

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

К И М
Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

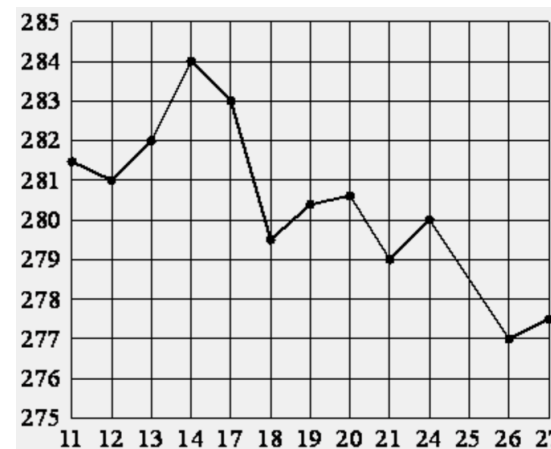
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** В школе 400 учеников, из них 30% – ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 15% изучают французский язык. Сколько учеников в школе изучает французский язык, если в начальной школе французский язык не изучается?

Ответ: _____.

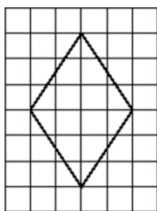
- 2** На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена унции золота на момент закрытия торгов была наибольшей за указанный период.



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

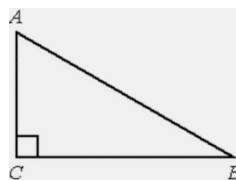
- 4 В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные – жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $(6x - 13)^2 = (6x - 11)^2$.

Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 15$, $BC = 9$. Найдите $\cos A$.

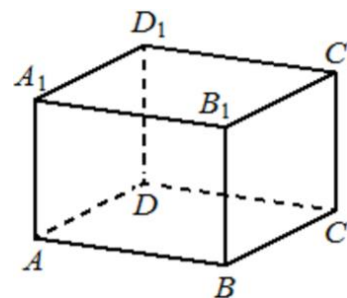


Ответ: _____.

- 7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

Ответ: _____.

- 8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1 .



Ответ: _____.

- 9 Найдите значение выражения $\frac{-6 \sin 374^\circ}{\sin 14^\circ}$.

Ответ: _____.



- 10** Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $v = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 10$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

Ответ: _____.

- 11** Заказ на изготовление 154 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

Ответ: _____.

- 12** Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 6)^3 - 3x$ на отрезке $[-5,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.
- 14** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- 15** Решите неравенство $\log_3^2(x^2 - 16) - 5 \log_3(x^2 - 16) + 6 \geq 0$.
- 16** Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .
а) Докажите, что $CN:CM = LB:LA$.
б) Найдите MN , если $LB:LA = 2:3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.



17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

19 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию

$$a > b > c > d.$$

а) Найдите числа a, b, c и d , если $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 27$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1800$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1800$. Найдите количество возможных решений числа a .

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
 Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора



**Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	42
2	14
3	12
4	0,55
5	2
6	0,8
7	6
8	30
9	-6
10	2,5
11	11
12	15
13	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{9\pi}{4}$
14	44
15	$(-\infty; -\sqrt{43}] \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup [\sqrt{43}; +\infty)$
16	$\frac{115}{6}$
17	7
18	$\left\{-\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}; 1\right\}$
19	а) $a = 7, b = 6, c = 4$ и $d = 2$, б) нет, в) 448

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$$

Решение:

а)

$$\sin^2 x \cdot (\sqrt{2}\sin x - 1) + (\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$$

$$(\sqrt{2}\sin x - 1) \cdot (\sin^2 x + 1) = 0$$

$$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$

$$\sqrt{2}\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$$

$$\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\sin^2 x = -1$$

Нет решений



б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$. б) $\frac{9\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14

