Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

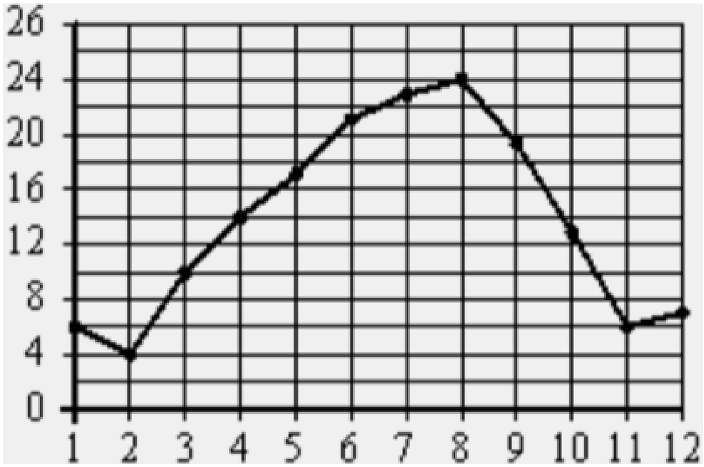
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В летнем лагере 246 детей и 29 воспитателей. В автобус помещается не более 45 пассажиров. Какое наименьшее количество автобусов понадобиться, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

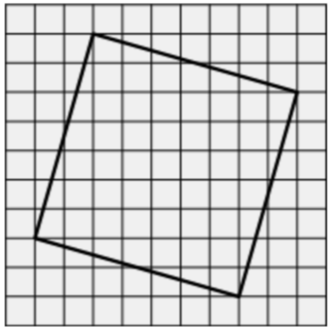
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

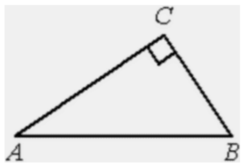
4 В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\log_7(1-x)=\log_7 5$.

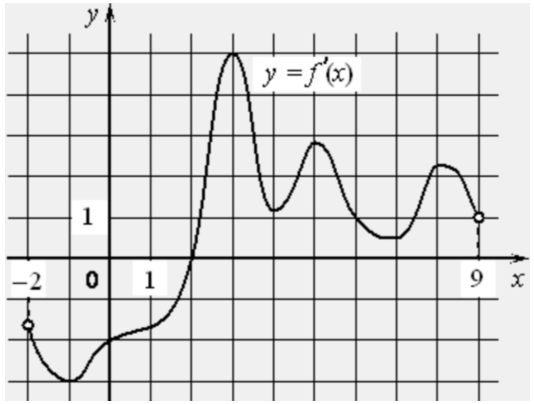
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC=16$, $\operatorname{tg} A=\frac{9}{40}$. Найдите AB.



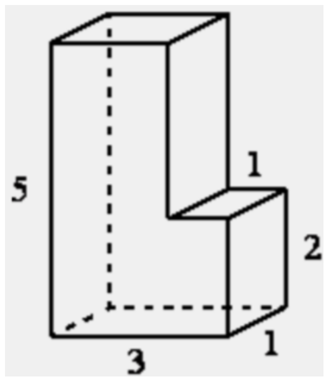
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;9)$. В какой точке отрезка $[2;8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180225

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[5]{36}}{\sqrt[30]{36}}.$$

Ответ: ___________________________.

10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)\cdot\dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,25, а оценка экспертов равна 0,61.

Ответ: ___________________________.

11 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции
$y=0{,}5x^2-11x+28\cdot\ln x+9$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$4\cos^2 x+8\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11}$, $SB=3\sqrt{3}$, $SD=2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

15 Решите неравенство

$$2^x-6-\frac{9\cdot2^x-37}{4^x-7\cdot2^x+12}\le\frac{1}{2^x-4}.$$

16 В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.
б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180225

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r **– целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_35994898
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180225

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	7
2	24
3	53
4	0,97
5	-4
6	16,4
7	2
8	1
9	6
10	0,265
11	20
12	4
13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $\frac{25\pi}{6}$
14	30
15	$(-\infty;0]\cup(\log_2 3;2)\cup(2;3]$
16	0,65
17	7
18	$\left(1;\frac{5}{4}\right)$
19	а) Могло, б) Не могло, в) 18,5

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$4\cos^2 x+8\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

.

