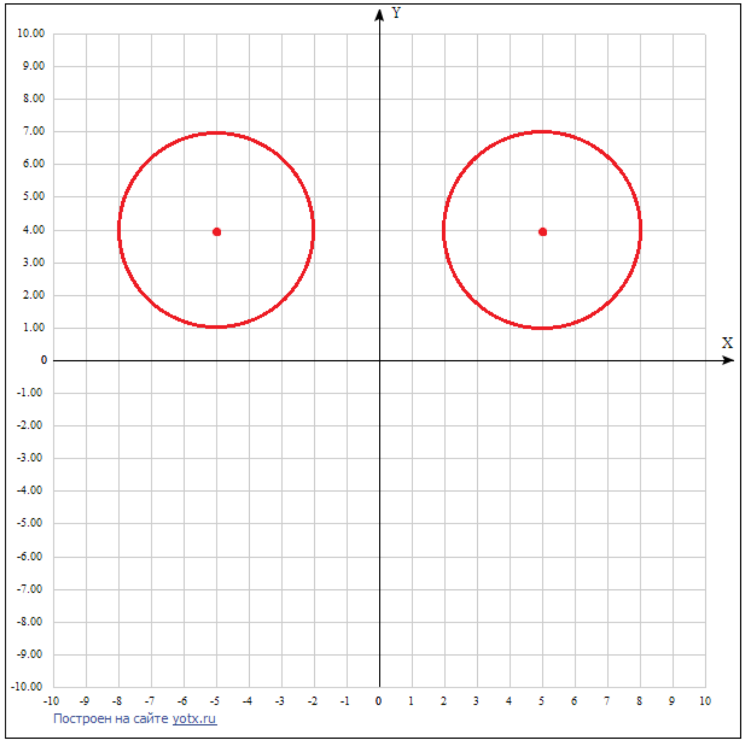
18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$
имеет единственное решение.

Решение:

Первое уравнение задаёт две окружности:
Если $x \geq 0$, то
$(x-5)^2+(y-4)^2=9$

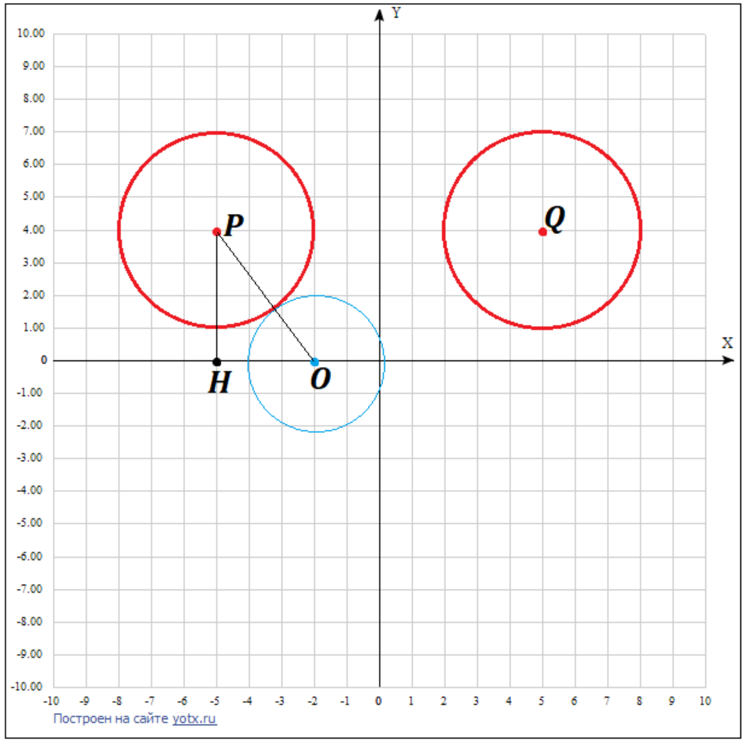
$(x-5)^2+(y-4)^2=3^2$
Уравнение окружности с центром $(5;4)$ и радиусом 3

Если $x<0$, то
$(-x-5)^2+(y-4)^2=9$
$(x+5)^2+(y-4)^2=3^2$
Уравнение окружности с центром $(-5;4)$ и радиусом 3