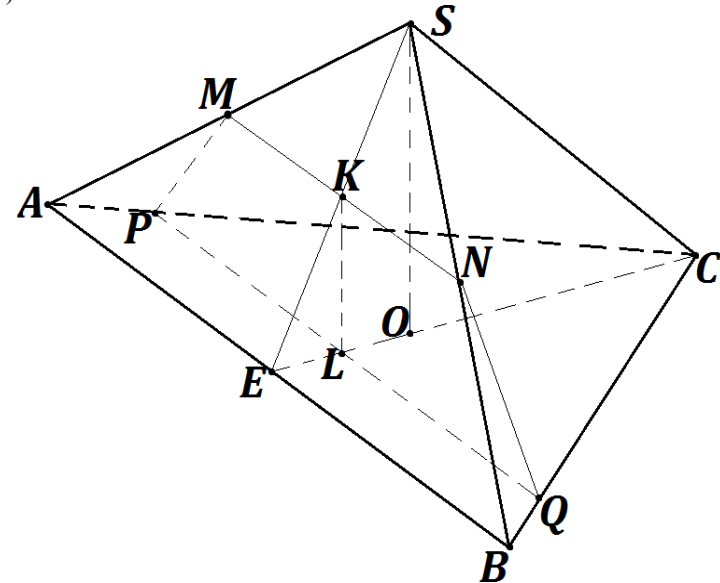
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Решение:

а)



Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:

Проведём медиану SE , являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$

Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$

Построим прямую NQ , т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости

Построим прямую PM , т.к. точки P и M лежат в одной плоскости

$MNQP$ – сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ – прямоугольный:

Т.к. K – середина SE и $KL \parallel SO$, то KL – средняя линия $\triangle SOE$

$\Rightarrow L$ – середина OE

Пусть $EL = OL = x$

Т.к. CE – медиана в $\triangle ABC$, то:

$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$

$$\Rightarrow OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$\Rightarrow \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$



■

б)

Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (т.к. } MN \text{ — средняя линия } \triangle ABS)$$

$$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10 \text{ (т.к. } \frac{CL}{LE} = 5:1)$$

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 11 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 11 = 5,5 \text{ (т.к. } KL \text{ — средняя линия } \triangle SOE)$$

$$S = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 5,5 = 44$$

Ответ: б) 44

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт <i>a</i> . ИЛИ Верно решён пункт <i>б</i> при отсутствии обоснований в пункте <i>a</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство

$$\log_3^2(x^2 - 16) - 5 \log_3(x^2 - 16) + 6 \geq 0.$$

Решение:

ОДЗ:

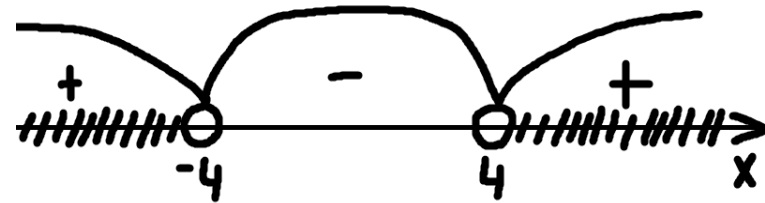
$$x^2 - 16 > 0$$

$$(x - 4)(x + 4) > 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$



Пусть $\log_3(x^2 - 16) = t$

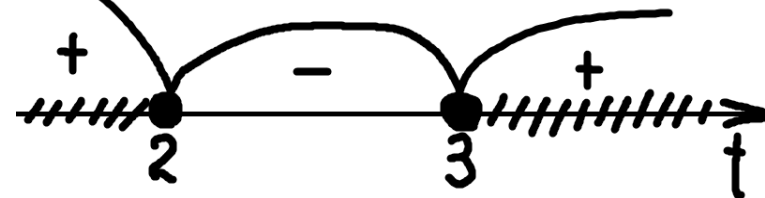
$$t^2 - 5t + 6 \geq 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$t_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$



1.