Решение:

$4\cos^2 x+8\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$

$4\cos^2 x-8\sin x+1=0$

Основные Тригонометрические формулы

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$

$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$4\cdot(1-\sin^2 x)-8\sin x+1=0$

$4-4\sin^2 x-8\sin x+1=0$

$-4\sin^2 x-8\sin x+5=0$

Пусть $\sin x = t$

$-4t^2 - 8t + 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 64 + 80 = 144 = 12^2$

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{8 + 12}{-8} = -\dfrac{5}{2}$ (нет решений)

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{8 - 12}{-8} = \dfrac{1}{2}$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

$x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{37\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{25\pi}{6}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

перечисленных выше	
Максимальный балл	2

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

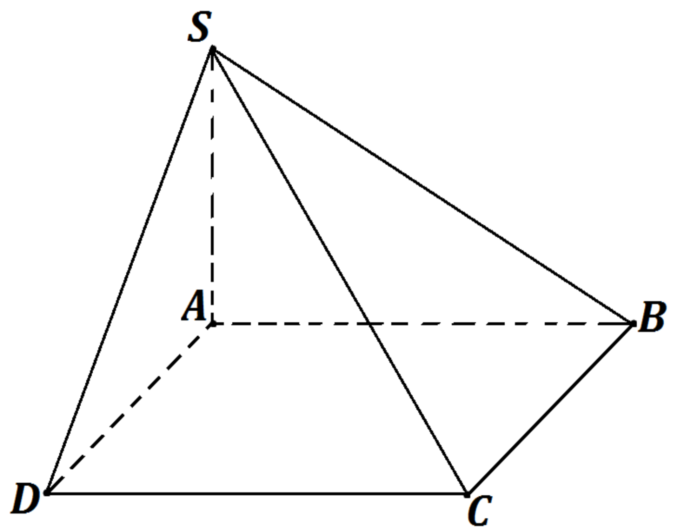
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

.

Решение:

а)



Заметим, что в $\Delta\ ABS$ выполняется теорема Пифагора:

$SB^2 = SA^2 + AB^2$

$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{11}^2 + 4^2$

$27 = 11 + 16$

$27 = 27$

=> $\Delta\ ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\Delta\ ADS$ выполняется теорема Пифагора:

$SD^2 = SA^2 + AD^2$

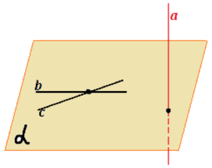
$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{11}^2 + 3^2$

$20 = 11 + 9$

$20 = 20$

$=>$ $\triangle ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$\begin{matrix} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{matrix}$ (т.к. $\triangle ABS$ и $\triangle ADS$ – прямоугольные)

$AB \cap AD = A$

$=> SA \perp (ABC)$

$=> SA$ – высота пирамиды

■

б)

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (по теореме Пифагора)

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{\sqrt{11}^2 + 5^2} = \sqrt{36} = 6$ (по теореме Пифагора)

Заметим, что в $\triangle SBC$ выполняется теорема Пифагора:

$SC^2 = SB^2 + BC^2$

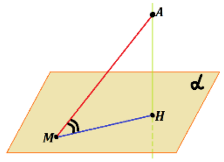
$6^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2$

$36 = 27 + 9$

$36 = 36$

$=>$ $\triangle SBC$ – прямоугольный и $\angle SBC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

SB – это проекция SC на «дальнюю стену», т.е. на плоскость ABS

$=>$

$\angle BSC$ – искомый угол между прямой SC и плоскостью ASB

$$\operatorname{tg}\angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle BSC = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$$

Ответ: 30

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}.$$

Решение:

Пусть $2^x = t$

$$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12}\le\frac{1}{t-4}$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$t^2-7t+12=0$
$D=(-7)^2-4\cdot1\cdot12=1$
$t_1=\dfrac{7+1}{2}=4$
$t_2=\dfrac{7-1}{2}=3$
$t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$

$$\frac{t-6}{1}-\frac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\frac{1}{t-4}\le0$$