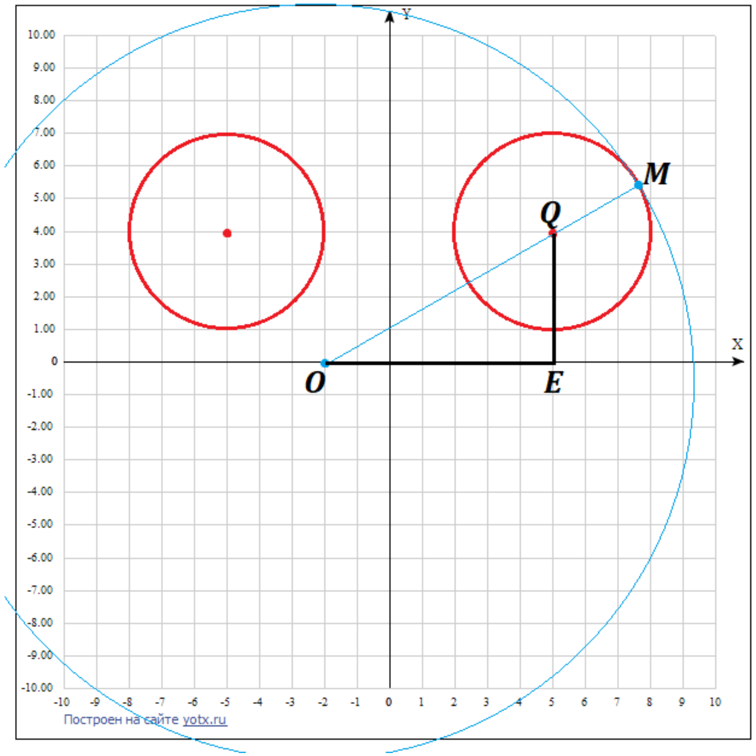


Построим эти окружности:
Второе уравнение задаёт окружность с центром $(-2;0)$ и радиусом a

Требуется построить такую окружность, чтобы она имела одну точку пересечения с уже построенным окружностями, есть два варианта таких окружностей:
Вариант №1 (касание с левой окружностью)
Проведём линию, соединяющую центры окружностей, опустим перпендикуляр из центра левой окружности на ось абсцисс и введём образовавшиеся точки:



$OH=3$
$PH=4$
(исходя из координат данных точек)
$OP=a+3$
(т.к. точка касания окружностей лежит на линии, соединяющей центры окружностей)
=>
$OP^2=PH^2+OH^2$ (по т. Пифагора)
$(a+3)^2=4^2+3^2$
$(a+3)^2=25$
$a+3=5$
$a=2$
Вариант №2 (касание с правой окружностью)
Проведём линию, соединяющую центры окружностей до пересечения с окружностью, опустим перпендикуляр из центра правой окружности на ось абсцисс и введём образовавшиеся точки:



$OE = 7$
$QE = 4$
(исходя из координат данных точек)
$OM = OQ + 3$
(т.к. точка касания окружностей лежит на линии, соединяющей центры окружностей)
=>
$OQ^2 = OE^2 + QE^2$ (по т. Пифагора)
$OQ^2 = 7^2 + 4^2$
$OQ^2 = 65$
$OQ = \sqrt{65}$
=>
$OM = OQ + 3 = \sqrt{65} + 3$
=>
$a = \sqrt{65} + 3$

Если $a < 2$, то пересечений нет
Если $a = 2$, то 1 пересечение (точнее касание)
Если $2 < a < \sqrt{65} + 3$, то больше одного пересечения
Если $a = \sqrt{65} + 3$, то 1 пересечение (точнее касание)
Если $a > \sqrt{65} + 3$, то пересечений нет

Ответ: 2 и $\sqrt{65} + 3$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?
.

Решение:

а)
Если сумма двух соседних членов последовательности равна 3, потом 5, потом снова 3, потом снова 5 и т.д.:
1 2 3 0 5 −2 7 …
=>
В такой последовательности числа, стоящие на нечётных позициях, увеличиваются на 2
=>

Очевидно, что таким способом мы дойдём до $a_n = 235$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad -2 \quad 7 \quad \ldots \quad 231 \quad -228 \quad 233 \quad -230 \quad 235$

б)
Заметим, что в приведённой в предыдущем пункте последовательности на нечётных позициях стоят нечётные числа, а на чётных – чётные

Первое число – нечётное, и сумма двух чисел – число нечётное (по условию 3, 5 или 25)
=>
В данной последовательности всегда на нечётных позициях стоят нечётные числа, а на чётных – чётные
=>
a_{1000} должно быть чётным, но последнее число последовательности – это 235
=>
Не может

в)
Наименьшее число членов последовательности будет достигаться при наибольшем увеличении значений последовательности, т.е. если:

Уменьшение числа (по модулю) идёт на 3 (начиная с третьего)
Увеличение числа (по модулю) идёт на 25

$1 \quad 2 \quad 23 \quad -20 \quad 45 \quad -42 \quad 67 \quad \ldots$

Нечётные числа при таком раскладе увеличиваются на 22, поэтому:
$a_1 = 1$
$a_3 = 23$
$a_5 = 45$
$a_7 = 67$
$a_9 = 89$
$a_{11} = 111$
$a_{13} = 133$
$a_{15} = 155$
$a_{17} = 177$
$a_{19} = 199$
$a_{21} = 221$
$a_{23} = 243$ (на 8 больше, чем нужно)
=>
Заменим четыре уменьшения числа (по модулю) на 3 на четыре уменьшения числа (по модулю) на 5, например, самые первые четыре, получаем последовательность из 23 членов:

$1 \quad 4 \quad 21 \quad -16 \quad 41 \quad -36 \quad 61 \quad -56 \quad 81 \quad -78 \quad 103 \quad -100$
$125 \quad -122 \quad 147 \quad -144 \quad 169 \quad -166 \quad 191 \quad -188 \quad 213$
$-210 \quad 235$

Ответ: а) привели, б) нет, в) 23

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4