$$t \leq 2$$

$$\log_3(x^2 - 16) \leq 2$$

$$\log_3(x^2 - 16) \leq \log_3 9$$

$$x^2 - 16 \leq 9$$

$$x^2 - 25 \leq 0$$

$$(x - 5)(x + 5) \leq 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

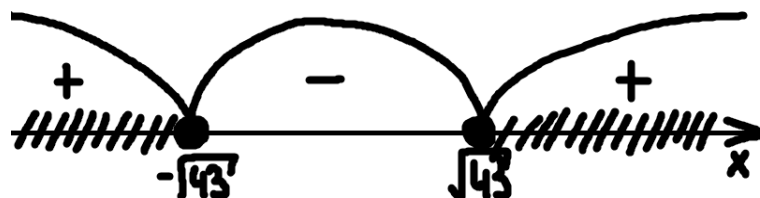
$$x = 5$$

$$x = -5$$



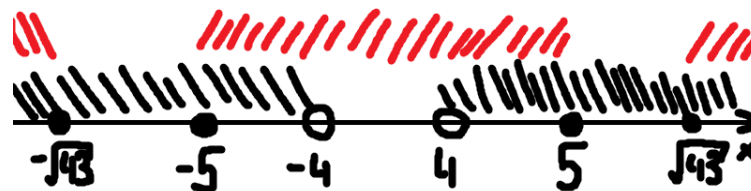


2.
 $t \geq 3$
 $\log_3(x^2 - 16) \geq 3$
 $\log_3(x^2 - 16) \geq \log_3 27$
 $x^2 - 16 \geq 27$
 $x^2 - 43 \geq 0$
 $(x - \sqrt{43})(x + \sqrt{43}) \geq 0$
 $(x - \sqrt{43})(x + \sqrt{43}) = 0$
 $x = \sqrt{43}$
 $x = -\sqrt{43}$



3.
 ОДЗ:
 $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{43}) \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup [\sqrt{43}; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

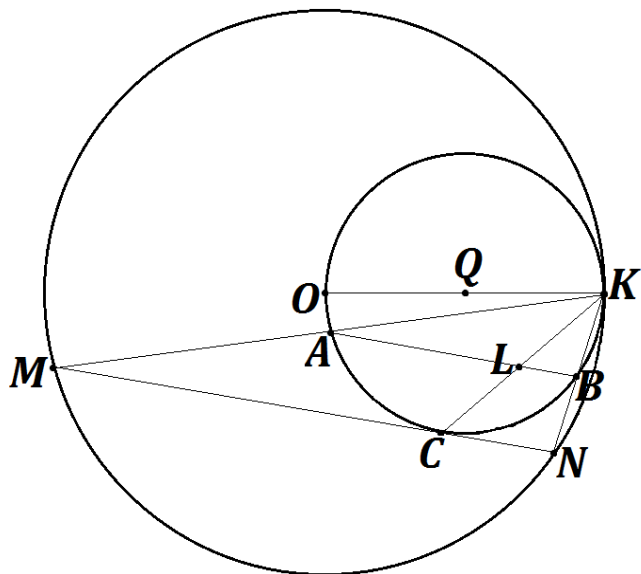
16 Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

- а) Докажите, что $CN:CM = LB:LA$.
- б) Найдите MN , если $LB:LA = 2:3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

Решение:

а)





Пусть
 O – центр большей окружности
 Q – центр меньшей окружности

KO – диаметр меньшей окружности

Рассмотрим $\triangle MOK$

$$MO = KO$$

(т.к. это радиусы большей окружности)

\Rightarrow

$\triangle MOK$ – равнобедренный

$$\angle OAK = 90^\circ$$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

\Rightarrow

OA – высота $\triangle MOK$

\Rightarrow

OA – медиана $\triangle MOK$

(по свойству равнобедренного треугольника)

\Rightarrow

$$AM = AK$$

Аналогично

Рассмотрим $\triangle ONK$

$$ON = OK$$

(т.к. это радиусы большей окружности)

\Rightarrow

$\triangle ONK$ – равнобедренный

$$\angle ONK = 90^\circ$$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

\Rightarrow

OB – высота $\triangle ONK$

\Rightarrow

OB – медиана $\triangle ONK$

(по свойству равнобедренного треугольника)