Нужно разложить числитель так, чтобы $\frac{1}{t-4}$ взаимно уничтожились

$$\frac{t-6}{1}+\frac{37-9t}{(t-3)(t-4)}-\frac{1}{t-4}\le0$$

$$\frac{t-6}{1}+\frac{t-3-10t+40}{(t-3)(t-4)}-\frac{1}{t-4}\le0$$

$$\frac{t-6}{1}+\frac{t-3}{(t-3)(t-4)}+\frac{-10t+40}{(t-3)(t-4)}-\frac{1}{t-4}\le0$$

$$\frac{t-6}{1}+\frac{1}{t-4}-\frac{10}{t-3}-\frac{1}{t-4}\le0$$

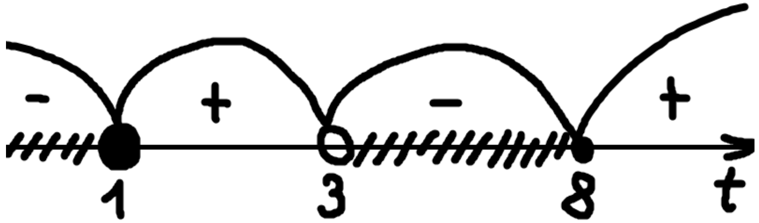
ОДЗ:
1.
$t\ne3$
$2^x\ne3$
$2^x\ne2^{\log_2 3}$
$x\ne\log_2 3$
2.
$t\ne4$
$2^x\ne4$
$2^x\ne2^2$
$x\ne2$

$$\frac{t-6}{1}-\frac{10}{t-3}\le0$$

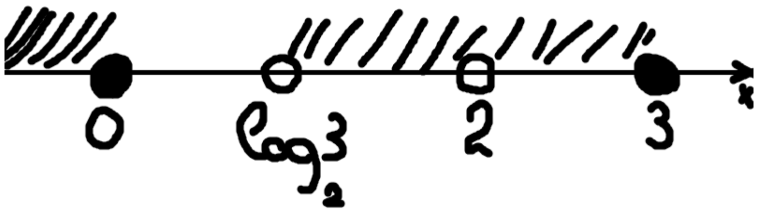
$$\frac{t^2-6t-3t+18-10}{t-3}\le0$$

$$\frac{t^2-9t+8}{t-3}\le0$$

$t^2-9t+8=0$ $D=(-9)^2-4\cdot1\cdot8=49$ $t_1=\dfrac{9+7}{2}=8$ $t_2=\dfrac{9-7}{2}=1$	$t-3\ne0$ $t\ne3$	ОДЗ: $t\ne4$



$t\le1$ $2^x\le1$ $2^x\le2^0$ $x\le0$	$3<t\le8$ $3<2^x\le8$ $2^{\log_2 3}<2^x\le2^3$ $\log_2 3<x\le3$	ОДЗ: $x\ne2$



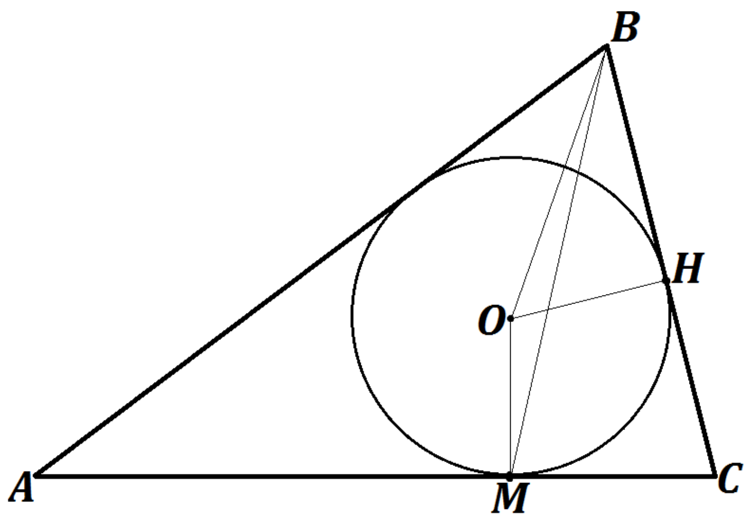
Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3\,; 2) \cup (2; 3]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.
б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.
.