\Rightarrow

$$BN = BK$$

\Rightarrow

A – середина MK

B – середина KN

\Rightarrow

AB – средняя линия $\triangle MNK$

$LB \parallel CN$ (т.к. $AB \parallel MN$)

$$BN = BK$$

\Rightarrow

LB – средняя линия $\triangle CNK$

$LA \parallel CM$ (т.к. $AB \parallel MN$)

$$AM = AK$$

\Rightarrow

LA – средняя линия $\triangle CMK$

$\triangle BLK \sim \triangle CNK$ по двум углам

\Rightarrow

$$\frac{CN}{LB} = \frac{CK}{LK}$$

$\triangle ALK \sim \triangle CMK$ по двум углам

\Rightarrow

$$\frac{CM}{LA} = \frac{CK}{LK}$$

\Rightarrow



$$\frac{CN}{LB} = \frac{CM}{LA} \quad | : CM$$

$$\frac{CN}{LB \cdot CM} = \frac{1}{LA} \quad | \cdot LB$$

$$\frac{CN}{CM} = \frac{LB}{LA}$$

■

6)

$$OQ = \sqrt{23}$$

=>

$$KO = 2\sqrt{23}$$

Пусть

$$LB = 2x$$

$$LA = 3x$$

Тогда

$$CN = 2LB = 4x$$

$$CM = 2LA = 6x$$

$$MN = CN + CM = 10x$$

Опустим перпендикуляр OH на прямую MN

Рассмотрим $\triangle OMN$

$$OM = ON$$

(т.к. это радиусы большей окружности)

=>

$\triangle OMN$ – равнобедренный

=>

OH – высота, медиана и биссектриса $\triangle OMN$

=>

$$MH = \frac{1}{2} \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 10x = 5x$$

$$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{(2\sqrt{23})^2 - (5x)^2} = \sqrt{92 - 25x^2} \quad (\text{по теореме}$$

Пифагора)

Рассмотрим четырёхугольник $OQCH$:

$$OH \perp MN$$

$$CQ \perp MN$$

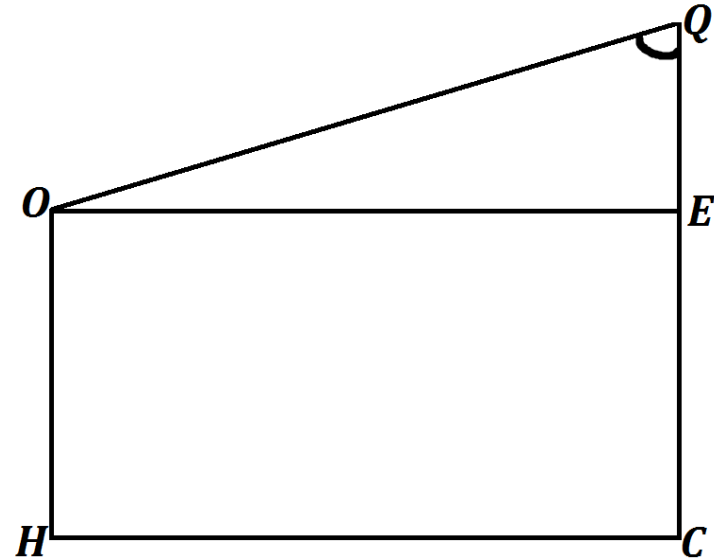
=>

$$OH \parallel CQ$$

=>

$OQCH$ – прямоугольная трапеция

Опустим перпендикуляр OE на прямую OC



$$QE = CQ - CE = CQ - OH = \sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2}$$

$$OE = CH = NH - CN = 5x - 4x = x$$

$$OQ = \sqrt{23}$$

По теореме Пифагора из $\triangle OQE$:

$$OQ^2 = OE^2 + QE^2$$

$$\sqrt{23}^2 = x^2 + (\sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2})^2$$

$$23 = x^2 + 23 - 2\sqrt{2116 - 575x^2} + 92 - 25x^2$$

$$2\sqrt{2116 - 575x^2} = 92 - 24x^2$$

$$\sqrt{2116 - 575x^2} = 46 - 12x^2 \quad |^2$$

$$2116 - 575x^2 = 2116 - 1104x^2 + 144x^4$$

$$144x^4 - 529x^2 = 0$$

$$x^2(144x^2 - 529) = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$144x^2 - 529 = 0$$



$x = 0$ (посторонний корень)	$144x^2 = 529$ $x^2 = \frac{529}{144}$ $x = \frac{23}{12}$ $x = -\frac{23}{12}$ (посторонний корень)
---------------------------------	--

$$x = \frac{23}{12}$$

$$MN = 10x = 10 \cdot \frac{23}{12} = \frac{230}{12} = \frac{115}{6}$$

Ответ: $\frac{115}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

Решение:

Пусть

1 января – день начисления процентов

1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot S = 1,2 \cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0,7 \cdot S$

=>

01.04.2017	$1,2 \cdot S - 0,7 \cdot S = 0,5 \cdot S$
------------	---

2018 год

01.01.2018	$1,2 \cdot 0,7 \cdot S = 0,84 \cdot S$
------------	--



01.04.2018	
01.07.2018	$0,4 \cdot S$

=>

01.04.2018	$0,84 \cdot S - 0,4 \cdot S = 0,44 \cdot S$
------------	---

2019 год

01.01.2019	$1,2 \cdot 0,4 \cdot S = 0,48 \cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0,2 \cdot S$

=>

01.04.2019	$0,48 \cdot S - 0,2 \cdot S = 0,28 \cdot S$
------------	---

2020 год

01.01.2020	$1,2 \cdot 0,2 \cdot S = 0,24 \cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0,24 \cdot S - 0 = 0,24 \cdot S$
------------	-----------------------------------

Общая сумма выплат должна быть больше 10 млн рублей (по условию)

=>

$$0,5 \cdot S + 0,44 \cdot S + 0,28 \cdot S + 0,24 \cdot S > 10 \text{ млн}$$

$$1,46 \cdot S > 10$$

$$S > \frac{1000}{146}$$

$$S > \frac{500}{73}$$

$$S > \frac{62}{73}$$

$$S > 6 \frac{62}{73}$$

$$S > 6 \frac{62}{73}$$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S

=>

$$S = 7$$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

Решение:

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} - 1 = 0$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a - x^3 + 9a^2x}{x^3 - 9a^2x} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 0$$



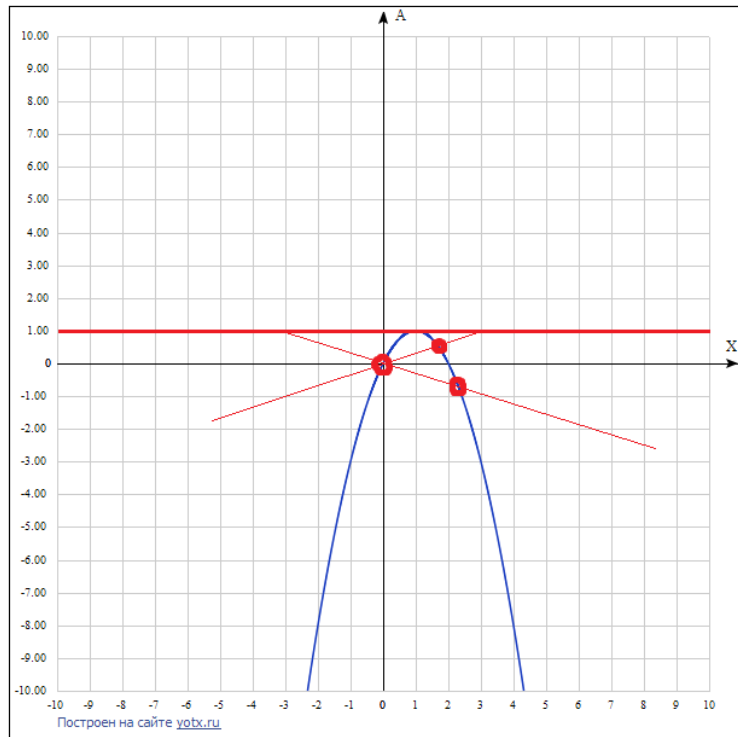
$$\begin{cases} x^2 - 2x + a = 0 \\ x^3 - 9a^2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x(x^2 - 9a^2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x(x - 3a)(x + 3a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{3}x \\ a \neq -\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Решим систему графически в системе координат xOa