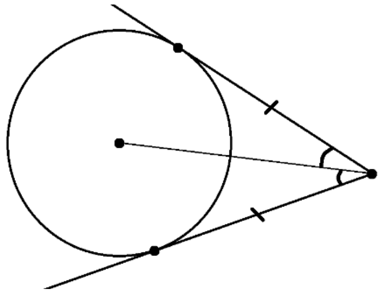
Решение:
а)



Пусть
O − центр вписанной окружности
H − точка касания окружности и стороны BC
r − радиус вписанной окружности

Проведём прямую BO

Свойство касательных

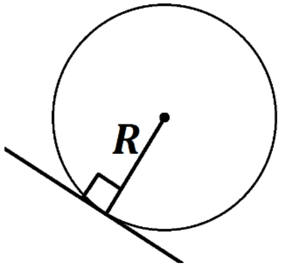


Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

$$\angle OBH = \frac{1}{2} \cdot \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30°$$

(по свойству касательных)

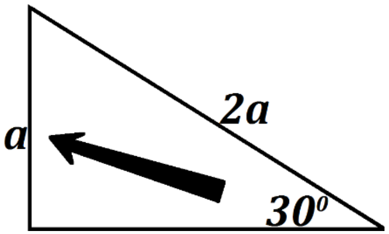
Свойство касательной



Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённом в точку касания

$\angle OHB = 90°$
(по свойству касательной)

Свойство прямоугольного треугольника



Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle\, OBH$ − прямоугольный
$OH = r$
$BO = 2r$
(по свойству прямоугольного треугольника)

Проведём прямую BM
Рассмотрим $\triangle\, OBM$
$OM = r$
$BO = 2r$

Неравенство треугольника

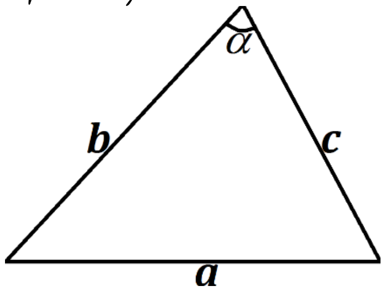
В любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны

$OM + BO > BM$
(неравенство треугольника)
$r + 2r > BM$
$3r > BM$
■

б)
$BM = 2{,}5r$

$\sin\angle BMC = \sin(90 - \angle BMO) = \cos\angle BMO$

Теорема Косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
или

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Рассмотрим $\triangle\, OBM$

$$\cos\angle BMO = \frac{r^2 + (2{,}5r)^2 - (2r)^2}{2 \cdot r \cdot 2{,}5r}$$

$$\cos\angle BMO = \frac{3{,}25r^2}{5r^2} = \frac{3{,}25}{5} = \frac{6{,}5}{10} = 0{,}65$$

=>
$\sin\angle BMC = 0{,}65$

Ответ: 0,65

Содержание критерия	Баллы

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r **– целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:

1 млн это 1000 тыс.
1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, поэтому будет 6 платежей:
x_1 – первый платёж
x_2 – второй платёж
…
x_6 – шестой платёж

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	1000
01.02	$1000\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=1000+10r$
07.02	$1000+10r-x_1$
15.02	600
01.03	$600\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=600+6r$
07.03	$600+6r-x_2$
15.03	400
01.04	$400\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=400+4r$
07.04	$400+4r-x_3$
15.04	300
01.05	$300\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=300+3r$
07.05	$300+3r-x_4$

15.05	200
01.06	$200 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 200 + 2r$
07.06	$200 + 2r - x_5$
15.06	100
01.07	$100 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 100 + r$
07.07	$100 + r - x_6$
15.07	0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 + 10r - x_1 = 600 \\ 600 + 6r - x_2 = 400 \\ 400 + 4r - x_3 = 300 \\ 300 + 3r - x_4 = 200 \\ 200 + 2r - x_5 = 100 \\ 100 + r - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 + 10r - 600 = x_1 \\ 600 + 6r - 400 = x_2 \\ 400 + 4r - 300 = x_3 \\ 300 + 3r - 200 = x_4 \\ 200 + 2r - 100 = x_5 \\ 100 + r = x_6 \end{cases}$$

Сложим левые и правые участи уравнений:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + 26r$

Общая сумма выплат должна быть меньше 1,2 млн рублей (по условию)

=>

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 1200$ тыс.