Графиком функции $a = -x^2 + 2x$ является парабола, ветви вниз

$$x_0 = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y_0 = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$$

Найдём значение параметра a при пересечении прямой $a = \frac{1}{3}x$ и параболы:

$$-x^2 + 2x = \frac{1}{3}x$$

$$-x^2 + \frac{5}{3}x = 0$$

$$x\left(\frac{5}{3} - x\right) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9}$$

Найдём значение параметра a при пересечении прямой

$a = -\frac{1}{3}x$ и параболы:

$$-x^2 + 2x = -\frac{1}{3}x$$

$$-x^2 + \frac{7}{3}x = 0$$

$$x\left(\frac{7}{3} - x\right) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$a = -\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{7}{9}$$

Одно решение уравнения $a = -x^2 + 2x$ будет при:

$$a = 0$$



$$a = \frac{5}{9}$$

$$a = -\frac{7}{9}$$

Также одно решение уравнения $a = -x^2 + 2x$ будет в вершине параболы
 \Rightarrow
 $a = 1$

При $a > 1$ решений нет, во всех других случаях решений будет два

Ответ: $a \in \left\{-\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}; 1\right\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19

Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

- а) Найдите числа a, b, c и d , если $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25$.
 б) Может ли быть $a + b + c + d = 27$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$?
 в) Пусть $a + b + c + d = 1800$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1800$. Найдите количество возможных решений числа a .

Решение:

а)
 Запишем два уравнения в систему:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 19 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 6$$

$$(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) - (a + b) - (c + d) = 6$$

$$(a - b)(a + b) + (c - d)(c + d) - (a + b) - (c + d) = 6$$

$$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 6$$

Выражения $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ не могут быть отрицательными, т.к. если бы они могли быть отрицательными, то a было бы равно b или a было бы меньше b , что противоречит условию
 \Rightarrow

$$\begin{cases} (a - b - 1) \geq 0 \\ (c - d - 1) \geq 0 \end{cases}$$

Вернёмся к первому уравнению системы:

$$\begin{cases} (a + b) + (c + d) = 19 \\ (a + b) \cdot 1 + (c + d) \cdot 1 = 19 \end{cases}$$

Теперь рассмотрим данное уравнение:

$$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 6$$

Очевидно, что одно из выражений $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ равно нулю
 \Rightarrow

$a - b - 1 = 0$ $a = b + 1$ Тогда $(c + d)(c - d - 1) = 6$ Произведение каких натуральных чисел может дать 6? $\boxed{1}$ 6 и 1 $\begin{cases} c + d = 6 \\ c - d - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} c + d = 6 \\ c = d + 2 \end{cases}$	$c - d - 1 = 0$ $c = d + 1$ Тогда $(a + b)(a - b - 1) = 6$ Произведение каких натуральных чисел может дать 6? $\boxed{1}$ 6 и 1 $\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 6 \\ a = b + 2 \end{cases}$
--	--



$\begin{cases} d + 2 + d = 6 \\ c = d + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2d = 4 \\ c = d + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} d = 2 \\ c = 4 \end{cases}$ <p>Подставим в уравнение: $(a + b) + (c + d) = 19$ $(a + b) + 6 = 19$ $a + b = 13$ $a = 7$ $b = 6$ $c = 4$ $d = 2$</p> <p>Подходящий пример найден, но разберём оставшиеся варианты</p> $\boxed{2} \begin{cases} 3 \text{ и } 2 \\ c + d = 3 \\ c - d - 1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} c + d = 3 \\ c = d + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} d + 3 + d = 3 \\ c = d + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2d = 0 \\ c = d + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} d = 0 \\ c = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow c + d \neq 3$ <p>Т.к. c и d натуральные числа</p>	$\begin{cases} b + 2 + b = 6 \\ a = b + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2b = 4 \\ a = b + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 2 \\ a = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow a + b = 6$ <p>Но $a + b$ это сумма больших из четырёх слагаемых 19-ти</p> $\Rightarrow a + b \neq 6$ <p>Т.к. $a + b > 9,5$</p> $\boxed{2} \begin{cases} 3 \text{ и } 2 \\ a + b = 3 \\ a - b - 1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 3 \\ a = b + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} b + 3 + b = 3 \\ a = b + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2b = 0 \\ a = b + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ a = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow a + b \neq 3$ <p>Т.к. a и b натуральные числа</p>
--	---

б)
 Запишем два уравнения в систему:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 27 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 0$$

$$(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) - (a + b) - (c + d) = 0$$

$$(a - b)(a + b) + (c - d)(c + d) - (a + b) - (c + d) = 0$$

$$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 0$$

Мы знаем, что

$$(a + b) \neq 0$$

$$(c + d) \neq 0$$

\Rightarrow

Выражения $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ должны быть равны нулю одновременно

$$\begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ c - d - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ c = d + 1 \end{cases}$$

Подставим полученные выражения a и c в первое уравнение системы

$$a + b + c + d = 27$$

$$b + 1 + b + d + 1 + d = 27$$

$$2b + 2d = 25 \quad | : 2$$

$$b + d = 12,5$$

Т.к. b и d натуральные числа

\Rightarrow

Не может

в)

Запишем два уравнения в систему:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1800 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1800 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 0$$

$$(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) - (a + b) - (c + d) = 0$$



$$(a - b)(a + b) + (c - d)(c + d) - (a + b) - (c + d) = 0$$

$$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 0$$

Мы знаем, что

$$(a + b) \neq 0$$

$$(c + d) \neq 0$$

\Rightarrow

Выражения $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ должны быть равны нулю одновременно

$$\begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ c - d - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ c = d + 1 \end{cases}$$

Подставим полученные выражения a и c в первое уравнение системы

$$a + b + c + d = 1800$$

$$b + 1 + b + d + 1 + d = 1800$$

$$2b + 2d = 1798 \quad | : 2$$

$$b + d = 899$$

\Rightarrow

Из уравнения $a + b + c + d = 1800$:

$$a + c = 901$$

$$c = 901 - a$$

Из уравнения $c = d + 1$:

$$d = c - 1 = 901 - a - 1 = 900 - a$$

Из уравнения $a = b + 1$:

$$b = a - 1$$

Получаем четвёрку чисел:

$$(a; b; c; d)$$

$$(a; a - 1; 901 - a; 900 - a)$$

Из условия $a > b > c > d$ следует, что:

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \\ c > d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > a - 1 \\ a - 1 > 901 - a \\ 901 - a > 900 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot a > -1 \\ 2a > 902 \\ 0 \cdot a > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - \text{любое} \\ a > 451 \\ a - \text{любое} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$a > 451$$

\Rightarrow

$$a \geq 452$$

Из условия натуральности a, b, c и d следует, что

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 1 \\ c \geq 1 \\ d \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ a - 1 \geq 1 \\ 901 - a \geq 1 \\ 900 - a \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ a \geq 2 \\ a \leq 900 \\ a \leq 899 \end{cases}$$

Итак

$$452 \leq a \leq 899$$

$$452 \quad 453 \quad \dots \quad 499 \quad (99 - 51 = 48 \text{ чисел})$$

$$500 \quad 501 \quad \dots \quad 599 \quad (100 \text{ чисел})$$

$$600 \quad 601 \quad \dots \quad 699 \quad (100 \text{ чисел})$$

$$700 \quad 701 \quad \dots \quad 799 \quad (100 \text{ чисел})$$



800 801 ... 899 (100 чисел)

=>

a может принимать 448 значений

Ответ: а) $a = 7, b = 6, c = 4$ и $d = 2$, б) нет, в) 448

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