$1000 + 26r < 1200$

$26r < 200$

$r < \frac{200}{26}$

$r < \frac{100}{13}$

$r < 7\frac{9}{13}$

Требуется найти наибольшее подходящее целое r

=>

$r = 7$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

Решение:

Пусть $\sqrt{2^x - a} = t$

=>

$t > 0$

Каждому конкретному положительному значению t будет соответствовать единственное значение x

$$t+\frac{a-1}{t}=1$$

$$\frac{a-1}{t}=1-t$$

$$a-1=t-t^2$$

$$t^2-t+a-1=0$$

Данное уравнение должно иметь два положительных корня

Теорема Виета

ax^2+bx+c

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

По теореме Виета:

$t_1+t_2=1$

=>

Оба корня не могут быть отрицательными

=>

Один из корней точно положительный

$t_1\cdot t_2=a-1$

Если мы зададим условие $a-1>0$, то тогда t_1 и t_2 оба положительные числа (потому один из корней положительный и если произведение положительное, то и второй корень положительный)

Итак, уравнение $t^2-t+a-1=0$ должно иметь два корня и оба они должны быть положительными, получаем систему:

$$\begin{cases} D>0 \\ a-1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-4a+4>0 \\ a>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5>4a \\ a>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a<\dfrac{5}{4} \\ a>1 \end{cases}$$

Ответ: $a\in\left(1;\frac{5}{4}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

.

Решение:

а)

У нас есть 30 чисел от 1 до 40

Среднее арифметическое равно 7

$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{\text{Сумма этих чисел}}{30} = 7$$

=>

Сумма этих чисел равна 210

Очевидно, что стёрли только те числа, которые были изначально единичками

Среднее арифметическое было 7, а должно стать больше 14

=>

Проще подобрать такой пример, в котором единичек наибольшее возможное количество

30 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма чисел равна 30, а должна быть 210)

29 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 29 единичек равна 29 и последнее число 181, чего быть не может)

28 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 28 единичек равна 28 и последние два числа в сумме 182, чего быть не может)

27 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 27 единичек равна 27 и последние три числа в сумме 183, чего быть не может)

26 единичек быть не может
(т.к. тогда сумма 26 единичек равна 26 и последние четыре числа в сумме 184, чего быть не может)

25 единичек может быть
(т.к. тогда сумма 25 единичек равна 25 и последние пять чисел в сумме 185, т.е. 5 чисел 37, например)

Пусть на доске написано:
25 чисел 1
5 чисел 37

Первоначальное среднее арифметическое:

$$\frac{25 \cdot 1 + 5 \cdot 37}{30} = 7$$

Среднее арифметическое после изменения чисел:

$$\frac{5 \cdot 18{,}5}{5} = 18{,}5$$

$18{,}5 > 14$

=>

Могло

б)

Пусть

x – количество единичек

S – первоначальная сумма чисел (всех, кроме единичек)

Тогда

$\frac{S}{2}$ – оставшаяся сумма чисел (всех, кроме единичек)

Первоначальное среднее арифметическое:

$$\frac{x \cdot 1 + S}{30} = 7$$

=>

$x + S = 210$

$S = 210 - x$

Среднее арифметическое после изменения чисел:

$$\frac{\frac{S}{2}}{30 - x} = \frac{S}{60 - 2x}$$

Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

Получаем неравенство:

$$12 < \frac{S}{60 - 2x} < 13$$

$$12 < \frac{210 - x}{60 - 2x} < 13 \qquad \Big| \cdot (60 - 2x)$$

$$720 - 24x < 210 - x < 780 - 26x$$

$\begin{cases}720-24x<210-x\\210-x<780-26x\end{cases}$

$\begin{cases}23x>510\\25x<570\end{cases}$

$\begin{cases}23x>510\\5x<114\end{cases}$

$\begin{cases}x>22\frac{4}{23}\\x<22{,}8\end{cases}$

$22\frac{4}{23}<x<22{,}8$

=>

Целых x, удовлетворяющих неравенству нет

=>

Не могло

в)

Среднее арифметическое после изменения чисел:

$\frac{S}{60-2x}=\frac{210-x}{60-2x}=\frac{30-x}{60-2x}+\frac{180}{60-2x}=\frac{1}{2}+\frac{90}{30-x}$

Чтобы найти наибольшее значение этого числа, нужно подставить наибольшее возможное значение x

В пункте а) мы доказали, что максимально возможное число пятёрок – это 25, т.е. $x=25$

Тогда

$\frac{1}{2}+\frac{90}{30-x}=\frac{1}{2}+\frac{90}{30-25}=0{,}5+18=18{,}5$

(такой же результат, как и в пункте а)

Ответ: а) Могло, б) Не могло, в) 18,5

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4